

УДК 519.246.8

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЯКОБИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. А. Михайлов¹, Д. Д. Соколов², В. Н. Тутубалин³

Проведено численное моделирование фундаментальной матрицы для уравнения Якоби с кривизной в виде случайного процесса. Результаты приведены для двух представлений фундаментальной матрицы. Одно из них обусловлено физической интерпретацией решения, а другое — свойствами самой матрицы. Обсуждаются различия этих представлений. Показано, что поведение фундаментальной матрицы воспроизводит основные теоретические представления, основанные на известных теоремах о поведении произведения большого числа унимодулярных случайных матриц, а в ряде случаев дополняет эти представления. Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ-ННО 08-02-92881.

Ключевые слова: фундаментальная матрица, случайные коэффициенты, уравнение Якоби.

1. Введение. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами возникают в ряде областей физики [1, 2]. Если коэффициенты заданы в виде случайного процесса с обновлением, то фундаментальная матрица такого уравнения является произведением независимых случайных матриц. В теории вероятностей существуют предельные теоремы для распределений вероятностей таких произведений (см., например, обзор [3]). Однако тщательное и детальное сопоставление выводов теории вероятностей с данными численного эксперимента в контексте физических задач сохраняет свою актуальность. Дело в том, что поведение решений таких уравнений в ряде случаев существенно отклоняется от ожиданий традиционной статистической физики. Это происходит тогда, когда рассматриваемые уравнения описывают какую-либо неустойчивость, т.е. имеют экспоненциально растущие решения. Оказывается, что за счет маловероятных значений старшие статистические моменты решения растут быстрее младших. Это явление получило название перемежаемости [2]. Напомним, что для максвелловского распределения наиболее вероятное значение энергии, его среднее значение и корень из дисперсии близки друг к другу (при большом числе степеней свободы).

Вероятностные теоремы о произведениях случайных матриц устанавливают асимптотические свойства таких распределений с точностью до параметров, которые наиболее естественно было бы вычислять с помощью метода Монте-Карло. Однако экспоненциальный рост решений накладывает ограничения на величину вычислительных ошибок и на качество датчиков случайных чисел. Выполнение этих требований можно проконтролировать лишь путем численных экспериментов, которым и посвящена данная работа.

Насколько известно, явление перемежаемости не очень сильно зависит от конкретного вида рассматриваемого уравнения, а определяется небольшим числом его характеристик. Поэтому сопоставление теоретико-вероятностных теорем и численных результатов полезно проводить на примере какого-либо хорошо изученного уравнения. В качестве такого уравнения нередко используется так называемое уравнение Якоби со случайной кривизной. Еще в 1964 г. Я. Б. Зельдович [4] обратил внимание на то, что влияние малых неоднородностей плотности вещества во Вселенной не сводится к флуктуациям сети изотропных геодезических и некоторому шуму, вносимому в космологические тесты. Возникает систематическое искажение космологических тестов, которое немного понижает кривизну пространственного сечения Вселенной, т.е. приводит к несколько более быстрому, чем можно было бы ожидать по среднему значению кривизны, разбеганию геодезических, исходящих из заданной точки.

Пусть $\gamma(\theta, x)$ — семейство геодезических, которые проходят через фиксированную точку на пространственном сечении, причем x — расстояние от точки их пересечения, а θ — угол, отсчитываемый от некоторой базовой геодезической, для которой $\theta = 0$. Тогда расстояние между точками, находящимися

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; студент, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

² Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 4, 119991, Москва; профессор, e-mail: sokoloff@dds.srcc.msu.ru

³ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; профессор, e-mail: vntutubalin@yandex.ru

на расстоянии x на близких геодезических семейства, равно $y(x)\theta$, где y — поле Якоби вдоль базовой геодезической. Оказывается, что поля Якоби удовлетворяют уравнению Якоби

$$y''(x) + K(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

где K — секционная кривизна в двумерном направлении, натянутом на две близкие геодезические [4, 5]. Кривизна K рассматривается как случайный процесс.

Поскольку сейчас нас не интересуют детали космологических приложений, естественно выбрать удобную модель случайного процесса $K(x)$ (модель с обновлениями). Мы будем считать, что его среднее значение равно нулю, а через равные интервалы длины единица отрезков траектории процесса заменяется на независимый. Выбирая в качестве единицы длины расстояние между точками обновления, мы переходим к безразмерной длине, а следовательно, и к безразмерной кривизне. Будем считать, что значения $K(x)$ постоянны и равны K_n на полуинтервалах $[n-1, n)$, причем случайные величины K_n независимы при различных n и равномерно распределены на отрезке $-1 \leq K_n \leq 1$.

Численное моделирование задачи Коши для этого уравнения было проведено в [6, 7], где подтвержден экспоненциальный рост типичного решения и наличие перемежаемости. Для более простых уравнений, в которых типичная реализация не растет экспоненциально, но явление перемежаемости тем не менее наблюдается, численное моделирование проведено в [8]. В этих работах, однако, не проводились исследования всей фундаментальной матрицы уравнения (1) и сопоставления ее поведения с результатами асимптотических вероятностных теорем. Настоящая статья призвана восполнить этот пробел.

