

УДК 530.18

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕИВАЮЩИХ БИЛЛИАРДОВ. ЧАСТЬ I

С. В. Поршневу¹

В статье описаны вычислительный алгоритм и программа для моделирования движения материальной точки в рассеивающем бильярде (простейший бильярд Синая), созданная с использованием пакета Mathcad 2000 Professional.

Ключевые слова: рассеивающий бильярд, динамическая неустойчивость, K -система, h -энтропия, закон отражения, пакет Mathcad.

1. Введение. Исследование задачи о поведении газа, состоящего из твердых шариков, было начато Н. С. Крыловым в связи с поисками обоснований статистической механики [1]. Одним из объектов его исследований была модель, в которой газ рассматривался как система, состоящая из твердых шариков, двигающихся в плоскости и совершающих абсолютно упругие столкновения друг с другом. Исследование данной задачи было продолжено в работах Я. Г. Синая [2, 3], рассматривавшего задачу в плоскости. Простейший случай представляет собой модель, в которой упруго сталкиваются два диска в плоском ящике, причем один из дисков считается жестко закрепленным. С помощью замены закрепленного диска диском удвоенного радиуса, а движущегося диска — материальной точкой рассматриваемая задача сводится к задаче о движении точки в рассеивающем бильярде (простейшем бильярде Синая) (рис. 1).

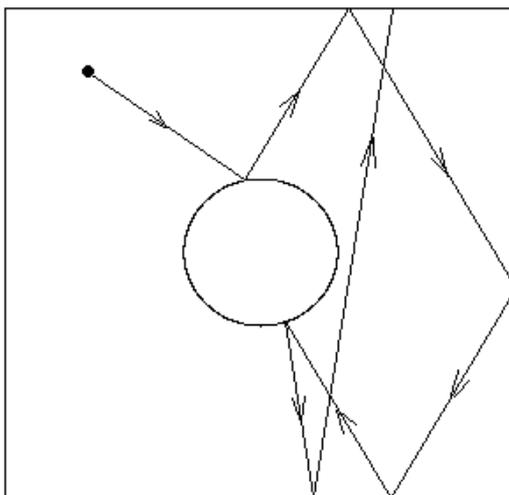


Рис. 1. Простейший бильярд Синая

В рассматриваемой задаче движение точки оказывается стохастически неустойчивым, т.е. поведение материальной точки является случайным во времени, и следовательно, к исходной системе применимы статистические методы описания. Физическая причина появления неустойчивости состоит в том, что окружность имеет отрицательную кривизну [4], поэтому расстояние $D(t)$ между частицами, близкими в начальный момент времени, по мере роста числа столкновений увеличивается до тех пор, пока точки не разбегаются, “забыв” о том, что они являлись близкими. Таким образом, детерминированная динамическая система обнаруживает случайное поведение, причиной которого является локальная неустойчивость движения.

В [2, 3] строго доказано, что рассматриваемым системам присуще свойство перемешивания (\mathcal{K} -свойство) в фазовом пространстве. Динамические системы, которые обладают свойством локальной неустойчивости

¹ Нижнетагильский государственный педагогический институт, ул. Красногвардейская, 57, 622031, г. Нижний Тагил; e-mail: psv@mail.tagil.ru

и перемешивания, не обусловленным действием случайных полей, называют \mathcal{K} -системами. (Более строго, под \mathcal{K} -системой понимают любую динамическую систему, у которой в некоторой конечной области значений ее параметров существует область фазового пространства; в ней реализуется \mathcal{K} -свойство [5].)

Формальное определение локальной неустойчивости следующее: существует направление, в котором расстояние $D(t)$ растет экспоненциально [5]:

$$D(t) = D(0) e^{h_0 t},$$

где h_0 является, вообще говоря, функцией точки в фазовом пространстве.

Соответствующий фазовый объем $\Delta\Gamma(t)$ меняется по закону

$$\Delta\Gamma(t) = \Delta\Gamma_0 e^{ht},$$

где $\Delta\Gamma_0$ — объем фазовой капли в начальный момент времени, $h = h_0$. Для систем, не обладающих свойством перемешивания, в соответствии с теоремой Лиувилля $h_0 = 0$ и $\Delta\Gamma(t) = \text{const}$.

Понятие “перемешивание”, играющее особую роль в теории динамических систем, в несколько более узком, но при этом более строгом смысле впервые было введено А.Н. Колмогоровым [6]. Формальное выражение этого свойства состоит в том, что для произвольных интегрируемых функций $f(z)$ и $g(z)$ их коррелятор $\mathfrak{R}(f, g, T)$ определяется по формуле

$$\mathfrak{R}(f, g, T) = \langle f(\hat{T}z)g(z) \rangle - \langle f(z) \rangle \langle g(z) \rangle,$$

где T — оператор сдвига во времени, скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по времени. Для эргодических систем $\langle f(z) \rangle$ и $\langle g(z) \rangle$ не зависят от времени. Если при $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathfrak{R}(f, g, T) = 0,$$

то говорят, что происходит расщепление парных корреляций, т.е. перемешивание. Движение фазовой капли при этом имеет очень сложный вид. С течением времени капля заполняет различные области фазового пространства. Объем капли при этом по теореме Лиувилля остается постоянным, т.е. заполнение фазового объема происходит за счет вытягивания и утончения отростков капли. Отметим, что из условия перемешивания автоматически следует условие эргодичности.

