УДК 519.6

МЕТОД ЧАСТИЧНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Д. А. Дябилкин[1], **И. В. Коннов**[1]

Рассматривается обобщенная прямо-двойственная система. Задача переформулируется в виде эквивалентного вариационного неравенства, основное отображение которого не обладает свойством монотонности и не является градиентом какой-либо функции. Для ее решения предлагается метод регуляризации по части переменных. Сходимость метода обосновывается при различных видах условия типа коэрцитивности. Приводится приложение метода для задачи экономического равновесия. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10–01–00629).

Ключевые слова: обобщенная прямо-двойственная система, немонотонное вариационное неравенство, метод частичной регуляризации, достаточные условия сходимости.

1. Введение. Многие задачи равновесного типа, возникающие в экономике, физике, транспорте и связи, могут быть сформулированы в виде обобщенной прямо-двойственной системы неравенств: найти пару точек $(x^*, y^*) \in X \times Y$, такую, что

$$f(x^*) + \{y^*, H(x^*)\} \leqslant f(x) + \{y^*, H(x)\} \qquad \forall x \in X, \tag{1}$$

$$\{B(y^*) - H(x^*), y - y^*\} \geqslant 0 \qquad \forall y \in Y, \tag{2}$$

где X и Y — некоторые непустые, выпуклые и замкнутые множества, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m_+$; $f\colon X \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция; $H\colon X \to \mathbb{R}^m$ — отображение с выпуклыми компонентами $H_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$; $B\colon Y \to \mathbb{R}^m$ — некоторое отображение (см., например, [1–3]). Нетрудно видеть, что в случае когда отображение B постоянно, т.е. $B(y) = B$, а $Y = \mathbb{R}^m_+$, система (1)–(2) в точности совпадает с соотношениями седловой точки функции Лагранжа

$$L(x, y) = f(x) + \{y, H(x) - B\},$$

определенной для задачи выпуклой оптимизации

$$\min_{x \in D} \to f(x), \tag{3}$$

где

$$D = \{x \in X \mid H_i(x) \leqslant B_i,\ i = 1, \ldots, m\}. \tag{4}$$

Поэтому, если (x^*, y^*) — решение системы (1)–(2) при $B(y) = B$, $Y = \mathbb{R}^m_+$, то x^* — решение задачи (3)–(4). Обратное утверждение требует условий регулярности и хорошо известно как теорема Каруша–Куна–Таккера (см., например, [4]). Таким образом, система (1)–(2) является обобщением обычной прямо-двойственной системы и позволяет охватить более широкий класс прикладных задач.

Заметим, что при дифференцируемости функций f и H_i неравенство (1) можно эквивалентно переписать в виде

$$\{f'(x^*) + \nabla H(x^*)^T y^*, x - x^*\} \geqslant 0 \qquad \forall x \in X.$$

Поэтому, обозначив $U = X \times Y$, $u = (x, y)$ и

$$G(u) = \begin{pmatrix} f'(x) + \nabla H(x)^T y \\ B(y) - H(x) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

систему (1)–(2) можно заменить вариационным неравенством: найти элемент $u^* \in U$, такой, что

$$\{G(u^*), u - u^*\} \geqslant 0 \qquad \forall u \in U. \tag{6}$$

---

[1] Казанский федеральный университет, факультет вычислительной математики и кибернетики, 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18; Д. А. Дябилкин, ассистент, e-mail: dmdyabilkin@mail.ru; И. В. Коннов, профессор, e-mail: ikonnov@ksu.ru

Во многих случаях отображение B не обладает свойством монотонности, поэтому и отображение G будет немонотонным, а значит задача (1)–(2) (или (5)–(6)) не сводится к поиску седловых точек выпукло-вогнутой функции. Более того, из-за наличия кососимметрической части отображение G не может быть градиентом никакой функции. Поэтому обычные методы решения монотонных вариационных неравенств, минимизации функций, а также поиска седловых точек не могут быть использованы для решения задачи (1)–(2) (или (5)–(6)).

В работе [2] для таких задач был предложен метод частичной регуляризации в сочетании с методом спуска по двойственным переменным, который был в дальнейшем развит в [5], где было получено существенное ослабление условий сходимости. В настоящей статье этот подход применяется для достаточно широкого класса моделей равновесия в экономике, включающего в себя, в частности, так называемую модель PIES (Project-Independent Evaluation System), которая была разработана для прогнозирования спроса на топливном рынке США [6, 7]. На этой основе предлагаются итерационные методы типа регуляризации и обосновывается их сходимость при достаточно общих предположениях.