2. Центральная предельная теорема для произведений случайных матриц. Следуя обзору [3], в этом разделе мы изложим основные математические результаты о произведениях случайных матриц. Рассматривается произведение $g(n) = g_1 g_2 \dots g_n$ независимых одинаково распределенных матриц, имеющих одинаковую плотность распределения на группе G унитарных матриц порядка m (плотность относительно инвариантной меры на этой группе). При $n \rightarrow \infty$ элементы матрицы $g(n)$ также стремятся к бесконечности, так что предельное распределение вероятностей могло бы возникнуть лишь после какой-то нормировки. Такая нормировка проводится в специальной системе координат в группе G . Эти координаты тесно связаны с геометрией пространства $G \setminus U$, где U — ортогональная (в случае комплексных матриц — унитарная) подгруппа группы G , но могут быть описаны и независимо от геометрических соображений. Именно, каждая матрица $g \in G$ единственным образом представляется в виде $g = k(g)u(g)$, где $k(g)$ — верхняя треугольная матрица с положительными элементами на диагонали, $u(g)$ — ортогональная (унитарная) матрица. Для вычисления такого представления по данной матрице g достаточно заметить, что соотношение $u(g) = \{k(g)\}^{-1}g$ означает, что умножение слева матрицы g на матрицу $\{k(g)\}$ задает над строками матрицы g такую линейную операцию, которая является последовательной ортогонализацией этих строк начиная с последней строки. Далее, любая верхняя треугольная матрица k может быть представлена в виде $k = zd$, где z — верхняя треугольная матрица с единицами на диагонали, а d — диагональная матрица, элементы которой совпадают с диагональными элементами матрицы k . Представим произведение $g(n) = g_1 g_2 \dots g_n$ в виде $g(n) = z(n)d(n)u(n)$. Оказывается, что уход на бесконечность этого произведения описывается лишь поведением элементов диагональной матрицы $d(n)$, так что лишь эти элементы требуют нормировки для описания с помощью предельной теоремы. Эта нормировка проводится следующим образом. Рассмотрим вектор $\mathbf{t}(n) = \{t_1(n), t_2(n), \dots, t_m(n)\}$ логарифмов диагональных элементов матрицы $d(n)$ (порядок следования — от левого верхнего угла к правому нижнему). При определенных ограничениях на распределение вероятностей перемножаемых матриц вектор $\mathbf{t}(n)$ подчиняется обычной центральной предельной теореме, что означает следующее.

Существуют числа a_1, a_2, \dots, a_m , удовлетворяющие условию $\mathbf{E}\|g_i g_i^*\| < \infty$, где \mathbf{E} — операция взятия математического ожидания, и строгим неравенствам $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, а также матрица Σ , задающая на плоскости $t_1 + t_2 + \dots + t_m = 0$ невырожденный симметричный оператор, такие, что вектор

$$\mathbf{t}^*(n) = \frac{\mathbf{t}(n) - n\mathbf{a}}{\sqrt{n}} = \left\{ \frac{t_1 - na_1}{\sqrt{n}}, \frac{t_2 - na_2}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{t_m - na_m}{\sqrt{n}} \right\}$$

имеет распределение вероятностей, сходящееся при $n \rightarrow \infty$ к многомерному нормальному распределению $N(0, \Sigma)$. Наглядный смысл этого утверждения состоит в том, что логарифмы $t_i(n)$ диагональных элементов матрицы $d(n)$ (они же диагональные элементы матрицы $k(n)$) ведут себя примерно как величины na_i со случайными отклонениями порядка величины $O(\sqrt{n})$. Наибольшая скорость роста — у нижнего диагонального элемента, а верхний диагональный элемент экспоненциально быстро стремится к нулю.

Что же касается сомножителей $z(n)$ и $u(n)$, то их распределения вероятностей стремятся к некоторым предельным и не нуждаются в нормировке. Совместное распределение сомножителей $z(n)$, $d(n)$, $u(n)$ стремится к распределению независимых случайных величин.