Количественной характеристикой плотности заполнения фазового пространства является h -энтропия (см. [5, 6]), вводимая по аналогии с обычной энтропией через формулу Больцмана в предположении, что состояния системы достаточно равномерно распределены в объеме $\Delta\Gamma$. Она определяется следующим выражением:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \Delta\Gamma(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (ht + \ln \Delta\Gamma_0) = h.$$

Необходимо отметить, что порядок вычисления пределов в этой формуле существенен. Приведем основные свойства h -энтропии [5].

1) Энтропия h определяет скорость изменения энтропии S в результате чисто динамического процесса перемешивания траекторий в фазовом пространстве.

2) Энтропия h , приращение локальной неустойчивости h_0 и обратное время расщепления временных корреляций h_c являются величинами одного порядка: $h \approx h_0 \approx h_c$.

3) Энтропия h является метрическим инвариантом системы, т.е. ее величина не зависит от способа разбиения фазового пространства и размера элементарной ячейки ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

4) Системы, имеющие одинаковые значения энтропии h , в определенном смысле изоморфны друг другу [7, 8], т.е. статистические законы движения у таких систем должны быть одинаковыми. Таким образом, исследование некоторых физических задач может оказаться эквивалентным исследованию свойств рассеивающих бильярдов.

С учетом значения этой задачи (на примере которой вводится целый ряд фундаментальных понятий нелинейной динамики) для общей теории динамических систем представляется целесообразным включить ее в учебные курсы соответствующих специальностей. В связи с тем, что точное решение задачи о движении в рассеивающих бильярдах оказывается достаточно сложным, необходимо разработать компьютерную программу, позволяющую наглядно продемонстрировать перечисленные выше особенности динамики \mathcal{K} -систем.

Целью настоящей статьи является описание вычислительного алгоритма и реализующей его программы, которая позволяет вычислять траекторию движения материальной точки в рассеивающем бильярде. Алгоритм реализован средствами пакета Mathcad (<http://www.softline.ru>), который, с нашей точки зрения, в наибольшей степени приспособлен для использования в учебном процессе [9].

2. Алгоритм построения траектории движения материальной точки в бильярде Синая. Будем считать, что отражение материальной точки от границы бильярда, называемой далее отражающей границей, и от окружности, называемой далее рассеивающей границей, происходит абсолютно упруго. Это означает (закон отражения), что угол падения (угол между нормалью к отражающей границе в точке падения и вектором скорости) равен углу отражения (угол между нормалью к отражающей границе в точке падения и вектором скорости после отражения материальной частицы). При отражении составляющая вектора скорости, направленная параллельно нормали, меняет свое значение на противоположное, а составляющая, перпендикулярная к нормали, не меняет своего направления (рис. 2) .

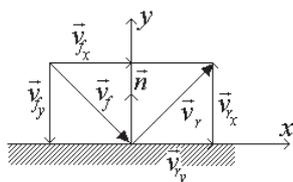


Рис. 2. Иллюстрация законов абсолютно упругого рассеивания

Таким образом, вычислительный алгоритм, на первый взгляд, достаточно очевиден:

- 1) Задать число отрезков траектории, координаты концов которых необходимо определить (N).
- 2) Инициализировать счетчик номеров вычисляемого отрезка k ($k = 1$).
- 3) Задать начальное положение материальной точки $A_k(x_{0k}, y_{0k})$.
- 4) Определить координаты точки $B_k(x_{1k}, y_{1k})$ пересечения луча, начало которого находится в точке (x_{0k}, y_{0k}) , а направляющий вектор параллелен вектору скорости материальной частицы на отрезке $[A_k, B_k]$, с отражающей или рассеивающей границей.
- 5) Построить отрезок $[A_k, B_k]$.
- 6) Преобразовать вектор скорости в соответствии с законом падения.
- 7) Присвоить координаты точки падения B_{k-1} точке A_k : $x_{0k} = x_{1_{k-1}}, y_{0k} = y_{1_{k-1}}$.
- 8) Увеличить значение счетчика на единицу ($k = k + 1$).
- 9) Повторять последовательность действий 3)–8) до тех пор, пока $k \leq N$.

