

УДК 519.633

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФРОНТА ВНУТРИПЛАСТОВОГО ГОРЕНИЯ

Н. Е. Грачев¹, А. В. Дмитриев², Д. С. Сенин¹, В. Т. Волков², Н. Н. Нефёдов²

Работа посвящена численному исследованию динамики резких переходных слоев в задаче “реакция–диффузия–адвекция”. Математическая модель позволяет качественно описать движение фронта окислителя при термогазовом методе увеличения нефтеотдачи. Рассмотрено влияние неоднородностей по проницаемости на форму фронта. Результаты моделирования сопоставлены с расчетами в термогидродинамическом симуляторе CMG STARS.

Ключевые слова: уравнение реакции–диффузии–адвекции, асимптотические методы, фронт внутрипластового горения.

1. Введение. В связи с истощением легкодоступных запасов углеводородов одним из приоритетных направлений развития нефтяной отрасли является разработка и совершенствование методов увеличения нефтеотдачи (МУН). Термогазовый метод [1], основанный на закачке в продуктивный пласт воздуха или воздуха с водой и способности пластовой нефти вступать в химические реакции с кислородом, является одним из наиболее эффективных МУН.

В настоящей статье рассмотрено влияние неоднородностей по проницаемости пласта на форму фронта окисления. Для изучения процессов формирования переходного слоя используется математическая модель на основе уравнения реакции–диффузии–адвекции и гидродинамический симулятор CMG STARSTM (Computer Modeling Group, Steam Thermal and Advanced processes Reservoir Simulator).

2. Постановка задачи. Существует ряд математических моделей формирования и динамики фронта внутрипластового окисления [2], основанных на системе дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих гидродинамическое течение компонентов, перенос тепла, фазовые переходы и химические реакции.

При исследовании особенностей динамики фронта окисления задачу о нахождении концентрации окислителя в пористой среде, совершив ряд упрощений, параметризаций и приведя к безразмерному виду, можно свести к уравнению типа реакция–диффузия–адвекция (РДА)

$$\varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} + v(y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = u(u^2 - 1). \quad (1)$$

Рассмотрим это уравнение в двумерной области $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$, где a, b — постоянные. Величина ε^2 характеризует коэффициент молекулярной диффузии кислорода D , который, как показывают эксперименты, может меняться при внутрипластовых условиях от 10^{-3} до 10^{-1} м²/сутки [3, 4], $v(y)$ является параметром, связанным со скоростью движения фронта. Характерные линейные размеры нефтеносных пластов составляют сотни метров, что много больше, чем толщина концентрационных фронтов, а скорость движения области горения — десятки сантиметров в сутки. Поэтому ε будем считать малым параметром. Все величины, входящие в уравнение (1), являются безразмерными.

Эксперименты и гидродинамическое моделирование показывают, что фронты реакций термогазового метода, движущиеся в пористой среде нефтяного пласта, могут иметь вид резких скачков по концентрации кислорода. Решение уравнения (1) будем искать в виде контрастной структуры типа ступеньки, причем $u \in [-1, 1]$; пусть $f(u)$ — сбалансированная кубическая нелинейность $f(u) = u(u^2 - 1)$, позволяющая описать существование двух устойчивых уровней $u_1 = -1$ (полное отсутствие кислорода — со стороны добывающей скважины) и $u_2 = 1$ (максимально возможная концентрация кислорода — со стороны скважины, нагнетающей воздух в пласт) и образование резкого скачка между ними — фронта окисления. Начальное распределение кислорода выбрано в виде плавного перехода между данными уровнями.

¹ Всероссийский нефтегазовый научно-исследовательский институт им. акад. А. П. Крылова, Дмитровский проезд, 10, 127422, Москва; Н. Е. Грачев, ст. науч. сотр., e-mail: grachev_nick@mail.ru; Д. С. Сенин, инженер, e-mail: dsenin@vniineft.ru

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119991, Москва; А. В. Дмитриев, студент, e-mail: dmitriev_a.v@mail.ru; В. Т. Волков, доцент, e-mail: volkovvt@migmil.ru; Н. Н. Нефёдов, профессор, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

3. Асимптотический анализ. Наличие малого параметра при старшей производной в уравнении (1) позволяет провести асимптотический анализ и применить теорию контрастных структур [5].