2. Модель экономического равновесия с линейной технологией производства. Рассмотрим модель рынка, на котором производственный сектор производит s товаров с помощью l видов ресурсов и t видов технологий. В заданном периоде времени запасы ресурсов фиксированы и определяются вектором $b \in \mathbb{R}^l_+$, матрица A размерности $l \times t$ задает нормы расхода ресурсов на единицу интенсивности технологий, матрица A_d размерности $s \times t$ задает нормы выпуска товаров на единицу интенсивности технологий. Далее, если задан вектор интенсивностей $x \in \mathbb{R}^t_+$, то величина затрат (издержек) определяется как значение функции $f(x)$, Ax определяет вектор затрат ресурсов, $A_d x$ — вектор выпуска товаров. Если $v \in \mathbb{R}^s_+$ — вектор цен товаров, то спрос на товары определяется как значение отображения $Q(v)$, вектор $p \in \mathbb{R}^l_+$ определяет цены на ресурсы. Будем считать, что известны допустимые множества интенсивностей $\tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^t_+$, цен ресурсов $P \subseteq \mathbb{R}^l_+$ и цен товаров $V \subseteq \mathbb{R}^s_+$. Задача равновесия будет состоять в том, чтобы найти тройку $(x^*, p^*, v^*) \in \tilde{X} \times P \times V$, такую, что

$$f(x) - f(x^*) + \{A^T p^* - A_d^T v^*, x - x^*\} \geqslant 0 \qquad \forall x \in \tilde{X}, \tag{7}$$

$$\{b - Ax^*, p - p^*\} \geqslant 0 \qquad \forall p \in P, \tag{8}$$

$$\{A_d x^* - Q(v^*), v - v^*\} \geqslant 0 \qquad \forall v \in V. \tag{9}$$

Предположим также, что $f\colon \mathbb{R}^t_+ \to \mathbb{R}$ — выпуклая дифференцируемая функция. Тогда вместо (7) можно использовать эквивалентное вариационное неравенство

$$\{f'(x^*) + A^T p^* - A_d^T v^*, x - x^*\} \geqslant 0 \qquad \forall x \in \tilde{X}. \tag{10}$$

Заметим, что условие (7) (или (10)) определяет равновесие между затратами и доходами для данного набора (x^*, p^*, v^*), в то время как (8) и (9) представляют собой обычные условия равновесия на основе избыточного предложения для ресурсов и для производимых товаров соответственно. Отметим, что модель PIES соответствует случаю, когда $\tilde{X} = \mathbb{R}^t_+$, $P = \mathbb{R}^l_+$ и $V = \mathbb{R}^s_+$, при этом монотонность отображения негативного спроса $-Q$ обычно не обеспечивается [6, 7]. Нетрудно видеть, что система (7)–(9) является частным случаем системы (1)–(2), где $n = t$, $m = l + s$, $X = \tilde{X}$, $Y = P \times V$, $y = (p, v)$,

$$H(x) = \begin{pmatrix} Ax \\ -A_d x \end{pmatrix}, \qquad B(y) = \begin{pmatrix} b \\ -Q(v) \end{pmatrix};$$

поэтому она также сводится к вариационному неравенству (6), где $u = (x, p, v)$,

$$G(u) = \begin{pmatrix} f'(x) + A^T p - A_d^T v \\ b - Ax \\ A_d x - Q(v) \end{pmatrix}, \qquad U = \tilde{X} \times P \times V.$$

Для случая $P = \mathbb{R}^l_+$ можно получить другую форму записи системы (7)–(9) в виде (1)–(2) (или (6)). А именно, рассмотрим задачу: найти пару $(x^*, v^*) \in X \times V$, такую, что

$$f(x) - f(x^*) - \{A_d^T v^*, x - x^*\} \geqslant 0 \qquad \forall x \in X, \tag{11}$$

$$\{A_d x^* - Q(v^*), v - v^*\} \geqslant 0 \qquad \forall v \in V, \tag{12}$$

где

$$X = \{x \in \tilde{X} \mid Ax \leqslant b\}. \tag{13}$$

Действительно, при сделанных предположениях и любом $v^* \in V$ точка x^* является решением задачи оптимизации (11) тогда и только тогда, когда существует вектор $p^* \in \mathbb{R}^l_+$, такой, что выполняются соотношения (7)–(8) согласно одному из вариантов теоремы Каруша–Куна–Таккера (см., например, [4]). Отметим, что задача (11) может быть при этом также заменена эквивалентным вариационным неравенством

$$\{f'(x^*) - A_d^T v^*, x - x^*\} \geqslant 0 \qquad \forall x \in X. \tag{14}$$

Очевидно, что система (11)–(13) также является частным случаем системы (1)–(2), где $m = s$, $Y = V$, $y = v$, $H(x) = -A_d x$ и $B(y) = -Q(v)$, множество X определено в (13). Поэтому она также сводится к вариационному неравенству (6), где $u = (x, v)$,

$$G(u) = \begin{pmatrix} f'(x) - A_d^T v \\ A_d x - Q(v) \end{pmatrix}, \qquad U = X \times V.$$

Теперь обратимся к системе (7)–(9) в условиях модели PIES, т.е. когда $\tilde{X} = \mathbb{R}^t_+$, $P = \mathbb{R}^l_+$ и $V = \mathbb{R}^s_+$. Если при этом предположить, что оптимальное значение спроса на товары $q^* = Q(v^*)$ известно, то система (7)–(9) представляет собой набор необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи минимизации издержек при ограничениях на спрос и ресурсы:

$$\min \to f(x) \tag{15}$$

при условиях

$$Ax \leqslant b, \quad A_d x \geqslant q^*, \quad x \geqslant 0;$$

см. [7].