Необходимо отметить, что рассматриваемый нами рассеивающий бильярд является простейшим. На практике приходится иметь дело с бильярдами, которые обладают более сложными формами границы. К их числу можно отнести бильярды типа “звезда”, “гусеница” (к задачам о движении в этом бильярде приводятся, например, задачи о собственных колебаниях мембраны сложной формы, о динамике движения электрических зарядов в магнитной ловушке и др. [4]), “стадион” или бильярды с аналитической границей [5]. Причем далеко не для всех типов бильярдов оказывается возможным аналитическое вычисление координат точек отражения. Отмеченное обстоятельство определяет необходимость построения алгоритма решения данной задачи для бильярда с произвольной границей.

Очевидно, что любую отражающую границу можно приблизить замкнутой ломаной, состоящей из отрезков равной длины, причем такое представление границы будет тем лучше, чем меньше длина отрезка ломаной. Выбранное представление отражающей границы позволяет свести исходную задачу к задаче определения координат точки пересечения луча и отрезка, для решения которой можно построить универсальный вычислительный алгоритм. Обсуждение алгоритма вычисления координат точки падения без потери общности проведем на примере бильярда Синая.

Будем считать, что отражающая граница представляет собой замкнутую ломаную, концы отрезков которой последовательно пронумерованы (рис. 3). Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат и векторы r_0, n, R_1, R_2 . Как видно из рис. 3, для нахождения координат точки j сначала необходимо определить, какому треугольнику принадлежит вектор n . Для решения данной задачи введем в рассмотрение векторы $s_1 = [R_1 \times n]$ и $s_2 = [R_2 \times n]$. Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения векторов n, R_1 и R_2 .

- 1) Векторы n и R_1 параллельны ($s_1 \equiv 0$).
- 2) Векторы n и R_2 параллельны ($s_2 \equiv 0$).
- 3) Вектор n лежит на прямой, проходящей между векторами R_1 и R_2 .

Очевидно, что в первых двух случаях для решения вопроса о совпадении направлений вектора n и векторов R_1 и R_2 необходимо определить знак скалярного произведения векторов $n \cdot R_1$ и $n \cdot R_2$ соответственно. Если скалярное произведение оказывается положительным, то векторы сонаправлены и,

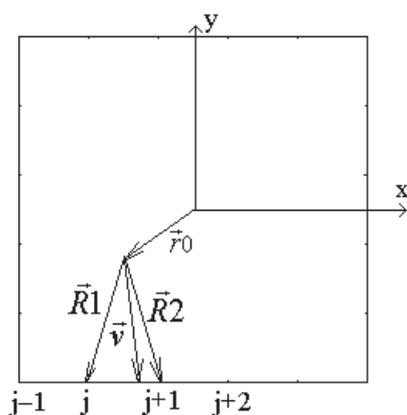


Рис. 3. К построению алгоритма вычисления координат точки отражения

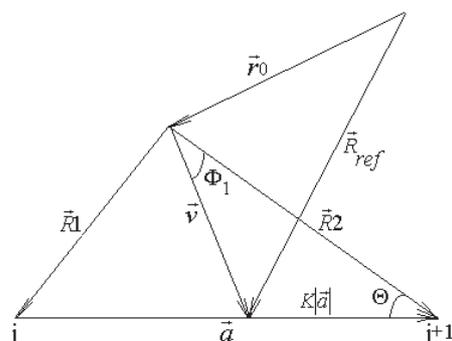


Рис. 4. К определению координат точки отражения от границы бильярда

следовательно, координата точки отражения совпадает с j -й или $j + 1$ -й вершиной ломаной, аппроксимирующей границу. Если скалярное произведение оказывается отрицательным, то векторы противоположно направлены; следовательно, точка отражения не принадлежит данному треугольнику. В третьем случае вектор \mathbf{n} будет лежать между векторами \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 при выполнении условия $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 < 0$. Как видно из рис. 4, точка отражения является концом вектора

$$\mathbf{R}_{\text{ref}} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R}_2 - K \cdot \mathbf{a},$$

где, как следует из теоремы синусов,

$$K = \frac{|\mathbf{R}_2|}{|\mathbf{a}|} \frac{\sin \Phi_1}{\sin(\Theta + \Phi_1)}.$$

При нахождении координат точки отражения от рассеивающей границы описанный выше алгоритм требует доработки, так как прямая, задаваемая вектором скорости, пересекает окружность в двух точках (рис. 5). Модификация алгоритма очевидна из этого рисунка: следует сравнить длины векторов \mathbf{R}_{ref} для каждого из рассеивающих отрезков и выбрать из них тот, для которого длина вектора \mathbf{R}_{ref} окажется наименьшей.

Отдельного обсуждения требует задача вычисления вектора скорости материальной точки после ее отражения от отражающей или рассеивающей границы. Для построения соответствующего вычислительного алгоритма рассмотрим отдельный отрезок ломаной, аппроксимирующей отражающую или рассеивающую границы (рис. 6). Для построения универсального алгоритма, пригодного для рассеивающих бильярдов с произвольной формой границы, будем считать, что отрезок ломаной наклонен под некоторым углом Θ к системе координат XOY . Отметим, что описанный выше алгоритм вычисления координаты точки отражения от отражающей границы останется неизменным.