Для выяснения вычислительных аспектов представления произведения $g(n)$ с помощью указанных трех сомножителей рассмотрим переход от $g(n)$ к $g(n+1) = g(n)g_{n+1}$. Имеем

$$g(n+1) = z(n)d(n)u(n)g_{n+1} = z(n)d(n)\{u(n)g_{n+1}\} = z(n)d(n)z'd'u',$$

где $u(n)g_{n+1} = z'd'u'$. Представим произведение $d(n)z'$ в виде $d(n)z' = z'' = d(n)z'\{d(n)\}^{-1}$. Как было отмечено выше, при $i < j$ элемент $d_i(n)$ растет медленнее, чем элемент $d_j(n)$. Следовательно, матрица z'' близка к единичной. Поскольку $z(n+1) = z(n)z''$, то ясно, что с ростом n этот сомножитель стабилизируется. Далее, $d(n+1) = d(n)d'$, а следовательно, вектор логарифмов диагональных элементов $t(n+1)$ получится из $t(n)$ добавлением логарифмов диагональных элементов матрицы d' . Наконец, очевидно, $u(n+1) = u'$. Таким образом, для получения представления $g(n+1) = z(n+1)d(n+1)u(n+1)$ из представления $g(n) = z(n)d(n)u(n)$ нужно лишь представить в аналогичном виде не стремящуюся к бесконечности матрицу $u(n)g_{n+1}$, а затем произвести арифметические действия, не использующие умножения на возрастающие с ростом n числа. Это должно исключить влияние ошибок округления, которые накопились бы, если бы вычисление произведения $g(n) = g_1g_2 \dots g_n$ делалось в обычных матричных элементах.

С вероятностной точки зрения последовательность $\{u(n), n = 1, 2, \dots\}$ является марковской цепью, равно как и последовательность пар $\{u(n), g_{n+1}, n = 1, 2, \dots\}$. Поэтому центральная предельная теорема для вектора $t(n)$ логарифмов диагональных элементов является вариантом предельной теоремы для сумм случайных величин, являющихся функциями от состояний цепи Маркова. Что же касается сомножителя $z(n)$, то он сходится не только в смысле распределения вероятностей, но и в смысле сходимости с вероятностью 1 (можно утверждать, что $z(n) \rightarrow z(\infty)$, где $z(\infty)$ — некоторая случайная величина, зависящая от последовательности g_1, g_2, \dots). При произвольном распределении перемножаемых матриц для цепи Маркова $\{u(n), n = 1, 2, \dots\}$ возможна периодичность. Однако периодичности не может быть, если перемножаемые матрицы являются фундаментальными матрицами системы уравнений со случайными, но кусочно постоянными коэффициентами (см. подробнее [10]).

Устанавливая общие свойства произведения случайных матриц, теория не дает, однако, эффективных способов вычисления результирующих параметров (т.е. параметров многомерного нормального закона и предельных распределений вероятностей для сомножителей $z(n), u(n)$). Представляет интерес исследование возможностей метода Монте-Карло для этой цели.

3. Численный эксперимент. Мы занимаемся моделированием неустойчивого (т.е. растущего) решения уравнения (1), а следовательно, должны считаться с тем, что стандартные методы численного решения уравнений (например, метод Рунге–Кутты) могут приводить к искусственным неустойчивостям, искажающим истинное поведение решения. В нашем случае переменная кривизна в уравнении Якоби кусочно постоянна, что позволяет вычислить в явном виде фундаментальную матрицу на каждом отрезке единичной длины, а затем перемножить полученные матрицы. С другой стороны, можно приближенно вычислять фундаментальную матрицу на каждом отрезке единичной длины методом Рунге–Кутты и затем перемножать полученные приближенные фундаментальные матрицы. (Мы приводили эти матрицы к точно унимодулярным путем деления каждого элемента матрицы на квадратный корень из ее определителя.) Сравнение результатов, полученных обоими методами, позволит оценить порядок искажений, вносимых методом Рунге–Кутты (мы использовали метод Рунге–Кутты второго порядка). Вычисления проводились с двойной точностью (double).

Другим вопросом, требующим экспериментального прояснения, является тот факт, что в численном эксперименте мы используем, строго говоря, лишь набор псевдослучайных чисел. Поэтому мы контролируем обоснованность наших выводов, сравнивая результаты для двух генераторов случайных чисел. Мы использовали генераторы, встроенные в язык Visual C++ и в язык Visual Basic, которые дают цепочку псевдослучайных чисел с периодом повторения 2^{32} . Сам по себе такой период повторения вполне достаточен для нашего моделирования. Таким образом, мы пользуемся набором приемов из работ [7–9]. В этих работах было отмечено, что погрешности численного метода интегрирования приводят к небольшому завышению скорости роста решения, а эта скорость роста слегка зависит от выбора генератора случайных чисел. Конечно, это свидетельствует о том, что точность расчета интересующих нас параметров с помощью метода Монте-Карло ограничена. (В принципе, эту точность можно повысить использованием более совершенных численных методов или генераторов случайных чисел.) Однако полученная точность достаточна для исследования интересующих нас явлений. Выпишем выражения для фундаментальной матрицы Якоби на единичном отрезке. Чтобы фундаментальные матрицы перемножались в порядке слева направо, нужно решение уравнения и его производную записывать в виде строчки (y, y') . Тогда получаем

$$(y(n+1), y'(n+1)) = (y(n), y'(n))B_n, \tag{2}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} \cos K_n^{1/2} & -K_n^{1/2} \sin K_n^{1/2} \\ \frac{\sin K_n^{1/2}}{K_n^{1/2}} & \cos K_n^{1/2} \end{pmatrix} \text{ при } K_n \geq 0, \quad B_n = \begin{pmatrix} \text{ch}(-K_n)^{1/2} & (-K_n)^{1/2} \text{sh}(-K_n)^{1/2} \\ \frac{\text{sh}(-K_n)^{1/2}}{(-K_n)^{1/2}} & \text{ch}(-K_n)^{1/2} \end{pmatrix} \text{ при } K_n < 0.$$