Итак, решение системы (7)–(9) или (11)–(13) представляет особую сложность, поскольку, с одной стороны, отображение G непотенциально (т.е. не является градиентом некоторой функции), а с другой стороны, немонотонно из-за отсутствия такого свойства у отображения $-Q$. Поэтому для решения таких систем необходимо разрабатывать специальные методы.

3. Частичная регуляризация для немонотонного вариационного неравенства. Для построения методов решения систем (1)–(2), (7)–(9) и (11)–(13) используем методы частичной регуляризации для вариационного неравенства (6) при следующем основном условии:

(B1) *U — непустое, выпуклое и замкнутое множество в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$, $u = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, а $G\colon U \to \mathbb{R}^{n+m}$ — некоторое непрерывное отображение.*

Метод частичной регуляризации для этой задачи состоит в построении последовательности аппроксимаций: найти точку $u^\varepsilon = (x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in U$, такую, что

$$\{G(u^\varepsilon), u - u^\varepsilon\} + \varepsilon\{x^\varepsilon, x - x^\varepsilon\} \geqslant 0 \qquad \forall u \in U, \tag{16}$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризации. В [5] для обоснования сходимости последовательности $\{u^\varepsilon\}$ использовалась ограниченность множества

$$U_y = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in U\}$$

и следующее условие:

(A1) *Существует непустое компактное множество $D \subseteq U$, такое, что для любой точки $u \in U \setminus D$ найдется точка $\bar{u} \in D$, такая, что*

$$\{G(u), \bar{u} - u\} \leqslant 0.$$

Тогда получаем следующий результат (см. [5, теорема 2]).

Предложение 1. *Пусть выполняются условия* (B1) *и* (A1)*, множество U_y ограничено. Тогда верно следующее:*

а) задача (6) *имеет решение,*

б) при любом $\varepsilon > 0$ задача (16) *имеет решение,*

в) любая последовательность $\{u^k\}$, такая, что $\|u^{\varepsilon_k} - u^k\| \leqslant \eta_k$, $\{\eta_k\} \to 0$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$, имеет предельные точки и все они являются решениями задачи (6).

Теперь рассмотрим усиленный вариант условия (A1).

(A2) *Существуют компактное множество $D \subseteq U$ и точка $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in D$, такие, что для любой точки $u \in U \setminus D$ выполняется*

$$\{G(u), \bar{u} - u\} < 0.$$

В этом случае можно получить дополнительные свойства задачи (6).

Предложение 2. *Пусть выполняются условия* (B1) *и* (A2), *тогда задача* (6) *имеет решение и все ее решения находятся в множестве D.*

Доказательство. Действительно, существование решения задачи (6) следует, например, из [8, предложение 2]. С другой стороны, из (A2) получаем, что любое решение задачи (6) не может находиться вне D. □

Вместе с условием (A2) будем рассматривать метод регуляризации: найти $u^\varepsilon = (x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in U$, такое, что

$$\{G(u^\varepsilon), u - u^\varepsilon\} + \varepsilon\{x^\varepsilon - \bar{x}, x - x^\varepsilon\} \geqslant 0 \qquad \forall u \in U. \tag{17}$$

Покажем существование решения задачи (17) при условии (A2).

Предложение 3. *Пусть выполняются условия* (B1) *и* (A2), *тогда задача* (17) *имеет решение при любом $\varepsilon > 0$ и все решения лежат в D.*

Доказательство. Итак, существуют компактное множество $D \subseteq U$ и точка $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in D$, такие, что для любой точки $u = (x, y) \in U \setminus D$ выполняется

$$\{G(u), \bar{u} - u\} + \varepsilon\{x - \bar{x}, \bar{x} - x\} < -\varepsilon\|x - \bar{x}\|^2 \leqslant 0.$$

Тогда условие (A2) выполняется для эквивалентного (17) вариационного неравенства: найти $u^\varepsilon \in U$, такое, что

$$\{S^\varepsilon(u^\varepsilon), u - u^\varepsilon\} \geqslant 0 \qquad \forall u \in U, \tag{18}$$