Рассмотрим уравнение (1) с условиями непроницаемости на границе:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, x=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0, y=b} = 0. \tag{2}$$

Пусть начальная функция

$$u(x, y, 0) = u^0(x, y) \tag{3}$$

такова, что выполняется условие $u^0(x, y) < 0$ при $(x, y) \in D_0^{(-)} := \{(0 \leq x < h^0(y)) \times (0 \leq x < b)\}$ и $u^0(x, y) < 0$ при $(x, y) \in D_0^{(+)} := \{(0 < x \leq a) \times (0 \leq x \leq b)\}$. Тогда некоторая модификация результатов работ [6, 7] позволяет получить результат, который мы сформулируем в виде леммы, описывающей процесс формирования фронта.

Лемма Пусть $v(y)$, $h^0(y)$ и $u^0(x, y)$ достаточно гладкие функции и $u^0(x, y)$ удовлетворяет указанному условию. Тогда при достаточно малых ε существует положительная постоянная B , такая, что в момент времени $t = t_B(\varepsilon) = B\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|$ для решения $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3) справедливы следующие

представления: $u(x, y, t_B, \varepsilon) = \begin{cases} -1 + O(\varepsilon) & \text{при } (x, y) \in D_0^{(-)}; \\ 1 + O(\varepsilon) & \text{при } (x, y) \in D_0^{(+)}. \end{cases}$

Области $D_0^{(-)}$ и $D_0^{(+)}$ — соответственно вне замкнутой кривой $h^0(y)$ и внутри нее.

Из леммы следует, что на начальной стадии решение задачи (1)–(3) быстро формирует фронт в окрестности кривой $x = h^0(y)$.

Асимптотика задачи (1)–(3), имеющей фронт, строится по схеме теории контрастных структур [5], развитой для описания движущихся фронтов в работе [8]. Согласно этой схеме, для построения асимптотики рассматриваются две задачи в областях по разные стороны от фронта, описываемого функцией $x = h(y, t, \varepsilon)$. Асимптотика решения каждой из задач строится стандартно по методу пограничных функций в виде регулярной и погранслоистой частей.

Погранслоистая часть служит для описания решения вблизи границ области рассмотрения и кривой $x = h(y, t, \varepsilon)$. Регулярные части асимптотики состоят лишь из главных членов $u^{(\pm)}(x, y, t) = \pm 1$, а погранслоистые члены вблизи границ D равны нулю. Пограничные функции $Q^{(\pm)}(\xi, y, t, \varepsilon)$ вблизи кривой $x = h(y, t, \varepsilon)$ зависят от растянутой переменной и также определяются стандартным образом. Сама же кривая $x = h(y, t, \varepsilon)$ определяется из условия сшивания асимптотик $U^{(-)}(x, y, t, \varepsilon)$ и $U^{(+)}(x, y, t, \varepsilon)$ в $D^{(\pm)}$ на кривой $x = h(y, t, \varepsilon)$: $\varepsilon \frac{\partial U^{(-)}}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial U^{(+)}}{\partial x}$, в процессе рассмотрения этого условия последовательно при нулевой, первой и т.д. степенях ε .

Применив описанную выше схему для построения главных членов асимптотики, получим следующую начально-краевую задачу для определения положения фронта в нулевом приближении (уравнение локализации фронта):

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2} \left[1 + \left(\frac{\partial h_0}{\partial y} \right)^2 \right]^{-2} - v(y) = 0, \quad \frac{\partial h_0}{\partial y}(0) = \frac{\partial h_0}{\partial y}(b) = 0, \quad h(y, 0) = h^0(y). \tag{4}$$

Численное решение этой задачи существенно проще, чем численное решение исходной системы (1)–(3), однако позволяет адекватно моделировать динамику фронта. Соответствующее сравнение результатов продемонстрировано в следующем разделе статьи. Кроме того, использование данной методики при математическом моделировании процессов движения фронтов различной природы существенно ускоряет получение приближенных решений при приемлемой точности вычислений, что приводит к повышению эффективности численных расчетов.

4. Численное решение. Сравним полученные теоретические результаты с численным решением уравнения (1). Для этого построим конечно-разностные схемы решения задачи РДА (1) и уравнения локализации фронта (4).

Расчеты будем проводить в области D , представляющей собой прямоугольник со сторонами $a = b = 1$, выберем коэффициент адвекции в виде $v(y) = v_0 + v_L(y)$, $v_0 = \text{const}$. При $v_L(y) = 0$ сформированный резкий переходный слой будет двигаться вдоль оси X с постоянной скоростью v_0 . Такое поведение согласуется

с экспериментальными и теоретическими исследованиями, в которых показано, что фронт окисления, распространяясь в однородной среде при отсутствии гидродинамических возмущений, движется с постоянной скоростью, не изменяя своей формы.