Очевидно, что $(y(n), y'(n)) = (y(0), y'(0))B_1B_2 \dots B_n$. Итак, поиск решения в целочисленных точках сводится к подсчету фундаментальной матрицы $B(n)$, определяемой соотношением $B(n) = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = B_1B_2 \dots B_n$. Для наших целей вполне достаточно знать решение в целочисленных точках, но в принципе подобным образом можно искать решение и в других точках.

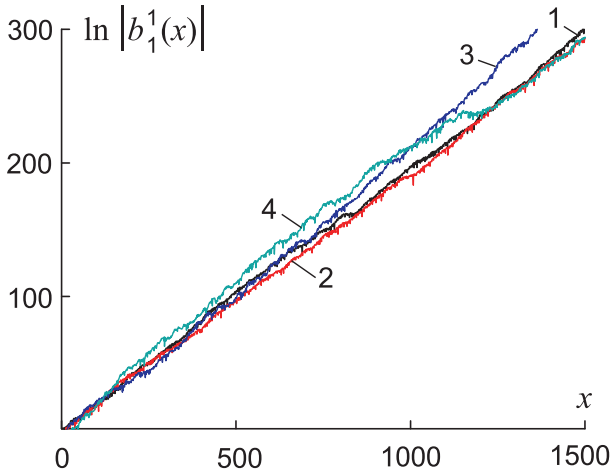


Рис. 1. Рост элемента b_1^1 матрицы: 1) генератор Visual C++, перемножение матриц, 2) генератор Visual Basic, перемножение матриц, 3) генератор Visual C++, метод Рунге–Кутта, 4) генератор Visual Basic, метод Рунге–Кутта

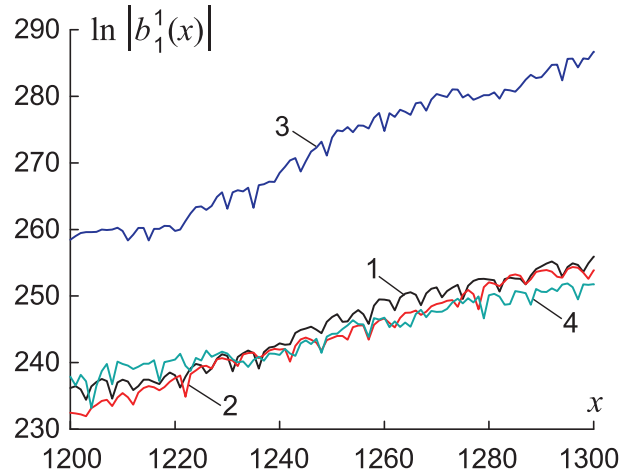


Рис. 2. Рост элемента b_1^1 матрицы (показан с большим временным разрешением, чем на рис. 1): 1) генератор Visual C++, перемножение матриц, 2) генератор Visual Basic, перемножение матриц, 3) генератор Visual C++, метод Рунге–Кутта, 4) генератор Visual Basic, метод Рунге–Кутта

На рис. 1 и 2 в логарифмическом масштабе приведены результаты численного эксперимента для элементов данной матрицы. На рис. 1 на примере элемента b_{11} показано, что элементы фундаментальной матрицы действительно растут экспоненциально с ростом n , поскольку в логарифмических координатах полученные данные хорошо ложатся на прямую. Небольшие различия в наклоне полученной прямой связаны с накоплением ошибок в методе Рунге–Кутта и небольшим различием в качестве генераторов. В том случае, когда для изучения элементов фундаментальной матрицы использовался метод Рунге–Кутта, выделение конкретного элемента фундаментальной матрицы осуществлялось подбором подходящих начальных условий. В методе Рунге–Кутта для определенности использовалось 10 узлов сетки на каждый интервал обновления. Повышение числа узлов, как и следовало ожидать, приводит к тому, что скорость роста решения, полученная методом Рунге–Кутта, приближается к скорости роста, вычисленной путем перемножения матриц.

На рис. 2 на примере численного метода, давшего наименьшие скорости роста для данного элемента матрицы (и, следовательно, в наименьшей степени отягощенного вычислительными погрешностями), мы убеждаемся, что скорости роста всех элементов фундаментальной матрицы приблизительно равны друг другу (наклоны прямых, аппроксимирующих данные для всех четырех элементов, очень близки друг к другу). Эти выводы вполне согласуются с теоретическими ожиданиями, но дополняют результаты теоретических исследований.

