УДК 519.6

ОДИН ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ НАБЛЮДЕНИЙ

И. В. Колос[1], М. В. Колос[1]

Предложен метод оптимизации структуры системы наблюдения, основанный на двойственности задач линейной оптимальной фильтрации и квадратичного управления. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10–01–00297а.

Ключевые слова: оптимизация, оптимальная фильтрация, квадратичное управление, обработка измерений, динамические системы.

При управлении динамической системой возникает необходимость в получении достоверной информации о ее состоянии и возможности автоматической (цифровой) обработки результатов измерений для принятия правильного решения о формировании управляющего сигнала. Часто приходится учитывать размерность векторов состояния и наблюдения, ограничения на количество наблюдений, на энергетические характеристики измерительных приборов и др. В связи с этим нужна оптимизация (в определенном смысле) наблюдательной системы.

Рассмотрим возможность оптимизации структуры наблюдений с использованием двойственности задач линейной оптимальной фильтрации и квадратичного управления.

Ниже используются обозначения пространств, трактовки уравнений и их решений, предложенные в [1, 2].Так, E_n — n-мерное евклидово пространство, $L_2[0,t]$ — пространство n-мерных вектор-функций, интегрируемых с квадратом на $[0,t]$ в смысле Лебега, $(W^1_{2t}[0,t], L_2[0,t], W^{-1}_{2t}[0,t])$ — оснащенное гильбертово пространство, $W^1_{2t}[0,t]$ — позитивное, а $W^{-1}_{2t}[0,t]$ — негативное пространства.

Пусть динамическая система описывается n-мерным векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{d\tau} = F(\tau)x(\tau) + G(\tau)u(\tau), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $u(\tau)$ — белый гауссовский шум с нулевым средним и корреляцией $M[u(\tau)u^{\mathrm{T}}(\sigma)] = Q(\tau)\delta(\tau-\sigma)$, а x_0 — гауссова случайная величина с нулевым средним и $M[x_0x_0^{\mathrm{T}}] = P_0$. Элементы матрицы $F(\tau)$ принадлежат пространству $L_2[0,t]$, а $G(\tau)$ и $Q(\tau)$ — дифференцируемые на $[0,t]$ функции. Решение и производная в (1) понимаются в обобщенном смысле [1, 2].

Наблюдается случайный процесс

$$r(\tau) = C(\tau)x(\tau) + v(\tau), \tag{2}$$

где $C(\tau)$ — детерминированная $(m\times n)$-матрица наблюдений с кусочно-непрерывными элементами, удовлетворяющая условиям наблюдаемости (система (1)–(2) вполне наблюдаема на интервале $[0,t]$, если матрица $M(0,t) = \int\limits_0^t \Phi^{\mathrm{T}}(\tau,t)C^{\mathrm{T}}(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t)\,d\tau$ невырожденная, где $\Phi(t,\tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (1) [2]); $v(\tau)$ — вырожденный белый гауссовский шум с нулевым средним и корреляцией

$$M[v(\tau)v^{\mathrm{T}}(\sigma)] = S(\tau)\delta(\tau-\sigma), \quad S(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\tau) \end{bmatrix},$$

$R(\tau)$ — симметрическая положительно определенная матрица порядка $m-q$, $q \leqslant m$ (при $q = m$ наблюдения не содержат шум).

Случайные процессы $u(\tau)$, $v(\tau)$ и случайный вектор x_0 не коррелированы между собой.

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва; И. В. Колос, доцент, e-mail: arush@srcc.msu.ru; М. В. Колос, ст. науч. сотр., e-mail: arush@srcc.msu.ru

Требуется определить оценку $\hat{x}(t)$ состояния $x(\tau)$ системы (1) в момент $\tau = t$, удовлетворяющую критерию

$$J(z,t) = \inf_h \Big\{ M[(z, x(t) - \hat{x}(t))^2_{E_n}] \, \hat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau) r(\tau)\, d\tau \Big\}. \tag{3}$$

Здесь нижняя грань берется по всем матрицам $h(t,\tau)$ с элементами из позитивного пространства $W^1_{2t}[0,t]$ и z — некоторый произвольный фиксированный вектор из E_n.