где отображение $S^\varepsilon : U \to \mathbb{R}^{n+m}$ определяется в виде

$$S^\varepsilon(u) = G(u) + \begin{pmatrix} \varepsilon(x - \bar{x}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отображение S^ε непрерывно при непрерывности G, поэтому задача (18) удовлетворяет также условию (B1). Применяя предложение 2, получаем, что задача (18) (или (17)) имеет решение и все эти решения лежат в D. □

Установим условия сходимости метода регуляризации с приближенным решением задачи (17).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (B1) *и* (A2). *Тогда верно следующее:*

а) задача (6) *имеет решение и все ее решения лежат в D,*

б) при любом $\varepsilon > 0$ задача (17) *имеет решение и все ее решения лежат в D,*

в) любая последовательность $\{u^k\}$, такая, что $\|u^{\varepsilon_k} - u^k\| \leqslant \eta_k$, $\{\eta_k\} \to 0$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$, имеет предельные точки и все они являются решениями задачи (6).

Доказательство. Утверждения *а)* и *б)* следуют из предложений 2 и 3 соответственно. Докажем утверждение *в)*. Возьмем произвольную последовательность $\{u^{\varepsilon_k}\}$, согласно утверждению *б)* она корректно определена и ограничена. Тогда она имеет предельные точки, причем в силу замкнутости D они лежат в D. Пусть u^* — произвольная предельная точка последовательности $\{u^{\varepsilon_k}\}$, т.е. существует подпоследовательность $\{u^{\varepsilon_{k_s}}\} \to u^*$, $\{\varepsilon_{k_s}\} \to 0$ при $s \to \infty$. Выберем произвольное $u \in U$, тогда выполняется

$$\{G(u^{\varepsilon_{k_s}}), u - u^{\varepsilon_{k_s}}\} + \varepsilon_{k_s}\{x^{\varepsilon_{k_s}} - \bar{x}, x - x^{\varepsilon_{k_s}}\} \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $s \to \infty$, имеем

$$\{G(u^*), u - u^*\} \geqslant 0$$

для произвольного $u \in U$, т.е. u^* — решение задачи (6), принадлежащее D.

Возьмем теперь последовательность $\{u^k\}$. Она ограничена в силу ограниченности $\{u^{\varepsilon_k}\}$. Покажем, что каждая предельная точка $\{u^k\}$ будет предельной точкой соответствующей последовательности $\{u^{\varepsilon_k}\}$. Пусть $\{u^{k_s}\} \to u'$ при $s \to \infty$, тогда

$$\|u^{\varepsilon_{k_s}} - u'\| \leqslant \|u^{\varepsilon_{k_s}} - u^{k_s}\| + \|u^{k_s} - u'\| \leqslant \eta_{k_s} + \|u^{k_s} - u'\| \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Таким образом, u' — решение задачи (6). □

Рассмотрим еще одно условие типа коэрцитивности.

(A3) *Существует точка* $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in U$, *такая, что*

$$\{G(u), \bar{u} - u\} \to -\infty \quad \textit{при} \quad \|u\| \to \infty, u \in U.$$

Покажем, что условие (A3) является усилением условия (A2).

Лемма. *Условие* (A3) *влечет условие* (A2).

Доказательство. Докажем, что множество

$$P = \{u \in U \mid \{G(u), \bar{u} - u\} \geqslant 0\}$$

ограничено. Действительно, в противном случае существовала бы последовательность $\{u^k\}$, такая, что $\|u^k\| \to \infty$ при $k \to \infty$, $u^k \in P$. Тогда из условия (A3) получаем, что при достаточно больших k выполняется $\{G(u^k), \bar{u} - u^k\} < 0$. Это противоречит принадлежности u^k множеству P, следовательно, P ограничено. Тогда условие (A2) выполняется, если в качестве D взять компактное множество, содержащее P. □

Обоснуем метод регуляризации (16) при условии (A3).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (B1) *и* (A3), *тогда верно следующее:*

а) задача (6) *имеет решение и все ее решения лежат в ограниченном множестве,*

б) при любом $\varepsilon > 0$ *задача* (16) *имеет решение и все ее решения лежат в ограниченном множестве* $D(\varepsilon) = \{u \in U \mid \{G(u), \bar{u} - u\} + \varepsilon\|\bar{x}\|^2/4 \geqslant 0\}$,

в) любая последовательность $\{u^k\}$, *такая, что* $\|u^{\varepsilon_k} - u^k\| \leqslant \eta_k$, $\{\eta_k\} \to 0$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$, *имеет предельные точки и все они являются решениями задачи* (6).