Значение фундаментальной матрицы на отрезке $[1, n]$ имеет вид $B(n) = B_1B_2 \dots B_n$, и мы исследуем это произведение, представляя его в виде $B(n) = z(n)d(n)u(n)$. В данном случае порядок матриц $m = 2$, так что сомножители в последней формуле (при понятном выборе обозначений, когда через $z(n)$ обозначается и матрица второго порядка, и ее элемент) имеют следующий вид:

$$z(n) = \begin{pmatrix} 1 & z(n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad d(n) = \begin{pmatrix} e^{-t(n)} & 0 \\ 0 & e^{t(n)} \end{pmatrix}; \quad u(n) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(n) & \sin \varphi(n) \\ -\sin \varphi(n) & \cos \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

При этом теория предсказывает, что значение случайной величины $z(n)$ стабилизируется с ростом n к некоторому случайному пределу, величина $t(n)$ ведет себя примерно как na , где $a > 0$, а угол $\varphi(n)$ совершает блуждание по окружности по закону марковской цепи, причем его распределение вероятностей стремится к некоторому предельному. Что же касается поведения самих элементов матрицы $B(n)$, то его следует выводить, расписав поэлементно произведение матриц, $B(n) = z(n)d(n)u(n)$. Имея в виду поведение при больших значениях n , можно при этом пренебречь членами, содержащими $e^{-t(n)}$. В результате получается

$$B(n) \approx \begin{pmatrix} -z(n)e^{t(n)} \sin \varphi(n) & -z(n)e^{t(n)} \cos \varphi(n) \\ -e^{t(n)} \sin \varphi(n) & e^{t(n)} \cos \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

Например, логарифмические скорости роста модулей всех элементов матрицы $B(n)$ одинаковы и равны a . Однако на сравнительно регулярный примерно линейный рост величины $t(n)$ накладываются некоторые искажения, вносимые умножением элементов матрицы $B(n)$ на $z(n)$ и $\sin \varphi(n)$ либо $\cos \varphi(n)$.

4. Результаты численных расчетов и их обсуждение. Проведены расчеты матрицы $B(n)$ до значения $n=1400$ четырьмя способами (в скобках указано, как они обозначены в таблицах):

- 1) перемножение матриц, генератор Basic (ПМ, Basic),
- 2) перемножение матриц, генератор C++ (ПМ, C++),
- 3) метод Рунге–Кутта, генератор Basic (ПК, Basic),
- 4) метод Рунге–Кутта, генератор C++ (ПК, C++).

При каждом методе расчета вычислялось $N = 100$ реализаций метода Монте-Карло.

1. *Результаты для логарифма $t(n)$ нижнего диагонального элемента треугольной матрицы.* Теоретически в этом случае ожидается примерно нормальное распределение со средним вида na и со стандартным отклонением вида $\sigma\sqrt{n}$, где величины a и σ подлежат определению путем численного расчета. Если через $\bar{t} = \bar{t}(n)$ обозначить выборочное среднее значений $t(n)$ по выборке объема $N = 100$, а через $s = s(n)$ — соответствующее выборочное стандартное отклонение, то оценкой для a является $\hat{a} = \frac{\bar{t}}{n}$, а оценкой для σ является $\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{n}}$. При этом оценкой стандартного отклонения для \hat{a} будет величина

$$\hat{a}^* = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{nN}} = \frac{s}{n\sqrt{N}}.$$

Поскольку в случае использования метода Рунге–Кутта фундаментальные матрицы на отрезках длины 1 вычисляются приближенно, отдельные реализации метода Монте-Карло несколько различаются в случае перемножения точных фундаментальных матриц и в случае метода Рунге–Кутта. Составить представление о величине этих различий можно из нижеследующего примера трех произвольно выбранных реализаций (табл. 1). (Следует сравнивать рядом стоящие столбцы, обозначенные “матр.” и “РК”.)

Однако оценки параметров распределения $t(n)$ (т.е. величин a и σ) при любом из четырех методов вычисления отличаются статистически незначимо, как видно из табл. 2.

Эмпирические распределения моделированных значений $t(n)$ уже начиная с $n = 10$ достаточно сходны с нормальными, как видно из рис. 3 и 4, на которых эмпирические функции распределения изображены в нормальном масштабе. (В этом масштабе теоретическая нормальная функция распределения изображается прямой линией.) При умеренном объеме выборки $N = 100$, с которым мы работаем, согласие с теоретической прямой достаточно удовлетворительное. Однако имеются отдельные значения, сравнительно далеко отстоящие от общей совокупности наблюдений.

2. *Результаты для $z(n)$.* Теоретически для этой величины ожидается быстрая стабилизация к некоторым предельным значениям, зависящим от выбора последовательности случайных чисел. Представление о скорости этой стабилизации дает нижеследующий пример нескольких реализаций (табл. 3 — генератор Basic, перемножение матриц).