Введем локальную прямоугольную систему координат $X'O'Y'$, ось OX' совпадает с \mathbf{a} (рис. 6). Направление оси OY' при таком выборе локальной системы координат совпадает с направлением нормали к рас-

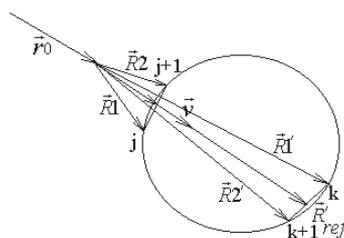


Рис. 5. К определению скорости материальной точки после отражения от границы бильярда

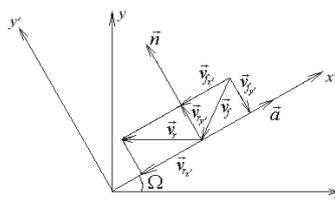


Рис. 6. К определению скорости точки после отражения от границы бильярда

смаатриваемому отрезку ломаной в точке падения. Следовательно, в локальной системе координат $X'O'Y'$ угол между нормалью и векторами скоростей до отражения и после отражения будут одинаковыми. Переход от исходной системы координат к локальной осуществляется с помощью поворота осей на угол Ω вокруг точки O' , который задается матрицей поворота

$$A = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \\ -\sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix}.$$

(Здесь за положительное направление поворота принимается поворот против часовой стрелки.) Угол поворота Ω , формально определяемый как

$$\Omega = \arccos \left(\frac{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{e}_x| |\mathbf{a}|} \right),$$

должен выбираться в зависимости от того, в каком квадранте системы координат XOY оказывается вектор \mathbf{a} (рис. 7), и определяется по следующим правилам: $\Omega = \Omega$ (первый квадрант), $\Omega = \Omega$ (второй квадрант), $\Omega = -\Omega$ (третий квадрант), $\Omega = -(\pi - \Omega)$ (четвертый квадрант).

Таким образом, для нахождения вектора материальной точки после отражения от отражающей границы можно использовать следующий алгоритм:

- 1) Вычислить угол Ω между осями OX и $O'X'$.
- 2) Определить квадрант системы координат XOY , которому принадлежит вектор \mathbf{a} .
- 3) Преобразовать угол Ω в соответствии с приведенными выше правилами.
- 4) Вычислить координаты вектора скорости \mathbf{n}_f в системе координат $X'O'Y'$ с помощью матрицы поворота A ($\mathbf{n}'_f = A \cdot \mathbf{n}_f$).
- 5) Вычислить в соответствии с законом отражения координаты вектора скорости \mathbf{n}'_r после отражения: $v_{r_{x'}} = v_{f_{x'}}$, $v_{r_{y'}} = -v_{f_{y'}}$.
- 6) Вычислить координаты вектора скорости \mathbf{n}_r в системе координат XOY с помощью матрицы поворота A_1 на угол $-\Omega$ ($\mathbf{n}_r = A_1 \cdot \mathbf{n}'_r$):

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix}.$$

Необходимо отметить, что при выбранном направлении нумерации узлов ломаной, аппроксимирующей рассеивающую границу, ось OX' оказывается сонаправленной с вектором $-\mathbf{a}$, поэтому угол Ω поворота системы координат $X'O'Y'$ относительно системы координат XOY определяется по следующим правилам: $\Omega = -(\pi - \Omega)$ (первый квадрант), $\Omega = -(\pi - \Omega)$ (второй квадрант), $\Omega = (\pi - \Omega)$ (третий квадрант), $\Omega = (\pi - \Omega)$ (четвертый квадрант).

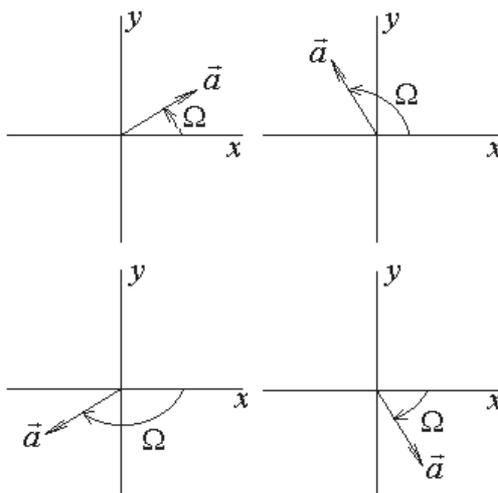


Рис. 7. К выбору угла поворота локальной системы координат $X'O'Y'$ относительно системы координат XOY