Доказательство. Утверждение *а)* следует из приведенной выше леммы и предложения 2. Докажем утверждение *б)*. Обозначим

$$F^\varepsilon(u) = G(u) + \begin{pmatrix} \varepsilon x \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{aligned}\{F^\varepsilon(u), \bar{u} - u\} &= \{G(u), \bar{u} - u\} + \varepsilon\{x, \bar{x} - x\} \leqslant \\ &\leqslant \{G(u), \bar{u} - u\} + \varepsilon\|x\|(\|\bar{x}\| - \|x\|) \leqslant \{G(u), \bar{u} - u\} + \varepsilon\|\bar{x}\|^2/4,\end{aligned}$$

поскольку вогнутая функция $\varphi(t) = \varepsilon t(\|\bar{x}\| - t)$ достигает максимума при $t_{\max} = \|\bar{x}\|/2$ и $\varphi(t_{\max}) = \varepsilon\|\bar{x}\|^2/4$. Поэтому $\{F^\varepsilon(u), \bar{u} - u\} < 0$ при $u \notin D(\varepsilon)$. Теперь из (A3) следует, что множество $D(\varepsilon)$ ограничено, более того, выполняется условие (A2) для вариационного неравенства (16), где $D = D(\varepsilon)$, и утверждение *б)* следует из предложения 2.

Обратимся к утверждению *в)*. Поскольку $D(\varepsilon') \subseteq D(\varepsilon'')$ при $0 \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon''$, то последовательность $\{u^{\varepsilon_k}\}$ содержится в ограниченном множестве $D(\varepsilon_0)$. Поэтому она имеет предельные точки, которые содержатся в множестве $D(\varepsilon_0)$. Пусть u^* — произвольная предельная точка последовательности $\{u^{\varepsilon_k}\}$, т.е. существует подпоследовательность $\{u^{\varepsilon_{k_s}}\} \to u^*$, $\{\varepsilon_{k_s}\} \to 0$ при $s \to \infty$. Выберем произвольное $u \in U$, тогда выполняется

$$\{G(u^{\varepsilon_{k_s}}), u - u^{\varepsilon_{k_s}}\} + \varepsilon_{k_s}\{x^{\varepsilon_{k_s}}, x - x^{\varepsilon_{k_s}}\} \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $s \to \infty$, имеем

$$\{G(u^*), u - u^*\} \geqslant 0,$$

т.е. u^* — решение задачи (6).

Используя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 1, получаем, что последовательность $\{u^k\}$ также ограничена, а ее предельные точки совпадают с предельными точками последовательности $\{u^{\varepsilon_k}\}$ и, следовательно, будут решениями задачи (6). □

4. Частичная регуляризация обобщенной прямо-двойственной системы неравенств. Перечислим основные требования для системы (1)–(2).

(B2) $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m_+$ — *непустые, выпуклые и замкнутые множества;* $f\colon X \to \mathbb{R}$ — *выпуклая дифференцируемая функция;* $H\colon X \to \mathbb{R}^m$ — *отображение, такое, что его компоненты* $H_i\colon X \to \mathbb{R}$,

$i = 1, \ldots, m$, являются выпуклыми дифференцируемыми функциями; $B\colon Y \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение.

Отметим, что в отличие от работ [2, 5] здесь не требуется, чтобы отображение B было градиентом некоторой функции. Можно видеть, что выполнение условий (B2) для системы (1)–(2) влечет выполнение условия (B1) для вариационного неравенства (5)–(6).

В силу выпуклости f и H_i справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \{G(u), \bar u - u\} &= \{f'(x) + \nabla H(x)^T y, \bar x - x\} + \{B(y) - H(x), \bar y - y\} \leqslant \\ &\leqslant f(\bar x) - f(x) + \{y, H(\bar x) - H(x)\} + \{B(y), \bar y - y\} - \{H(x), \bar y - y\} = \\ &= f(\bar x) - f(x) + \{y, H(\bar x)\} - \{\bar y, H(x)\} + \{B(y), \bar y - y\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Случай, когда множество Y ограничено, рассматривался в [5] со следующим условием коэрцитивности.

(C1) *Существует непустое компактное множество $X_1 \subseteq X$, такое, что для любой точки $u = (x, y) \in (X \setminus X_1) \times Y$ найдется точка $\bar u = (\bar x, \bar y) \in X_1 \times Y$, такая, что*

$$f(\bar x) - f(x) + \{y, H(\bar x)\} - \{\bar y, H(x)\} + \{B(y), \bar y - y\} \leqslant 0.$$

Действительно, взяв множество $D = X_1 \times Y$ и учитывая (19), получим, что условие (C1) для системы (1)–(2) влечет условие (A1) для неравенства (5)–(6). Метод регуляризации (16) для системы (1)–(2) примет вид: найти точку $u^\varepsilon = (x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in X \times Y$, такую, что

$$f(x^\varepsilon) + 0.5\varepsilon\|x^\varepsilon\|^2 + \{y^\varepsilon, H(x^\varepsilon)\} \leqslant f(x) + 0.5\varepsilon\|x\|^2 + \{y^\varepsilon, H(x)\} \qquad \forall x \in X, \tag{20}$$

$$\{B(y^\varepsilon) - H(x^\varepsilon), y - y^\varepsilon\} \geqslant 0 \qquad \forall y \in Y, \tag{21}$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризации. Неравенство (20) есть задача минимизации выпуклой функции $f(x) + 0.5\varepsilon\|x\|^2 + \{y^\varepsilon, H(x)\}$ на множестве X, необходимым и достаточным условием оптимальности точки $x^\varepsilon \in X$ будет

$$\{f'(x^\varepsilon) + \varepsilon x^\varepsilon + \nabla H(x^\varepsilon)^T y^\varepsilon, x - x^\varepsilon\} \geqslant 0 \qquad \forall x \in X. \tag{22}$$