Однако в отдельных случаях стабилизация происходит медленнее, чем в этом примере. Это связано с тем, что значения $t(n)$ в этих случаях при небольших n не растут, а даже убывают. Эмпирические функции распределения приведены на рис. 5. На этом рисунке видно, в частности, что при близком (в большинстве случаев) совпадении значений $z(n)$, полученных методами перемножения матриц и Рунге–Кутта, все же имеется несколько больших по модулю отрицательных значений $z(n)$, полученных методом перемножения матриц, которым отвечают не столь большие по модулю значения, полученные методом Рунге–Кутта.

3. *Результаты для $\varphi(n)$.* Для значений этой величины ожидается установление стационарного распределения вероятностей. Эмпирические функции этого распределения (на отрезке $[0, 2\pi]$) для примера

Таблица 1

Три произвольно выбранные реализации

n	Basic		C++		Basic		C++		Basic		C++	
	матр.	PK	матр.	PK	матр.	PK	матр.	PK	матр.	PK	матр.	PK
10	2.966	3.021	1.899	1.877	1.424	1.424	0.771	0.773	4.071	4.081	1.644	1.635
20	6.985	7.025	4.826	4.819	2.243	2.238	4.393	4.390	4.780	4.777	3.415	3.414
50	15.82	15.90	10.03	10.04	4.55	4.60	11.62	11.62	8.92	9.15	15.16	15.16
100	32.50	32.59	21.38	21.36	15.14	15.21	23.73	23.73	19.09	19.28	26.27	26.27
200	62.16	62.25	52.03	52.05	38.65	38.73	36.54	36.63	38.71	39.05	50.92	50.98
300	86.50	86.60	80.11	80.14	56.83	57.01	61.41	61.52	54.15	54.48	65.81	65.90
400	106.2	106.3	98.18	98.21	86.36	86.54	75.97	76.11	80.39	80.77	90.74	90.88
500	124.7	124.8	116.8	116.9	103.4	103.6	96.96	97.22	106.9	107.3	108.0	108.2
600	148.5	148.5	144.9	145.1	122.4	122.6	122.4	122.7	126.6	126.8	121.8	122.0
700	162.3	162.3	163.5	163.6	145.5	145.8	141.7	142.0	165.1	165.4	139.5	139.7
800	178.0	178.0	187.3	187.5	163.1	163.3	156.5	156.8	184.6	184.0	167.4	167.7
900	196.6	196.5	212.9	213.1	181.1	181.4	179.9	180.2	210.7	209.2	191.0	191.2
1000	213.6	213.6	235.8	235.9	201.2	201.7	202.5	202.9	239.5	238.1	205.5	205.7
1100	230.1	230.1	259.1	259.2	220.4	220.9	218.2	218.7	252.1	250.7	226.9	227.1
1200	250.2	250.2	289.7	289.8	241.2	241.7	241.8	242.3	276.3	274.8	249.8	250.1
1300	271.3	271.3	311.3	311.4	253.7	254.2	262.7	263.2	303.1	301.7	274.8	275.0
1400	298.9	298.9	329.1	329.4	276.4	277.0	287.6	288.2	334.2	332.8	296.8	297.0

Таблица 2

Оценки параметров распределения величин $t(n)$

мет.	матр. Basic			матр. C++			PK, Basic			PK, C++		
	A	σ	ст.ош.	A	σ	ст.ош.	A	σ	ст.ош.	A	σ	ст.ош.
10	0.2412	0.4564	0.0144	0.2271	0.4412	0.0140	0.2413	0.4576	0.0145	0.2293	0.4236	0.0134
20	0.2195	0.5224	0.0117	0.2217	0.5051	0.0113	0.2203	0.5199	0.0116	0.2227	0.4997	0.0112
50	0.2083	0.5200	0.0074	0.2066	0.4467	0.0063	0.2088	0.5173	0.0073	0.2060	0.4562	0.0065
100	0.2176	0.5135	0.0051	0.2115	0.4010	0.0040	0.2182	0.5107	0.0051	0.2113	0.4002	0.0040
200	0.2144	0.4870	0.0034	0.2096	0.4329	0.0031	0.2149	0.4864	0.0034	0.2097	0.4409	0.0031
300	0.2111	0.5131	0.0030	0.2120	0.4641	0.0027	0.2116	0.5064	0.0029	0.2123	0.4662	0.0027
400	0.2136	0.4739	0.0024	0.2122	0.4791	0.0024	0.2140	0.4660	0.0023	0.2125	0.4767	0.0024
500	0.2116	0.5013	0.0022	0.2105	0.4555	0.0020	0.2119	0.4940	0.0022	0.2107	0.4546	0.0020
600	0.2127	0.5087	0.0021	0.2117	0.4535	0.0019	0.2130	0.4997	0.0020	0.2119	0.4509	0.0018
700	0.2119	0.4948	0.0019	0.2128	0.4988	0.0019	0.2122	0.4896	0.0019	0.2130	0.4952	0.0019
800	0.2131	0.4719	0.0017	0.2128	0.4939	0.0017	0.2133	0.4667	0.0017	0.2130	0.4940	0.0017
900	0.2137	0.4585	0.0015	0.2122	0.4853	0.0016	0.2139	0.4546	0.0015	0.2124	0.4876	0.0016
1000	0.2129	0.4658	0.0015	0.2120	0.4882	0.0015	0.2131	0.4612	0.0015	0.2122	0.4906	0.0016
1100	0.2129	0.4663	0.0014	0.2116	0.4963	0.0015	0.2131	0.4633	0.0014	0.2118	0.5002	0.0015
1200	0.2129	0.5075	0.0015	0.2112	0.5247	0.0015	0.2132	0.5047	0.0015	0.2114	0.5281	0.0015
1300	0.2128	0.5037	0.0014	0.2111	0.5015	0.0014	0.2130	0.5018	0.0014	0.2113	0.5042	0.0014
1400	0.2131	0.5152	0.0014	0.2122	0.4913	0.0013	0.2133	0.5116	0.0014	0.2124	0.4964	0.0013