Решение задачи линейной оптимальной фильтрации (1)–(3) при наличии небелого шума в наблюдениях неустойчиво [1, 2]; поэтому для определения оптимальной оценки ее решения используем метод регуляризации А. Н. Тихонова [3].

Импульсная переходная матрица $h_\alpha(t,\tau)$, определяющая регуляризованную оценку состояния системы (1) $\hat{x}_\alpha(t) = \int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau) r(\tau)\, d\tau$, удовлетворяет регуляризованному уравнению Винера–Хопфа [1, 2]

$$K_x(t,\sigma) C^{\mathrm{T}}(\sigma) = \int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau) C(\tau) K_x(\tau,\sigma) C^{\mathrm{T}}(\sigma)\, d\tau + h_\alpha(t,\sigma) S_\alpha(\sigma), \tag{4}$$

где

$$K_x(\tau,\sigma) = M[x(\tau) x^{\mathrm{T}}(\sigma)], \quad S_\alpha(\tau) = \begin{bmatrix} \alpha I_q & 0 \\ 0 & \alpha I_{m-q} + R(\tau) \end{bmatrix},$$

I_q — единичная матрица порядка $q \leqslant m$ и $\alpha > 0$ — параметр регуляризации.

Этому уравнению соответствует регуляризованная задача линейного оценивания: состояние динамической системы описывается уравнением (1), а наблюдается процесс

$$r_\alpha(\tau) = C(\tau) x(\tau) + v_\alpha(\tau), \tag{5}$$

где $v_\alpha(\tau)$— белый гауссовский шум с нулевым средним и корреляцией $M[v_\alpha(\tau) v^{\mathrm{T}}_\alpha(\sigma)] = S_\alpha(\tau)\delta(\tau - \sigma)$.

Необходимо определить оценку $\hat{x}_\alpha(t)$ состояния $x(\tau)$ системы (1) в момент $\tau = t$, удовлетворяющую критерию

$$J_\alpha(z,t) = \inf_{h_\alpha} \Big\{ M[(z, x(t) - \hat{x}_\alpha(t))^2_{E_n}] \, \hat{x}_\alpha(t) = \int\limits_0^t h_\alpha(t,\tau) r_\alpha(\tau)\, d\tau \Big\}, \tag{6}$$

где нижняя грань берется по всем матрицам $h_\alpha(t,\tau)$ с элементами из пространства $W^1_{2t}[0,t]$ [1, 2].

Матрица ошибки оценивания имеет вид $P(t) = M[(x(t) - \hat{x}_\alpha(t))(x(t) - \hat{x}_\alpha(t))^{\mathrm{T}}]$, где $\hat{x}_\alpha(t)$ — наилучшая в среднеквадратическом смысле оценка состояния системы (1) в точке $\tau = t$ при измерениях (5). Матрица $P(t)$, как известно [1, 2], удовлетворяет уравнению Риккати

$$\begin{aligned} &\frac{dP(t)}{dt} = F(t)P(t) + P(t)F^{\mathrm{T}}(t) + G(t)Q(t)G^{\mathrm{T}}(t) - P(t)C(t)S^{-1}_\alpha C^{\mathrm{T}}(t)P(t), \\ &P(0) = P_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как $P(t)$ зависит от матрицы наблюдения $C(t)$, то можно поставить следующую задачу: минимизировать (в некотором смысле) $P(t)$ на множестве матриц $C(t)$, при которых система (1)–(2) наблюдаема. Решить эту задачу на множестве допустимых матриц наблюдения из-за нелинейности уравнения Риккати довольно сложно.