Пусть $v_L(y) = \frac{c}{2} \left(\text{th}(d(y - b/2 + L/2)) - \text{th}(d(y - b/2 - L/2)) \right)$, причем d — достаточно большое число, $c = \text{const}$, L — ширина полосы действия градиента, $L < b$.

Для численного решения (1) используем продольно-поперечную схему

$$\begin{aligned} A_1 \bar{u}(n, m-1) - C_1 \bar{u}(n, m) + B_1 \bar{u}(n, m+1) &= -F_1, \\ A_2 \bar{\bar{u}}(n-1, m) - C_2 \bar{\bar{u}}(n, m) + B_2 \bar{\bar{u}}(n+1, m) &= -F_2. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\varepsilon^2}{h_2^2}, & B_1 &= \frac{\varepsilon^2}{h_2^2}, & C_1 &= \frac{2\varepsilon^2}{h_2^2} + \frac{2\varepsilon^2}{\tau}, \\ A_2 &= \frac{\varepsilon^2}{h_1^2} - \frac{\varepsilon^2 v(n)}{2h_1}, & B_2 &= \frac{\varepsilon^2}{h_1^2} + \frac{\varepsilon^2 v(n)}{2h_1}, & C_2 &= \frac{2\varepsilon^2}{h_1^2} + \frac{2\varepsilon^2}{\tau}, \\ F_1 &= \left(\frac{\varepsilon^2}{h_1^2} - \frac{\varepsilon^2 v(n)}{2h_1} \right) u(n-1, m) - \left(\frac{2\varepsilon^2}{h_1^2} - \frac{2\varepsilon^2}{\tau} \right) u(n, m) + \left(\frac{\varepsilon^2}{h_1^2} + \frac{\varepsilon^2 v(n)}{2h_1} \right) u(n+1, m) - f(u(n, m)), \\ F_2 &= \frac{\varepsilon^2}{h_2^2} \bar{u}(n, m-1) - \left(\frac{2\varepsilon^2}{h_2^2} + \frac{2\varepsilon^2}{\tau} \right) \bar{u}(n, m) + \frac{\varepsilon^2}{h_2^2} \bar{u}(n, m+1) - f(\bar{u}(n, m)), \end{aligned} \quad (5)$$

где u , \bar{u} , $\bar{\bar{u}}$ — значения функции на начальном слое, на следующих полуслое и слое соответственно, h_1 , h_2 , τ — шаги по x , y и t , n и m — целые числа.

При каждом переходе с одного полуслоя на другой поперечно-продольная схема явна по одной координате и неявна по другой. По неявному направлению сеточная функция вычисляется методом прогонки. При построении и анализе разностных схем использовались точные аналитические результаты [7]. Там было показано, что быстрое формирование резкого переходного слоя происходит в окрестности кривой, определяемой из начальных данных. Асимптотический анализ позволяет предугадать положение, ширину и оценить время формирования переходного слоя. Таким образом, для наших целей сравнительного анализа, не проводя никаких дополнительных численных оценок, априори можно достаточно точно охарактеризовать поведение модели “реакция–диффузия” на этапе формирования переходного слоя, что позволяет оценивать величины шагов разностной схемы по пространству и времени, обеспечив сходимости и устойчивость разностной схемы (5) в каждом случае при любых исходных параметрах задачи.