Подводя итоги обсуждения вычислительного алгоритма для нахождения траектории движения материальной точки в бильярде Синая, перечислим последовательность действий, реализующих данный алгоритм:

- 1) Задать координаты вершин ломаных, аппроксимирующих отражающую и рассеивающую границы.
- 2) Задать число отрезков траектории, координаты концов которых необходимо определить (N).
- 3) Задать радиус-вектор начальной точки \mathbf{r}_0 и радиус-вектор начальной скорости \mathbf{n}_0 .
- 4) Инициализировать счетчик числа отрезков траектории, координаты концов которых необходимо определить ($k = 1$).
- 5) Сохранить значения координат радиус-вектора \mathbf{r}_0 и радиус-вектора скорости \mathbf{n}_0 .
- 6) Определить номера вершин отрезков ломаной, аппроксимирующей рассеивающую границу, с которыми пересекается луч с вершиной в точке с радиус-вектором \mathbf{r}_0 и направляющим вектором, параллельным вектору скорости \mathbf{n}_0 , и выбрать из отрезков тот, для которого длина вектора \mathbf{R}_{ref} окажется наименьшей.
- 7) При отсутствии точек пересечения луча с вершиной в точке с радиус-вектором \mathbf{r}_0 и направляющим вектором, параллельным вектору скорости \mathbf{n}_0 , с рассеивающей границей определить соответствующие номера вершин отрезка ломаной, аппроксимирующей отражающую границу.
- 8) Вычислить координаты точки падения.
- 9) Вычислить координаты вектора скорости после отражения точки от отражающей или рассеивающей границы в соответствии с описанным выше алгоритмом.
- 10) Заменить начальные координаты радиус-вектора \mathbf{r}_0 координатами точки падения, а вектор скорости \mathbf{n}_0 — вектором скорости, координаты которого вычислены на предыдущем шаге алгоритма.
- 11) Сохранить значения координат радиус-вектора \mathbf{r}_0 и радиус-вектора скорости \mathbf{n}_0 .
- 12) Увеличить значение счетчика на единицу ($k = k + 1$).
- 13) Повторять последовательность действий 6)–13) до тех пор, пока $k \leq N$.

3. Программа для моделирования движения материальной точки в бильярде Синая. Программа (<http://www.exponenta.ru>), реализующая описанный в предыдущем разделе алгоритм, состоит из следующих блоков (рисунки, иллюстрирующие содержания этих блоков, помещены в электронной версии статьи по адресу <http://num-meth.srcc.msu.su>):

- 1) Вычисление координат вершин ломаных, аппроксимирующих отражающую и рассеивающую границы. Результаты вычислений сохраняются в переменных Bound и Bound2 соответственно.
- 2) Задание функции Where($\mathbf{r}_0, \mathbf{v}, B1, N1$), возвращающей номер отрезка, которому принадлежит точка отражения от отражающей границы. Аргументами функции являются: \mathbf{r}_0 — вектор, содержащий координаты начальной точки отрезка траектории; \mathbf{v} — вектор скорости в начальной точке отрезка траектории; $B1$ — матрица, содержащая координаты узлов ломаной, аппроксимирующей отражающую границу; $N1$ — число вершин ломаной.

3) Задание функции $\text{WhereCircle}(r_0, v, B1, N1)$, возвращающей номер отрезка отражающей границы, которому принадлежит точка отражения. Аргументами функции являются: r_0 — вектор, содержащий координаты начальной точки отрезка траектории; v — вектор скорости в начальной точке отрезка траектории; $B1$ — матрица, содержащая координаты узлов ломаной, аппроксимирующей рассеивающую границу; $N1$ — число вершин ломаной.

4) Задание функции $\text{Line}(R0, v, Bound, K0)$, возвращающей координаты конца отрезка траектории и значения скорости точки после отражения от отражающей границы. Аргументами функции являются: $R0$ — вектор, содержащий координаты начальной точки отрезка траектории; v — вектор скорости в начальной точке отрезка траектории; $Bound$ — матрица, содержащая координаты узлов ломаной, аппроксимирующей отражающую границу; $K0$ — число вершин ломаной.

5) Задание функции $\text{LineCircle}(R0, v, Bound, K0)$, возвращающей координаты конца отрезка траектории и значения скорости точки после отражения от рассеивающей границы. Аргументами функции являются: $R0$ — вектор, содержащий координаты начальной точки отрезка траектории; v — вектор скорости в начальной точке отрезка траектории; $Bound$ — матрица, содержащая координаты узлов ломаной, аппроксимирующей отражающую границу; $K0$ — число вершин ломаной.

6) Задание функции $L4(R0, v, B1, B2, K0)$, возвращающей значения координат концов отрезков траектории движения частицы в бильярде Синая. Аргументами функции являются: $R0$ — вектор, содержащий координаты начальной точки; v — вектор скорости в начальной точке; $B1$ — матрица, содержащая координаты вершин ломаной, аппроксимирующей отражающую границу бильярда; $B2$ — матрица, содержащая координаты вершин ломаной, аппроксимирующей рассеивающую границу бильярда; $K0$ — число вершин ломаной.