приведены на рис. 6. Видно, что при $n = 10$ предельное распределение еще не достигается, а при $n = 100$ эмпирическое распределение несущественно отличается от случая $n = 1400$. Методы перемножения матриц и Рунге–Кутта дают (как правило) близкие результаты.

5. Заключение. Статистические свойства величин, полученных путем численного моделирования,

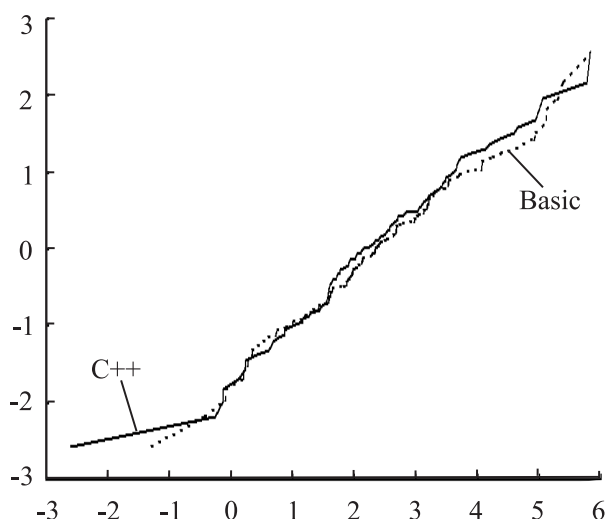


Рис. 3. Эмпирические функции распределения значений t при $n = 10$. Метод умножения матриц

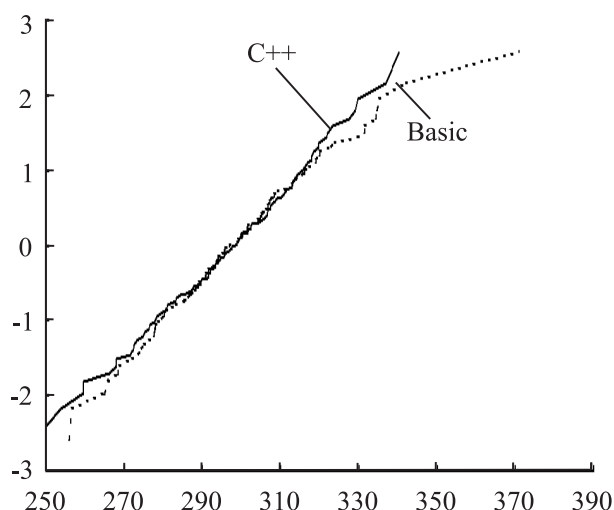


Рис. 4. Эмпирические функции распределения значений t при $n = 1400$. Метод умножения матриц

Пример нескольких реализаций

Таблица 3

n	отдельные реализации								
10	-0.2811	0.1752	0.2269	0.1460	-2.7972	0.8720	0.0885	0.8249	0.1368
20	-0.2749	0.1816	-0.1152	0.1469	-3.9888	0.8724	0.0934	0.8250	0.0767
50	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
100	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
200	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
300	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
400	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
500	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
600	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
700	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
800	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
900	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
1000	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
1100	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
1200	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
1300	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762
1400	-0.2629	0.1819	-0.1152	0.1463	-3.9702	0.8724	0.0850	0.8250	0.0762

полностью соответствуют теоретическим ожиданиям. Вычисления велись вплоть до значений элементов фундаментальной матрицы порядка величины $e^{300} > 10^{100}$, и при этом не было обнаружено каких-либо эффектов, связанных с накоплением вычислительных ошибок. Сравнительно точно рассчитываются параметры a и σ , характеризующие асимптотически нормальное распределение для логарифма $t(n)$ нижнего диагонального элемента треугольной матрицы. Что касается величин $z(n)$ и $\varphi(n)$, то их распределения не задаются какими-либо параметрическими законами распределения (можно даже доказать, что множества таких распределений бесконечномерны), и их можно наглядно представить лишь в виде эмпирических функций распределения. При нашем умеренном объеме выборки $N = 100$ точность приближения теоретической функции распределения с помощью эмпирической невелика. Однако можно грубо оценить, при каких значениях n примерно устанавливаются предельные распределения этих величин (это значение n достигает порядка десятков для $z(n)$ и порядка сотен для $\varphi(n)$).