Введем n-мерную вектор-функцию $\varphi(\tau)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = -F^{\mathrm{T}}(\tau)\varphi(\tau) + C^{\mathrm{T}}(\tau) h^{\mathrm{T}}_\alpha(t,\tau) z, \quad \varphi(t) = z. \tag{8}$$

Пусть $\hat{x}(t) = \int\limits_0^t h(t,\tau) r_\alpha(\tau)\, d\tau$, где $h(t,\tau)$ — произвольная $(m \times n)$-матрица с элементами из позитивного пространства $W^1_{2t}[0,t]$; тогда [1, 2] справедливо соотношение

$$M[(z, x(t)-\hat{x}(t))^2_{E_n}] = (z, \mathcal{R}(t)z)_{E_n} = \\ = \varphi^{\mathrm{T}}(0)P_0\,\varphi(0) + \int\limits_0^t z^{\mathrm{T}} h(t,\tau)S_\alpha(\tau)h^{\mathrm{T}}(t,\tau)z\,d\tau + \int\limits_0^t \varphi^{\mathrm{T}}(\tau)G(\tau)Q(\tau)G^{\mathrm{T}}(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \equiv m(\varphi,h). \tag{9}$$

Сформулируем задачу управления с квадратичным критерием качества.

Пусть система управления моделируется дифференциальным уравнением (8), *где* $h^T(t,\tau)z$ *— управление. Требуется найти такой управляющий сигнал* $h^T(t,\tau)z$, *который будет минимизировать функционал* (9).

Для задачи линейной оптимальной фильтрации (1), (5), (6) и задачи квадратичного управления (8), (9) характерно то, что их решения — оптимальная импульсная переходная матрица фильтра и матрица, определяющая оптимальное управление, — удовлетворяют одному и тому же интегральному уравнению, а именно уравнению Винера–Хопфа (4).

В этом и заключается двойственность задачи линейного детерминированного управления с квадратичным критерием качества и задачи линейного оптимального оценивания.

Рассмотрим задачу: *минимизировать функционал* $m(\varphi,h) = m(\varphi,h,C)$ (*см.* (9)), *где* $\varphi(\tau)$ *удовлетворяет уравнению* (8), *на множестве матриц* $h(t,\tau)$ *с элементами из* $W^1_{2t}[0,t]$ *и матриц* $C(\tau)$ *с кусочно-гладкими элементами.*

Используем для решения этой задачи приближенно-аналитический метод решения матричного уравнения Винера–Хопфа [4–6].

Аппроксимируем матрицу $K_x(\tau,\sigma)$ матрицей вида $B^{\mathrm{T}}_N(\tau)A_N B_N(\sigma)$, где $B^{\mathrm{T}}_N(\tau) = [e_1(\tau)I_n,\ldots,e_N(\tau)I_n]$, $\{e_i(\tau)\}_{i=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $L_2[0,T]$, $0 < t \leqslant T < \infty$, I_n — единичная матрица порядка n; A_N — блочная квадратная матрица порядка nN, $A_N \equiv \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{N1} & K_{N2} & \ldots & K_{NN}\end{bmatrix}$, $A_N = A^{\mathrm{T}}_N$, K_{ij} — матрица, составленная из коэффициентов Фурье элементов матрицы $K_x(\tau,\sigma)$, $k^{pq}_{ij} = \int\limits_0^T\int\limits_0^T e_i(\tau)k^{pq}_x(\tau,\sigma)e_j(\sigma)\,d\tau d\sigma$, где $k^{pq}_x(\tau,\sigma)$ — элемент матрицы $K_x(\tau,\sigma)$, стоящий в p-й строке и q-м столбце, $p,q = 1,2,\ldots,n$, а k^{pq}_{ij} — элемент матрицы K_{ij}.