Система (21), (22), очевидно, эквивалентна вариационному неравенству (16). Из предложения 1 вытекает (см. [5, теорема 3])

Следствие 1. *Пусть выполняются условия* (B2) *и* (C1), *множество Y ограничено. Тогда верно следующее:*

а) система (1)–(2) *имеет решение,*

б) система (20)–(21) *имеет решение при любом $\varepsilon > 0$,*

в) любая последовательность $\{u^k\}, u^k = (x^k, y^k)$, такая, что $\|u^k - u^{\varepsilon_k}\| \leqslant \eta_k$, $u^{\varepsilon_k} = (x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k})$, $\{\eta_k\} \to 0$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$, имеет предельные точки и все они являются решениями системы (1)–(2).

Для обеспечения выполнения условия (C1) можно использовать следующее более просто проверяемое соотношение (условие A5 в [5]).

(C2) *Существует точка $y' \in Y$, такая, что*

$$f(x) + \{y', H(x)\} \to +\infty \quad \textit{при} \quad \|x\| \to \infty, \quad x \in X.$$

Покажем, что условие (C2) влечет условие (C1). Выберем произвольную точку $x' \in X$. В силу ограниченности множества Y и непрерывности отображения B выполняется

$$\sup_{y \in Y} \{f(x') + \{y, H(x')\} + \{B(y), y' - y\}\} \leqslant \gamma < \infty.$$

Определим множество

$$X_2 = \{x \in X \mid f(x) + \{y', H(x)\} \leqslant \gamma\}.$$

Заметим, что множество X_2 компактно, $x' \in X_2$. Тогда для произвольного $u = (x, y) \in (X \setminus X_2) \times Y$ возьмем $\bar u = (x', y') \in X_2 \times Y$ и получим

$$\begin{aligned} \{G(u), \bar u - u\} &\leqslant f(x') + \{y, H(x')\} + \{B(y), y' - y\} - f(x) - \{y', H(x)\} \leqslant \\ &\leqslant \gamma - f(x) - \{y', H(x)\} < 0, \end{aligned}$$

т.е. условие (C2) влечет (C1).

Теперь обратимся к случаю, когда множество Y может быть неограниченным.

(C3) *Существуют непустые компактные множества* $X_1 \subseteq X$ *и* $Y_1 \subseteq Y$ *и точка* $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in X_1 \times Y_1$, *такие, что для любой точки* $u = (x, y) \in (X \times Y) \setminus (X_1 \times Y_1)$ *выполняется*

$$f(\bar{x}) - f(x) + \{y, H(\bar{x})\} - \{\bar{y}, H(x)\} + \{B(y), \bar{y} - y\} < 0.$$

Очевидно, что условие (C3) более сильное, чем (C1), при этом в силу (19) из (C3) следует (A2), где отображение G определено в (5). Поэтому можно использовать метод регуляризации (17), вспомогательная задача которого применительно к системе (1)–(2) примет вид: найти точку $u^\varepsilon = (x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in X \times Y$, такую, что

$$f(x^\varepsilon) + 0.5\varepsilon\|x^\varepsilon - \bar{x}\|^2 + \{y^\varepsilon, H(x^\varepsilon)\} \leqslant f(x) + 0.5\varepsilon\|x - \bar{x}\|^2 + \{y^\varepsilon, H(x)\} \qquad \forall x \in X, \tag{23}$$

$$\{B(y^\varepsilon) - H(x^\varepsilon), y - y^\varepsilon\} \geqslant 0 \qquad \forall y \in Y. \tag{24}$$

Используя теорему 1, получаем

Следствие 2. *Пусть выполняются условия* (B2) *и* (C3). *Тогда верно следующее:*

а) система (1)–(2) *имеет решение,*

б) система (23)–(24) *имеет решение при любом* $\varepsilon > 0$,

в) любая последовательность $\{u^k\}, u^k = (x^k, y^k)$, *такая, что* $\|u^k - u^{\varepsilon_k}\| \leqslant \eta_k$, $u^{\varepsilon_k} = (x^{\varepsilon_k},\ y^{\varepsilon_k})$, $\{\eta_k\} \to 0$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$, *имеет предельные точки и все они являются решениями системы* (1)–(2).