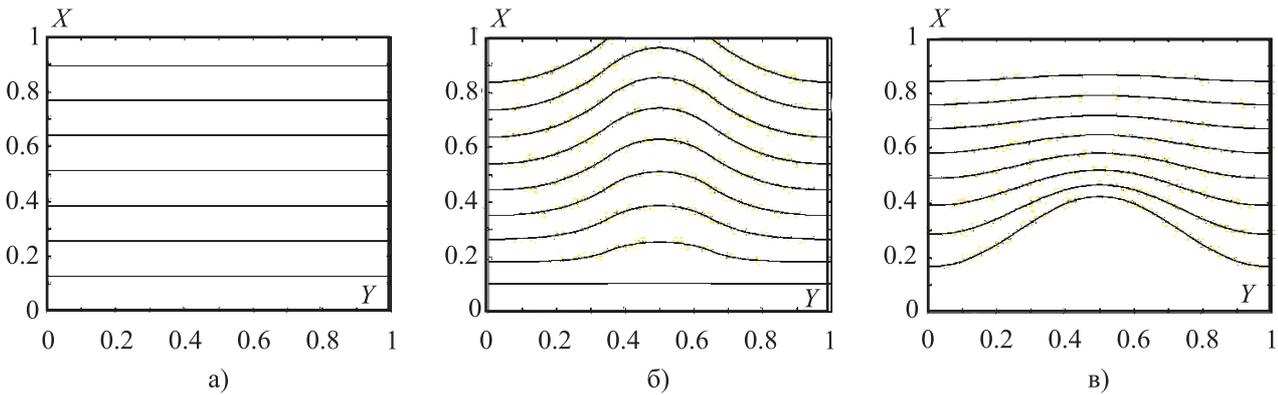


Рис. 1. Последовательные положения фронта через равные промежутки времени в трех различных случаях

Для уравнения локализации фронта (4), полученного при асимптотическом анализе, конечно-разностная явная схема имеет вид

$$\hat{h}_0(n) = \Delta\tau \left[\left(\frac{h_0(n+1) - 2h_0(n) + h_0(n-1)}{(\Delta y)^2} \right) \left(1 + \left(\frac{h_0(n+1) - h_0(n-1)}{2\Delta y} \right)^2 \right)^{-2} + v(n) \right] + h_0(n), \quad (6)$$

где \hat{h}_0 — значение на следующем слое, Δy , $\Delta\tau$ — шаги по y и t соответственно.

Необходимо заметить, что скорость расчета задачи (6) намного выше, чем схемы (5). Следовательно, применение уравнения (4) позволяет повысить эффективность моделирования поведения фронта.

Для иллюстрации поведения фронта, возникающего в решении задачи (1)–(3), было проведено три численных расчета.

В первом эксперименте начальное условие выбрано в виде линейного фронта, параллельного оси y , а коэффициенты адвекции равны $v_0 = \text{const}$, $v_L = 0$. В этом случае фронт движется с постоянной скоростью v_0 , не меняя своей формы (рис. 1а).

Во втором случае начальное условие выбрано в виде линейного фронта, параллельного оси y , а коэффициенты адвекции равны $v_0 = \text{const}$, $v_L > v_0$. Тогда фронт начинает изгибаться в направлении адвекции, через некоторое время его форма стабилизируется вследствие действия закона [5] $v^n \sim -k$ (v^n – нормальная скорость точки фронта, k – кривизна фронта в этой точке), и далее фронт продолжает движение с фиксированной формой (рис. 1б).

В третьем варианте начальное условие выбрано в виде фронта, который задается уравнением

$$x = p \left\{ \text{th}(q(y - 0.5 + L/2)) - \text{th}(q(y - 0.5 - L/2)) \right\},$$

а коэффициенты адвекции равны $v_0 = \text{const}$, $v_L = 0$, p и q – постоянные. Под действием закона $v^n \sim -k$ фронт будет двигаться вдоль оси x , постепенно теряя форму и в пределе превращаясь в прямую, параллельную стороне квадрата, как это изображено на рис. 1в.

Анализ результатов численных расчетов показал соответствие изложенного выше качественного описания поведения фронта и двух моделей для численных расчетов (1)–(3) и (4) (задача РДА и уравнение локализации фронта). На рис. 2 представлены несколько последовательных положений фронта, вычисленных при помощи схем (5) и (6). Из рисунка видно, что поведение решений задач (1)–(3) и (4) совпадает с высокой точностью.

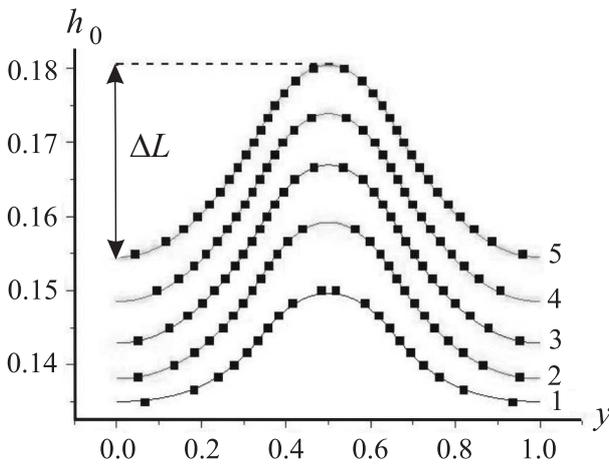


Рис. 2. Последовательные положения фронта: 1) $t = 0.02$, 2) $t = 0.04$, 3) $t = 0.06$, 4) $t = 0.08$ и 5) $t = 0.1$. Точки – решение задачи РДА (1)–(3). Сплошная линия – решение уравнения локализации фронта (4)