7) Демонстрация разбегания траекторий частиц, координаты которых были близки в начальный момент времени. Здесь: K — количество ударов частицы о рассеивающую границу; $R0$ — радиус-вектор начальной скорости; v — начальная скорость; $L5$ — матрица для заданных начальных условий, возвращенная функцией $L4$; Δ — вектор сдвига, используемый для изменения начального положения точки; $L6$ — матрица для измененных начальных условий, возвращенная функцией $L4$; $P1, P2, ii, iii$ — вспомогательные переменные, используемые для построения бильярда Синая и траектории движения частицы.

4. Заключение. В статье предложен алгоритм для решения задачи о вычислении траектории движения частицы в простейшем бильярде Синая и описана его программная реализация. Данный алгоритм пригоден для моделирования движения частиц в бильярдах с произвольной формой границы. Описанию методов вычисления количественных характеристик хаоса, возникающего в рассматриваемой системе, и их программной реализации посвящена отдельная статья [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов Н.С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
2. *Синай Я.Г.* К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // ДАН СССР. 1963. **153**. 1261–1264.
3. *Синай Я.Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // УМН. 1970, **25**. 141–192.
4. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
5. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
6. *Колмогоров А.Н.* О понятии энтропии // ДАН СССР. 1958. **119**. 861–863.
7. *Биллингсли П.* Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969.
8. *Орстейн Д.* Эргодическая теория, случайность и динамические системы. М.: Мир, 1978.
9. *Поршнев С.В.* Персональный компьютер в вузовском курсе физики: его место, программное обеспечение // Учебный эксперимент в высшей школе. 1998. № 2. 3–8.
10. *Поршнев С.В.* Численное моделирование рассеивающих бильярдов. Часть II // Вычислительные методы и программирование. **2**, № 2. 63–69 (электронная версия статьи приведена в <http://num-meth.srcc.msu.su>).

Поступила в редакцию
27.06.2001

```

N := 1000    i := 0..N    k := 0..4    L := 5
A :=  $\begin{pmatrix} -L \\ -L \end{pmatrix}$     B :=  $\begin{pmatrix} L \\ -L \end{pmatrix}$     C :=  $\begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}$     D :=  $\begin{pmatrix} -L \\ L \end{pmatrix}$ 

Bound :=
  for k ∈ 0..  $\frac{N}{4} - 1$ 
  |
  |  $S_{k,0} \leftarrow A_{0,0} + \frac{(B_{0,0} - A_{0,0})}{\left(\frac{N}{4}\right)} \cdot k$ 
  |  $S_{k,1} \leftarrow A_{1,0} + \frac{(B_{1,0} - A_{1,0})}{\left(\frac{N}{4}\right)} \cdot k$ 
  |
  for k ∈  $\frac{N}{4} .. \frac{N}{2} - 1$ 
  |
  |  $S_{k,0} \leftarrow B_{0,0} + \frac{(C_{0,0} - B_{0,0})}{\left(\frac{N}{4}\right)} \cdot \left(k - \frac{N}{4}\right)$ 
  |  $S_{k,1} \leftarrow B_{1,0} + \frac{(C_{1,0} - B_{1,0})}{\left(\frac{N}{4}\right)} \cdot \left(k - \frac{N}{4}\right)$ 
  |
  for k ∈  $\frac{N}{2} .. \frac{3 \cdot N}{4} - 1$ 
  |
  |  $S_{k,0} \leftarrow C_{0,0} + \frac{(D_{0,0} - C_{0,0})}{\left(\frac{N}{4}\right)} \cdot \left(k - \frac{N}{2}\right)$ 
  |  $S_{k,1} \leftarrow C_{1,0} + \frac{(D_{1,0} - C_{1,0})}{\left(\frac{N}{4}\right)} \cdot \left(k - \frac{N}{2}\right)$ 
  |
  for k ∈  $\frac{3 \cdot N}{4} .. N$ 
  |
  |  $S_{k,0} \leftarrow D_{0,0} + \frac{(A_{0,0} - D_{0,0})}{\left(\frac{N}{4}\right)} \cdot \left(k - \frac{3 \cdot N}{4}\right)$ 
  |  $S_{k,1} \leftarrow D_{1,0} + \frac{(A_{1,0} - D_{1,0})}{\left(\frac{N}{4}\right)} \cdot \left(k - \frac{3 \cdot N}{4}\right)$ 
  |
  S

 $\phi_i := \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot i$     Radius := 1.5     $x_i := \text{Radius} \cdot \cos(\phi_i)$      $y_i := \text{Radius} \cdot \sin(\phi_i)$     Bound2 := augment(x,y)