Если система (1)–(2) есть обобщение задачи оптимизации (3)–(4), например случай модели PIES (15), то Y — множество множителей Лагранжа, и будет естественным предположение $0 \in Y$. Рассмотрим следующий набор условий.

(C4) *Существует точка* $\bar{x} \in X$, *такая, что* $H(\bar{x}) \leqslant 0$; $f(x) \to +\infty$ *при* $\|x\| \to \infty$, $x \in X$; $0 \in Y$; $\{B(y), y\} \to +\infty$ *при* $\|y\| \to \infty$, $y \in Y$.

Учитывая (19), из (C4) получаем при $\bar{u} = (\bar{x}, 0) \in X \times Y$:

$$\begin{aligned}\{G(u), \bar{u} - u\} &\leqslant f(\bar{x}) - f(x) + \{y, H(\bar{x})\} - \{\bar{y}, H(x)\} + \{B(y), \bar{y} - y\} \leqslant \\ &\leqslant f(\bar{x}) - f(x) + \{y, H(\bar{x})\} - \{B(y), y\} \leqslant \\ &\leqslant f(\bar{x}) - f(x) - \{B(y), y\}.\end{aligned}$$

Поэтому из (C4) следует (C3), а также (A2) для отображения G из (5), и справедливы утверждения следствия 2 при замене (C3) на (C4). Кроме того, из (C4) теперь следует и (A3), где G определено в (5), и можно применить метод (20)–(21) на основе теоремы 2.

Следствие 3. *Пусть выполняются условия* (B2) *и* (C4). *Тогда верно следующее:*

а) система (1)–(2) *имеет решение,*

б) система (20)–(21) *имеет решение при любом* $\varepsilon > 0$,

в) любая последовательность $\{u^k\}$, $u^k = (x^k, y^k)$, *такая, что* $\|u^k - u^{\varepsilon_k}\| \leqslant \eta_k$, $u^{\varepsilon_k} = (x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k})$, $\{\eta_k\} \to 0$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$, *имеет предельные точки и все они являются решениями системы* (1)–(2).

Отметим, что условия (C4) достаточно легко проверяемы и соответствуют коэрцитивности функции f и отображения B. Далее, задачи (20) и (23) при фиксированном векторе y^ε являются задачами минимизации сильно выпуклой функции на выпуклом множестве X и поэтому имеют единственное решение $x^\varepsilon(y)$. Подставив это решение в (21) (или (24)), получим двойственное вариационное неравенство: найти $y^\varepsilon \in Y$, такое, что

$$\{B(y^\varepsilon) + T(y^\varepsilon), y - y^\varepsilon\} \geqslant 0 \qquad \forall y \in Y,$$

где $T(y^\varepsilon) = -H(x(y^\varepsilon))$, которое при потенциальности B представляет собой необходимое условие оптимальности в задаче оптимизации; следовательно, его решение может быть найдено одним из методов спуска; см. [2–5, 9].

5. Приложение к задаче равновесия с линейной технологией. Рассмотрим в качестве примера некоторые приложения описанных вариантов метода регуляризации к задаче экономического равновесия из раздела 2. Будем предполагать при этом, что $f\colon \mathbb{R}^t_+ \to \mathbb{R}$ — выпуклая дифференцируемая функция, $Q\colon \mathbb{R}^s_+ \to \mathbb{R}^s$ — непрерывное отображение, множества $\tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^t_+$, $P \subseteq \mathbb{R}^l_+$ и $V \subseteq \mathbb{R}^S_+$ являются непустыми, выпуклыми и замкнутыми.

Вначале применим методы регуляризации для системы (11)–(13). Предположим дополнительно, что множество V ограничено, множество X непусто, существует точка $v' \in V$, такая, что

$$f(x) - \{A_d^T v', x\} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|x\| \to \infty, \quad x \in X.$$

Тогда выполняется условие (C2) для системы (11)–(13), а значит, и условие (C1), поэтому справедливы утверждения следствия 1. Тогда система (11)–(13) имеет решение; для любого $\varepsilon > 0$ существуют $(x^\varepsilon, v^\varepsilon) \in X \times V$, такие, что

$$\begin{aligned} &f(x) - f(x^\varepsilon) + 0.5\varepsilon(\|x\|^2 - \|x^\varepsilon\|^2) - \{A_d^T v^\varepsilon, x - x^\varepsilon\} \geqslant 0 && \forall x \in X, \\ &\{A_d x^\varepsilon - Q(v^\varepsilon), v - v^\varepsilon\} \geqslant 0 && \forall v \in V \end{aligned}$$

(ср. (20)–(21)); любая последовательность $\{u^k\}$, $u^k = (x^k, y^k)$, такая, что $\|u^k - u^{\varepsilon_k}\| \leqslant \eta_k$, $u^{\varepsilon_k} = (x^{\varepsilon_k}, v^{\varepsilon_k})$, $\{\eta_k\} \to 0$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$, имеет предельные точки и все они являются решениями системы (11)–(13), т.е. и системы (7)–(9).