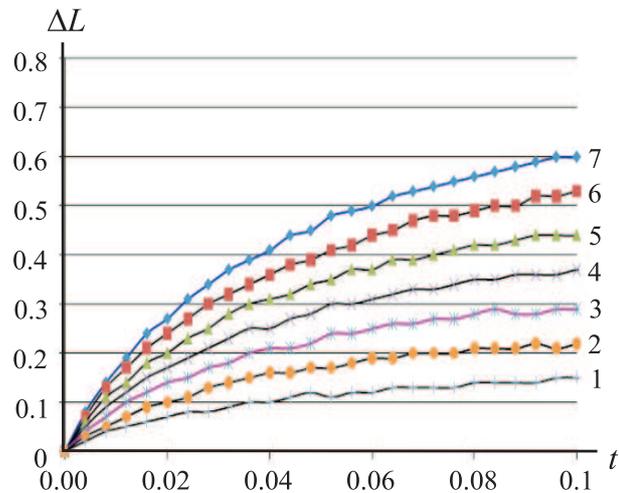


Рис. 3. Зависимость ΔL от времени для семи значений v : 1) 2.5, 2) 3.75, 3) 5, 4) 6.25, 5) 7.5, 6) 8.75, 7) 10

Проведено около 100 численных экспериментов по решению уравнения РДА, в которых варьировалось два параметра – L и v (ширина зоны действия градиента и его величина).

Будем определять высоту фронта ΔL (рис. 2) как $\Delta L = x(b/2) - x(0)$, здесь $x(y)$ – функция, описывающая положение фронта.

Рис. 3 иллюстрирует поведение фронта – изображена серия графиков зависимости высоты от времени при семи различных значениях величины адвекции: $v = 2.5, 3.75, 5, 6.25, 7.5, 8.75, 10$. Виден выход на максимальную постоянную высоту ΔL_{max} , значение которой увеличивается при увеличении адвекции.

Построены зависимости $\Delta L_{\text{max}} = \Delta L_{\text{max}}(v)$ для восьми различных значений L (рис. 4). Расчеты для получения данных зависимостей проводились при $\varepsilon = 0.02$ и восьми значениях ширины зоны действия градиента: $L = 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5$.

Асимптотическое представление решения задачи РДА (1)–(3) позволяет полностью описать процесс формирования и динамику резкого переходного слоя, получить оценки его ширины и времени формирования, а также определить форму фронта в каждый момент времени. Заметим, что указанное асимптотическое представление является достаточно простым, что чрезвычайно важно для эффективного получения оценок различных параметров системы. Кроме того, аналитическое или численное решение уравнения локализации фронта (6), полученного в работе на основе предложенного асимптотического подхода, позволяет адекватно описывать динамику фронта. Использование данного уравнения при математическом моделировании процессов движения устойчивых фронтов различной природы существенно ускоряет получение приближенных решений при приемлемой точности вычислений, что приводит к повышению эффективности численных расчетов.

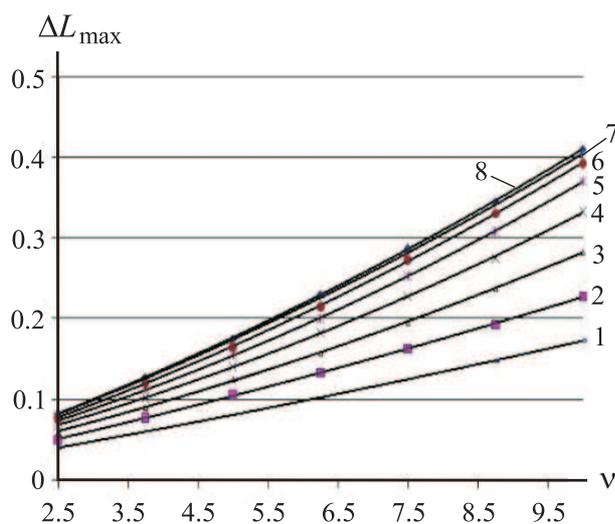


Рис. 4. Зависимость $\Delta L_{\max} = \Delta L_{\max}(v)$.
Значение L равно: 1) 0.15, 2) 0.2, 3) 0.25,
4) 0.3, 5) 0.35, 6) 0.4, 7) 0.45, 8) 0.5