Мы используем неспециализированный генератор случайных чисел, встроенный в известный пакет

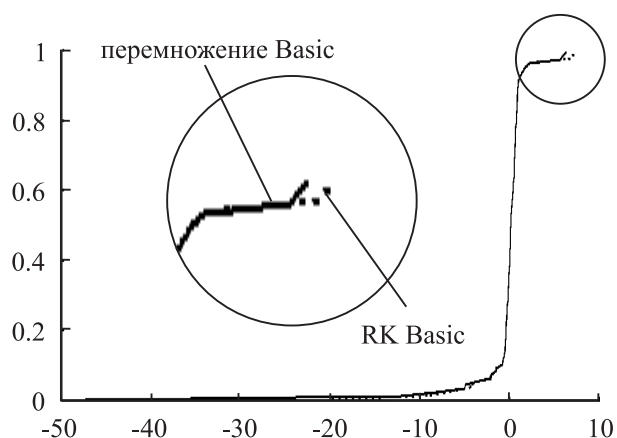


Рис. 5. Эмпирическая функция распределения z при $n = 50$

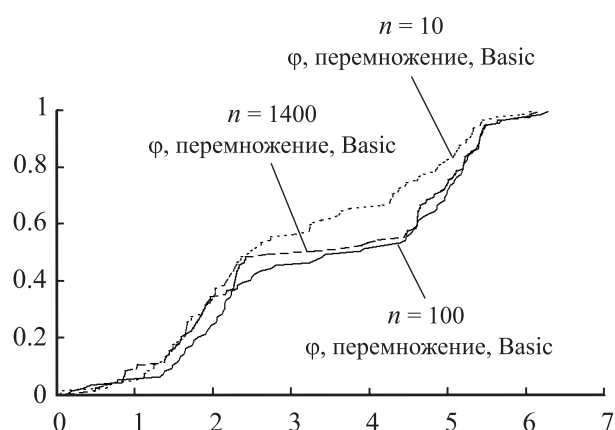


Рис. 6. Эмпирические функции распределения φ для различных n

Visual Studio. В Интернете представлено много более совершенных генераторов с открытым кодом, которые, в принципе, можно было бы также использовать. Нашей целью, однако, было сопоставление результатов теории и численного эксперимента в перспективе физических приложений. В этих приложениях, как правило, нет никакой уверенности, что объект, например турбулентный поток, является очень хорошим генератором случайных чисел. Поэтому мы и воспользовались стандартными генераторами.

Однако некоторые реализации последовательности случайных чисел приводят к таким значениям изучаемых параметров, которые более или менее выпадают из рассматриваемых распределений. Именно, в некоторых случаях значения $t(n)$, которые, вообще говоря, возрастают с ростом n , сначала (при небольших n) не возрастают (или даже убывают, становясь отрицательными: нижний диагональный элемент треугольной матрицы делается меньше верхнего). С этим эффектом связана медленная стабилизация значения $z(n)$ и большие по модулю значения, к которым этот элемент стабилизируется. В этих случаях можно заметить существенную разницу между вычислениями с помощью перемножения матриц и с помощью метода Рунге–Кутты (рис. 3). Напомним, что под перемножением матриц мы понимаем перемножение точных фундаментальных матриц на единичных отрезках, а под методом Рунге–Кутты — перемножение таких же матриц, но вычисленных (на единичных отрезках) методом Рунге–Кутты. В большинстве случаев результаты обоих методов неплохо согласуются между собой, но из этого правила есть и исключения вроде представленных на рис. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. The almighty chance. Singapore: World Sci., 1990.
2. Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A., Molchanov S., Sokoloff D. Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1988. **7**. 1–110.
3. Tutubalin V.N. A central limit theorem for products of random matrices and some of its applications // Symposia Mathematica. 1977. **XXI**. 101–116.
4. Зельдович Я.Б. Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // Астрон. ж. 1964. **41**. 19–24.
5. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
6. Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н. Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной // Матем. заметки. 2003. **74**, № 3. 416–424.
7. Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д. Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // Астрон. ж. 2005. **82**, № 7. 584–589.
8. Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д. Численное моделирование распределения сопряженных точек на геодезической со случайной кривизной // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 2. 172–177.
9. Грачев Д.А., Соколов Д.Д. Численное моделирование роста мультипликативных случайных величин // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**, № 1. 5–9.
10. Тутубалин В.Н. О мерах, носитель которых порождается алгеброй Ли // Теория вероят. и ее применен. 1967. **12**, № 1. 154–160.

Поступила в редакцию
07.09.2010