Теперь представим уравнение (4) следующим образом:

$$B^{\mathrm{T}}_N(t)A_N B_N(\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)S^{-1}_\alpha(\sigma) = \int\limits_0^t h_N(t,\tau)C(\tau)B^{\mathrm{T}}_N(\tau)A_N B_N(\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)S^{-1}_\alpha(\sigma)\,d\tau + h_N(t,\sigma). \tag{10}$$

Пусть $L_N(\sigma) = B_N(\sigma)C^{\mathrm{T}}(\sigma)$. Умножим (10) справа на $L^{\mathrm{T}}_N(\sigma)$ и проинтегрируем по σ от 0 до t. Тогда

$$B^{\mathrm{T}}_N(t)A_N\int\limits_0^t L_N(\sigma)S^{-1}_\alpha(\sigma)L^{\mathrm{T}}_N(\sigma)\,d\sigma = \\ = \int\limits_0^t h_N(t,\tau)L^{\mathrm{T}}_N(\tau)\,d\tau\,A_N\int\limits_0^t L_N(\sigma)S^{-1}_\alpha(\sigma)L^{\mathrm{T}}_N(\sigma)\,d\sigma + \int\limits_0^t h_N(t,\sigma)L^{\mathrm{T}}_N(\sigma)\,d\sigma. \tag{11}$$

Пусть $D_N(t) \equiv \int\limits_0^t L_N(\sigma)S^{-1}_\alpha(\sigma)L^{\mathrm{T}}_N(\sigma)\,d\sigma$, $D_N(t)$ — квадратная матрица порядка nN, $D_N(t) = D^{\mathrm{T}}_N(t)$, $D_N(t) > 0$ и $t > 0$ [6]. Тогда вместо (9) получим уравнение

$$B^{\mathrm{T}}_N(t)A_N D_N(t) = \int\limits_0^t h_N(t,\tau)L^{\mathrm{T}}_N(\tau)\,d\tau\,[I_{nN} + A_N D_N(t)]. \tag{12}$$

Решение уравнения (12) будем искать в виде

$$h_N(t,\tau)=\eta(t-\tau)B_N^{\mathrm{T}}(t)A_N D_N(t)Y(t)L_N(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau), \tag{13}$$

где $\eta(t-\tau)=\begin{cases}1, & \text{если } \tau\leqslant t,\\ 0, & \text{если } \tau>t.\end{cases}$, а $Y(t)$ — неизвестная матрица.

Подставляя выражение (13) в уравнение (12), получим соотношение

$$B_N^{\mathrm{T}}(t)A_N D_N(t)=B_N^{\mathrm{T}}(t)A_N D_N(t)Y_N(t)D_N(t)[A_N D_N(t)+I_{nN}].$$

Отсюда следует, что

$$Y_N(t)=[A_N D_N(t)+I_{nN}]^{-1}D_N^{-1}(t),$$

а приближенное значение оптимальной импульсной переходной матрицы имеет вид

$$h_N(t,\tau)=\eta(t-\tau)B_N^{\mathrm{T}}(t)A_N D_N(t)[A_N D_N(t)+I_{nN}]^{-1}D_N^{-1}(t)L_N(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau). \tag{14}$$

В [6] доказано, что при $N\to\infty$ последовательность $h_N(t,\tau)$ стремится к решению уравнения Винера–Хопфа (4): $h_N(t,\tau)\to h_\alpha(t,\tau)$, а следовательно, и к решению задачи линейной оптимальной фильтрации (1), (5), (6) и, соответственно, к решению задачи квадратичного управления (8), (9), а при $N\to\infty$ и $\alpha\to 0$ стремится к решению задачи (1)–(3).