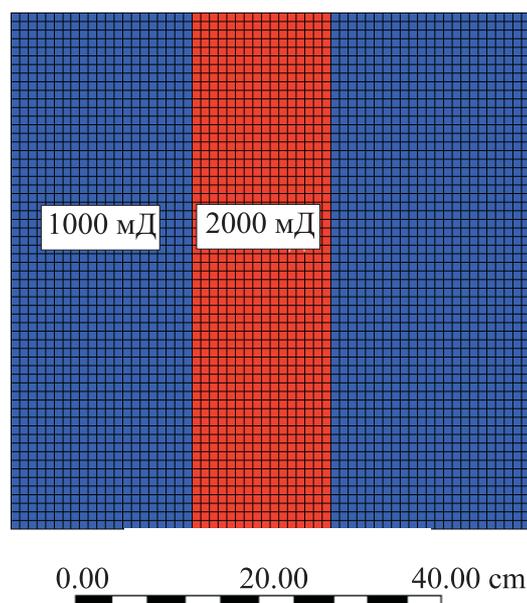


Рис. 5. Схема области моделирования.
Распределение проницаемости
(в миллидарси)

5. Сравнение численных расчетов и результатов моделирования в гидродинамическом симуляторе. Процессы формирования и динамики фронта горения могут быть смоделированы в гидродинамическом симуляторе CMG STARS с возможностью описания химических реакций. Данный программный продукт позволяет создавать сеточные модели пластов. В каждой ячейке рассчитывается баланс массы и фазовое состояние всех компонентов, присутствующих в пористой среде, и теплоперенос между блоками. Фильтрация флюидов описывается при помощи обобщенного закона Дарси.

Модель пласта представляет собой пористое пространство, насыщенное нефтью с растворенным в ней углеводородным газом, причем фильтрационно-емкостные свойства соответствуют свойствам коллектора одного из месторождений Ненецкого автономного округа России. Параметры нефти и пластовые условия выбраны характерными для этого месторождения.

Тестовая модель состоит из двух скважин — нагнетательной и добывающей. Через нагнетательную скважину производится закачка воздуха, который принимается в данных условиях как смесь кислорода (21%) и инертного газа (79%) при постоянном максимальном темпе закачки. Отбор производится при условии постоянного давления на забое добывающей скважины — 10.0 МПа. Изучена модель с размером гидродинамических ячеек 1.5 см. При моделировании использовалась величина коэффициента диффузии кислорода $D = 0.001 \text{ м}^2/\text{сут}$.

Рассмотрим движение резкого переходного слоя по концентрации кислорода на модели с неоднородностью по проницаемости (рис. 5) в двумерном случае. С ее помощью можно исследовать основные эффекты, связанные с распространением фронта окисления в пористой среде, а также сравнить результаты с численными расчетами, приведенными в разделе 3. Через нижнюю сторону квадрата подается воздух, через верхнюю ведется отбор нефти.

Полоса повышенной проницаемости (в два раза большей, чем у окружающей среды) вытягивает