```

Рис. 8. Фрагмент документа для вычисления координат вершин ломаных, аппроксимирующих отражающую и рассеивающие границы

```

Where(r0,v,B1,N1) := for j ∈ 0.. N1 - 1
    R1 ←  $\begin{pmatrix} B1_{j,0} - r0_0 \\ B1_{j,1} - r0_1 \end{pmatrix}$ 
    R2 ←  $\begin{pmatrix} B1_{j+1,0} - r0_0 \\ B1_{j+1,1} - r0_1 \end{pmatrix}$ 
    q ←  $\frac{R1 \cdot R2}{|R1| \cdot |R2|}$ 
    q ← 1 if q > 1
    φ ← acos(q)
    if |φ - π| ≥ 10-7
        s1 ← v0 · R11 - v1 · R10
        if v · R1 > 0 if s1 = 0
            s3 ←  $\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix}$ 
            break
        s2 ← v0 · R21 - v1 · R20
        if v · R2 > 0 if s2 = 0
            s3 ←  $\begin{pmatrix} j \\ -2 \end{pmatrix}$ 
            break
        if v · R1 ≥ 0 if s1 · s2 < 0
            s3 ←  $\begin{pmatrix} j \\ -3 \end{pmatrix}$ 
            break
        s3 ←  $\begin{pmatrix} \infty \\ 0 \end{pmatrix}$ 
    s3
    
```

Рис. 9. Функция, возвращающая номер отрезка отражающей границы, которому принадлежит точка отражения

```

WhereCircle(r0,v,B1,N1) := Flag ← 0
                          L ← 0
                          for j ∈ 0..N1 - 1
                              R1 ←  $\begin{pmatrix} B1_{j,0} - r0_0 \\ B1_{j,1} - r0_1 \end{pmatrix}$ 
                              R2 ←  $\begin{pmatrix} B1_{j+1,0} - r0_0 \\ B1_{j+1,1} - r0_1 \end{pmatrix}$ 
                              q ←  $\frac{R1 \cdot R2}{|R1| \cdot |R2|}$ 
                              q ← 1 if q > 1
                              φ ← acos(q)
                              if |φ - π| ≥ 10-7
                                  s1 ← v0 · R1 - v1 · R10
                                  if v · R1 > 0 if s1 = 0
                                      s3L,0 ← j
                                      s3L,1 ← -1
                                      L ← L + 1
                                      Flag ← 1
                                  s2 ← v0 · R2 - v1 · R20
                                  if v · R2 > 0 if s2 = 0
                                      s3L,0 ← j
                                      s3L,1 ← -2
                                      L ← L + 1
                                      Flag ← 1
                                  if v · R1 ≥ 0 if s1 · s2 < 0
                                      s3L,0 ← j
                                      s3L,1 ← -3
                                      L ← L + 1
                                      Flag ← 1
                                  if Flag = 0
                                      s40,0 ← ∞
                                      s41,0 ← 0
                              if rows(s3) = 2
                                  M ← s30,0
                                  R1 ←  $\begin{pmatrix} B1_{M,0} - r0_0 \\ B1_{M,1} - r0_1 \end{pmatrix}$ 
                                  M ← s31,0
                                  R2 ←  $\begin{pmatrix} B1_{M,0} - r0_0 \\ B1_{M,1} - r0_1 \end{pmatrix}$ 
                                  s4 ←  $\begin{pmatrix} s30,0 \\ s30,1 \end{pmatrix}$  if |R1| < |R2|
                                  s4 ←  $\begin{pmatrix} s31,0 \\ s31,1 \end{pmatrix}$  otherwise
                          s4

```

Рис. 10. Функция, возвращающая номер отрезка рассеивающей границы, которому принадлежит точка отражения

```

Lines(R0,v,Bound,K0) :=
r0 ← R0
v0 ← v
e_x ←  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
e_y ←  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 
E0,0 ← r00
E0,1 ← r01
E0,2 ← v00
E0,3 ← v01
N1 ← rows(Bound) - 1
for k ∈ 1..K0
  s3 ← Where(r0,v0,Bound,N1)
  j ← s30,0
  L ← 0 if j = N1
  L ← j + 1 otherwise
  R10 ← Boundj,0 - r00
  R11 ← Boundj,1 - r01
  R20 ← BoundL,0 - r00
  R21 ← BoundL,1 - r01
  a ← R2 - R1
  a1 ← a
  β ←  $\arccos\left(\frac{R2 \cdot a}{|R2| \cdot |a|}\right)$ 
  Ω ←  $\arccos\left(\frac{e_x \cdot a}{|e_x| \cdot |a|}\right)$ 
  Ω ← -(π - Ω) if a0 < 0 ∧ a1 < 0
  Ω ← Ω if a0 > 0 ∧ a1 < 0
  Vr ←  $\begin{pmatrix} \cos(\Omega) & \sin(\Omega) \\ -\sin(\Omega) & \cos(\Omega) \end{pmatrix} \cdot v0$ 
  Vr0 ← Vr0
  Vr1 ← -Vr1
  if s31,0 = -1
    Ek,0 ← Boundj,0
    Ek,1 ← Boundj,1
  if s31,0 = -2
    Ek,0 ← BoundL,0
    Ek,1 ← BoundL,1
  if s31,0 = -3
    φ1 ←  $\arccos\left(\frac{R2 \cdot v0}{|R2| \cdot |v0|}\right)$ 
    K ←  $\frac{|R2| \cdot \sin(\phi_1)}{|a| \cdot \sin(\beta + \phi_1)}$ 
    a1 ← a - K if K ≠ 0
    a1 ←  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  otherwise
    Ek,0 ← -a10 + r00 + R20
    Ek,1 ← -a11 + r01 + R21
  v0 ←  $\begin{pmatrix} \cos(\Omega) & -\sin(\Omega) \\ \sin(\Omega) & \cos(\Omega) \end{pmatrix} \cdot Vr$ 
  Ek,2 ← v00
  Ek,3 ← v01
  r00 ← Ek,0
  r01 ← Ek,1
E