Подставим (14) в (8) и (9) и получим

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}=-F^{\mathrm{T}}(\tau)\varphi(\tau)-C^{\mathrm{T}}(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)L_N(\tau)D_N^{-1}(t)[A_N D_N(t)+I_{nN}]^{-1}D_N(t)A_N B_N(t)z,\quad \varphi(t)=z; \tag{15}$$

$$\begin{aligned} m(\varphi,h_N)=m(\varphi,D_N)&=\varphi^{\mathrm{T}}(0)P_0\,\varphi(0)+\int_0^t \varphi^{\mathrm{T}}(\tau)G(\tau)Q(\tau)G^{\mathrm{T}}(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau+\\ &+z^{\mathrm{T}}B_N^{\mathrm{T}}(t)A_N D_N(t)[(A_N D_N(t))^{\mathrm{T}}+I_{nN}]^{-1}D_N^{-1}(t)\{[(A_N D_N(t))^{\mathrm{T}}+I_{nN}]^{-1}\}^{\mathrm{T}}D_N(t)A_N B_N(t)z. \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что критерий качества $m(\varphi,h_N)=m(\varphi,D_N)$ неявно зависит от матрицы $C(\tau)$, так как она входит в определение матрицы $D_N(t)=\int_0^t B_N(\tau)C^{\mathrm{T}}(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)C(\tau)B_N^{\mathrm{T}}(\tau)\,d\tau$. Исключим $C(\tau)$ из уравнения (15). Для этого умножим слева уравнение (15) на матрицу $B_N(\tau)$:

$$\begin{aligned} B_N(\tau)\,\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}&=-B_N(\tau)F^{\mathrm{T}}(\tau)\varphi(\tau)-\\ &-B_N(\tau)C^{\mathrm{T}}(\tau)S_\alpha^{-1}(\tau)L_N^{\mathrm{T}}(\tau)D_N^{-1}(t)[A_N D_N(t)+I_{nN}]^{-1}D_N(t)A_N B_N(t)z,\\ &\varphi(t)=z. \end{aligned}$$

Интегрируя полученное выражение от 0 до t и выбрав базис $\{e_i(\tau)\}_{i=1}^N$ так, что $e_i(0)=e_i(t)=0$, находим

$$-\int_0^t \frac{dB_N(\tau)}{d\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau+\int_0^t B_N(\tau)F^{\mathrm{T}}(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=-[A_N D_N(t)+I_{nN}]^{-1}D_N(t)A_N B_N(t)z.$$

Положим $\dfrac{dB_N(\tau)}{d\tau}-B_N(\tau)F^{\mathrm{T}}(\tau)\equiv H_N(\tau)$. Тогда получим выражение

$$\int_0^t H_N(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=[A_N D_N(t)+I_{nN}]^{-1}D_N(t)A_N B_N(t)z. \tag{17}$$

Используя (17), соотношение (16) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} m(\varphi,D_N)&=\varphi^{\mathrm{T}}(0)P_0\,\varphi(0)+\int_0^t \varphi^{\mathrm{T}}(\tau)G(\tau)Q(\tau)G^{\mathrm{T}}(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau+\\ &+\int_0^t\int_0^t \varphi^{\mathrm{T}}(\tau)H_N^{\mathrm{T}}(\tau)D_N^{-1}(\tau)H_N(\sigma)\varphi(\sigma)\,d\tau d\sigma. \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, для оптимизации структуры матрицы наблюдений получили следующую задачу: *минимизировать функционал* (16) *на множестве квадратных симметрических неотрицательно определенных матриц порядка* nN *при условии, что выполняется соотношение* (17) .

Для минимизации (18) можно использовать, например, конечно-разностный метод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белов Ю.А., Диденко В.П.* и др. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Обработка измерений при исследовании сложных систем. Т. 1. Киев: Наукова Думка, 1982.
2. *Колос М.В., Колос И.В.* Методы линейной оптимальной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. *Белов Ю.А., Диденко В.П. и др.* Математическое обеспечение сложного эксперимента. Математические модели при измерениях. Т. 2. Киев: Наукова Думка, 1983.
5. *Козлов Н.Н.* Приближенно-аналитический метод решения одного класса задач обработки измерений // Автометрия. 1981. № 6. 18–22.
6. *Колос И.В., Колос М.В.* О приближенно-аналитическом решении одной задачи фильтрации // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**. 332–337.

Поступила в редакцию
20.09.2010