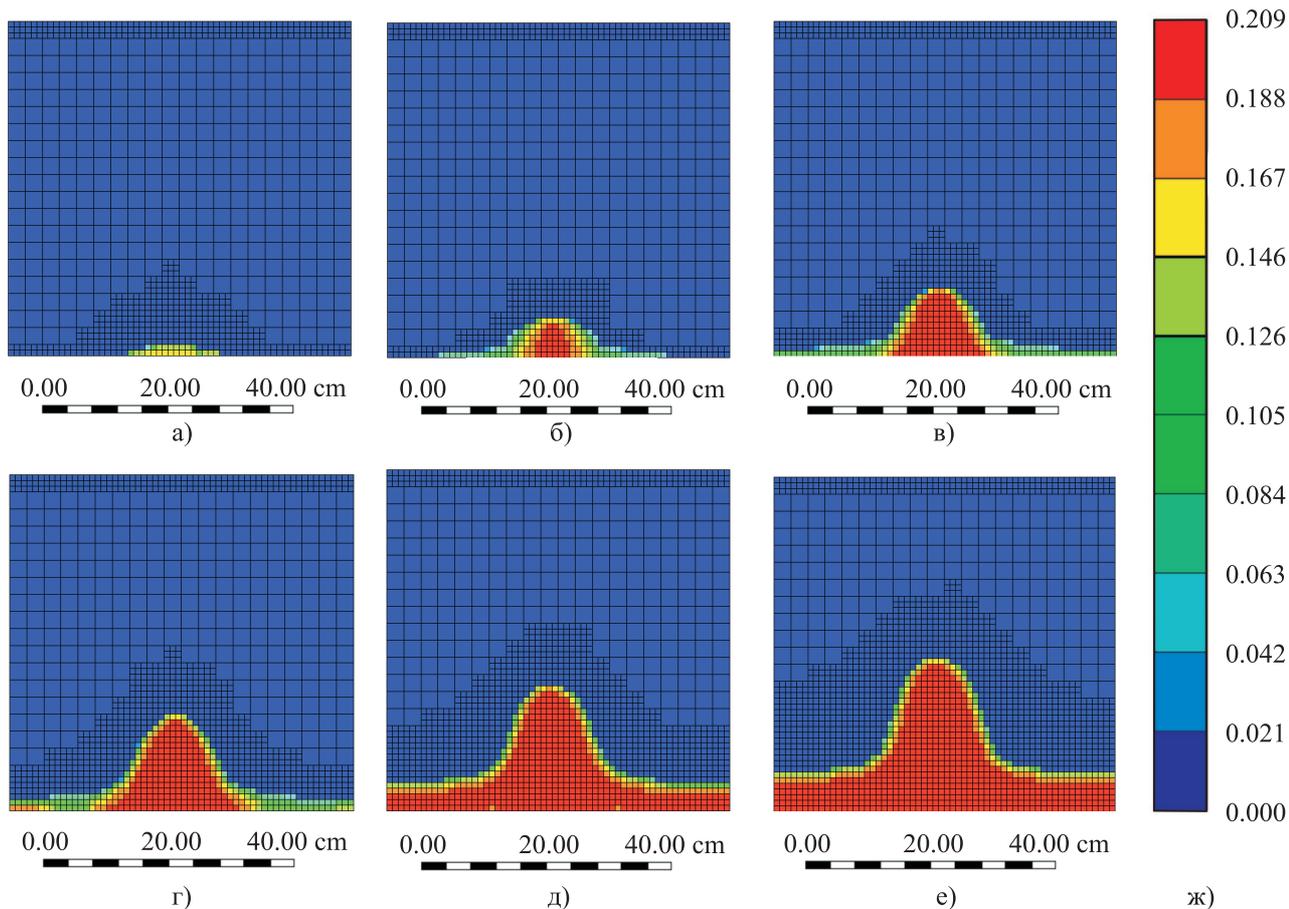


Рис. 6. Распределение молярной концентрации кислорода для 6 моментов времени: а) 10 суток, б) 20 суток, в) 30 суток, г) 40 суток, д) 50 суток, е) 65 суток, ж) молярная концентрация кислорода

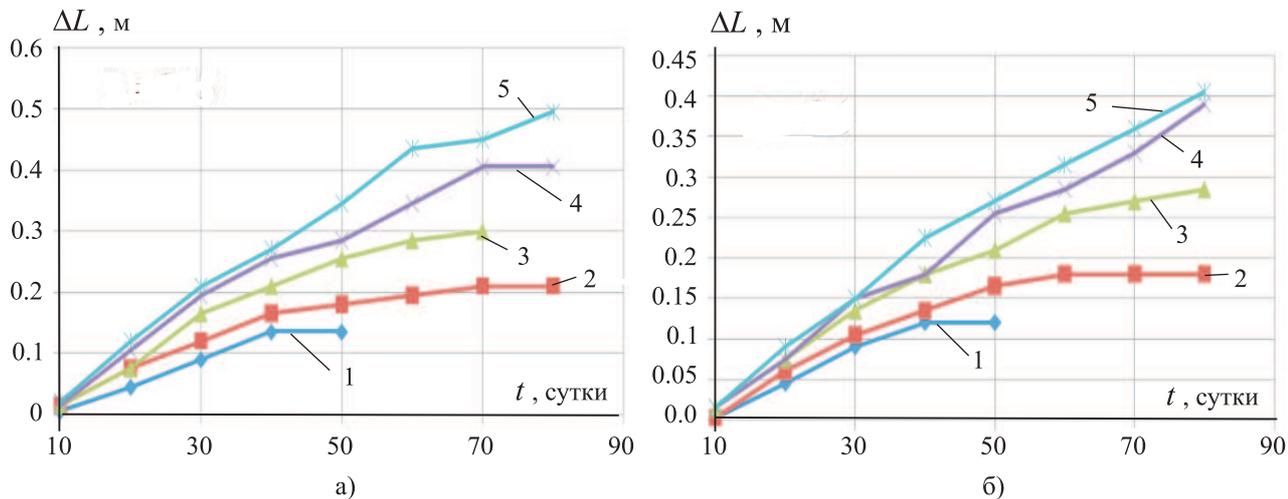


Рис. 7. Зависимости $\Delta L(t)$ при различных значениях параметров: а) $L = 0.25$, б) $L = 0.4$; p принимает значения: 1) 0.3, 2) 0.5, 3) 1, 4) 1.5 и 5) 2

фронт по направлению к добывающей скважине, динамику фронта окисления иллюстрирует серия рисунков (рис. 6). Заметна стабилизация формы фронта со временем, как и в модели РДА.