Теперь предположим, что множество X непусто и ограничено, для точки минимума $\bar{x}$ функции f на множестве X выполняется $A_d\bar{x} \geqslant q > 0$ и что существует ограниченное множество $V_1 \subseteq V$, такое, что $0 \in V_1$ и $Q(v) \leqslant q' \leqslant q$ при $v \in V \setminus V_1$. Покажем, что тогда выполняется условие (C3) для системы (11)–(13) при $\bar{u} = (\bar{x}, 0)$, $X_1 = X$, $Y_1 = V_1$. Действительно, если выбрать любую пару $(x, v) \in X \times (V \setminus V_1)$, то

$$f(\bar{x}) - f(x) - \{v, A_d\bar{x}\} + \{0, A_d x\} - \{Q(v), 0 - v\} = f(\bar{x}) - f(x) + \{v, Q(v) - A_d\bar{x}\} < 0.$$

Поэтому можно использовать следствие 2. Теперь задача (11)–(13) имеет решение; для любого $\varepsilon > 0$ существуют $(x^\varepsilon, v^\varepsilon) \in X \times V$, такие, что

$$\begin{aligned} &f(x) - f(x^\varepsilon) + 0.5\varepsilon(\|x - \bar{x}\|^2 - \|x^\varepsilon - \bar{x}\|^2) - \{A_d^T v^\varepsilon, x - x^\varepsilon\} \geqslant 0 && \forall x \in X, \\ &\{A_d x^\varepsilon - Q(v^\varepsilon), v - v^\varepsilon\} \geqslant 0 && \forall v \in V \end{aligned}$$

(ср. (23)–(24)); любая последовательность $\{u^k\}$, $u^k = (x^k, v^k)$, такая, что $\|u^k - u^{\varepsilon_k}\| \leqslant \eta_k$, $u^{\varepsilon_k} = (x^{\varepsilon_k}, v^{\varepsilon_k})$, $\{\eta_k\} \to 0$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$, имеет предельные точки и все они являются решениями системы (11)–(13).

Далее, применим метод непосредственно к системе (7)–(9). Если множества P и V ограничены, существуют точки $p' \in P$, $v' \in V$, такие, что

$$f(x) + \{A^T p' - A_d^T v', x\} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|x\| \to \infty, \quad x \in \tilde{X},$$

то вновь выполняется условие (C2) (а значит, и (C1)) уже для системы (7)–(9) и справедливо следствие 1. Поэтому тогда система (7)–(9) имеет решение; для любого $\varepsilon > 0$ существуют $(x^\varepsilon, p^\varepsilon, v^\varepsilon) \in \tilde{X} \times P \times V$, такие, что

$$\begin{aligned} &f(x) - f(x^\varepsilon) + 0.5\varepsilon(\|x\|^2 - \|x^\varepsilon\|^2) + \{A^T p^\varepsilon - A_d^T v^\varepsilon, x - x^\varepsilon\} \geqslant 0 && \forall x \in \tilde{X}, \\ &\{b - Ax^\varepsilon, p - p^\varepsilon\} \geqslant 0 && \forall p \in P, \\ &\{A_d x^\varepsilon - Q(v^\varepsilon), v - v^\varepsilon\} \geqslant 0 && \forall v \in V; \end{aligned}$$

любая последовательность $\{u^k\}$, $u^k = (x^k, p^k, v^k)$, такая, что $\|u^k - u^{\varepsilon_k}\| \leqslant \eta_k$, $u^{\varepsilon_k} = (x^{\varepsilon_k}, p^{\varepsilon_k}, v^{\varepsilon_k})$, $\{\eta_k\} \to 0$, $\{\varepsilon_k\} \to 0$, имеет предельные точки и все они являются решениями системы (7)–(9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коннов И.В.* Двойственный подход для одного класса смешанных вариационных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. **42**, № 9. 1324–1337.
2. *Konnov I.V.* Convex optimization problems with arbitrary right-hand perturbations // Optimization. 2005. **54**, N 2. 131–147.
3. *Konnov I.V.* Equilibrium models and variational inequalities. Amsterdam: Elsevier, 2007.
4. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.
5. *Дябилкин Д.А., Коннов И.В.* Метод частичной регуляризации для немонотонных вариационных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. **48**, № 3. 355–364.
6. *Hogan W.W.* Energy policy models for project independence // Computers and Operations Research. 1975. **2**, N 3–4. 251–271.
7. *Ahn B.* Computation of market equilibria for policy analysis: the Project Independence Evaluation System (PIES) approach. New York & London: Garland Publishing, 1979.
8. *Коннов И.В.* О сходимости метода регуляризации для вариационных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. **46**, № 4. 568–575.
9. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

Поступила в редакцию
25.09.2010