По результатам расчетов построены серии зависимостей ΔL от времени и ΔL_{\max} от $p = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$,

здесь p_1 и p_2 — проницаемости окружающей породы и полосы соответственно, а ΔL и ΔL_{\max} введены таким же образом, что и в четвертом разделе.

На рис. 7 изображены графики $\Delta L(t)$ для пяти значений $p = 0.3, 0.5, 1, 1.5$ и 2 и для двух значений $L = 0.25$ и 0.4 . Виден постепенный выход на максимально возможный уровень ΔL_{\max} , как и при решении уравнения РДА.

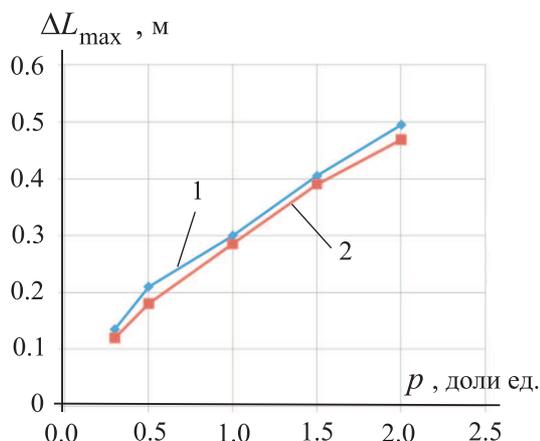


Рис. 8. Зависимость $\Delta L_{\max}(p)$ для двух значений L : 1) $L = 0.25$, 2) $L = 0.4$

Построена зависимость $\Delta L_{\max}(p)$ (рис. 8), которая также хорошо согласуется с результатами математического моделирования (рис. 4). Следует отметить качественное совпадение зависимостей; для того чтобы получить количественные оценки, параметр v необходимо нормировать соответствующим образом. Следовательно, можно сделать вывод, что поведение фронта горения аналогично поведению резких переходных слоев, возникающих в решении модели (1)–(3).

6. Выводы. Сопоставление динамики фронта окисления и движения резких переходных слоев в модели “реакция–диффузия–адвекция” показало хорошее соответствие результатов. Применение задачи РДА позволяет существенно упростить моделирование при сохранении точности, а оценки, полученные при помощи асимптотического анализа, позволяют еще более эффективно моделировать формирование и динамику фронта внутрипластового горения. Применение предлагаемых математических моделей, особенно вновь предложенной авторами модели уравнения локализации фронта, приводит к многократному сокращению времени расчета задач, описывающих движение фронта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боксерман А.А., Ямбаев М.Ф. Термогазовый метод повышения нефтеотдачи месторождений легкой нефти // Сб. науч. тр. ВНИИнефть. Вып. 129. Теория и практика разработки нефтяных месторождений. Москва, 2003. 14–21.
2. Akkutlu I.Y., Yortsos Y.C. The dynamics of combustion fronts in porous media // Combustion and Flame. 2003. **134**. 229–247.
3. Schulte W.M., de Vries A.S. In-situ combustion in naturally fractured heavy oil reservoirs // SPE J. **25**, N 1. 1985. 67–77.
4. Fadaei H., Quintard M., Debenest G., et al. How in-situ combustion process works in a fractured system: two dimensional, core and block scale simulation // SPE Int. Thermal Operations and Heavy Oil Symposium. Alberta, 2008. Paper Number 117645-MS.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефёдов Н.Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундамент. и прикл. матем. 1998. **4**. 799–851.
6. Бутузов В.Ф., Нефёдов Н.Н., Шнайдер К.Р. О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах // Вестник Моск. ун-та. Серия 3. Физика, Астрономия. 2005. № 1. 9–13.
7. Волков В.Т., Грачев Н.Е., Нефёдов Н.Н., Николаев А.Н. О формировании резких переходных слоев в двумерных моделях реакция-диффузия // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2007. **47**, № 8. 1356–1364.
8. Нефёдов Н.Н., Божевольнов Ю.В. Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. **50**, № 2. 276–285.

Поступила в редакцию
20.09.2010