```

Рис. 11. Функция, возвращающая значения координат конца отрезка траектории при отражении от отражающей границы

```

LinesCircle(R0, v, Bound, K0) :=
  r0 ← R0
  v0 ← v
  c_x ←  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
  c_y ←  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 
  E0,0 ← r00
  E0,1 ← r01
  E0,2 ← v00
  E0,3 ← v01
  N1 ← rows(Bound) - 1
  for k ∈ 1..K0
    s3 ← WhereCircle(r0, v0, Bound, N1)
    j ← s30,0
    L ← 0 if j = N1
    L ← j + 1 otherwise
    R10 ← Boundj,0 - r00
    R11 ← Boundj,1 - r01
    R20 ← BoundL,0 - r00
    R21 ← BoundL,1 - r01
    a ← (R2 - R1)
    a1 ← a
    β ←  $\arccos\left(\frac{R2 \cdot a}{|R2| \cdot |a|}\right)$ 
    Ω ←  $\arccos\left(\frac{c_x \cdot a}{|c_x| \cdot |a|}\right)$ 
    Ω ← -(π - Ω) if a0 > 0 ∧ a1 > 0
    Ω ← -(π - Ω) if a0 < 0 ∧ a1 > 0
    Ω ← (π - Ω) if a0 < 0 ∧ a1 < 0
    Ω ← (π - Ω) if a0 > 0 ∧ a1 < 0
    Vr ←  $\begin{pmatrix} \cos(\Omega) & \sin(\Omega) \\ -\sin(\Omega) & \cos(\Omega) \end{pmatrix} \cdot v0$ 
    Vr0 ← Vr0
    Vr1 ← -Vr1
    if s31,0 = -1
      Ek,0 ← Boundj,0
      Ek,1 ← Boundj,1
    if s31,0 = -2
      Ek,0 ← BoundL,0
      Ek,1 ← BoundL,1
    if s31,0 = -3
      φ1 ←  $\arccos\left(\frac{R2 \cdot v0}{|R2| \cdot |v0|}\right)$ 
      K ←  $\frac{|R2| \cdot \sin(\phi_1)}{|a| \cdot \sin(\beta + \phi_1)}$ 
      a1 ← a · K if K ≠ 0
      a1 ←  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  otherwise
      Ek,0 ← -a10 + r00 + R20
      Ek,1 ← -a11 + r01 + R21
    v0 ←  $\begin{pmatrix} \cos(\Omega) & -\sin(\Omega) \\ \sin(\Omega) & \cos(\Omega) \end{pmatrix} \cdot Vr$ 
    Ek,2 ← v00
    Ek,3 ← v01
    r00 ← Ek,0
    r01 ← Ek,1
  E

```

Рис. 12. Функция, возвращающая значения отрезка траектории при отражении от рассеивающей границы

```

L4(R0,v,B1,B2,K0) :=
  N1 ← rows(B1) - 1
  N2 ← rows(B2) - 1
  r0 ← R0
  v0 ← v
  L ← 0
  s5L,0 ← r0_0
  s5L,1 ← r0_1
  s5L,2 ← v0_0
  s5L,3 ← v0_1
  for j ∈ 0..K0
    L ← L + 1
    s3 ← WhereCircle(r0,v0,B2,N2)
    if s3_1,0 ≠ 0
      s4 ← LinesCircle(r0,v0,B2,1)
      s5L,0 ← s4_1,0
      s5L,1 ← s4_1,1
      s5L,2 ← s4_1,2
      s5L,3 ← s4_1,3
      s5L,4 ← 1
      r0_0 ← s5L,0
      r0_1 ← s5L,1
      v0_0 ← s5L,2
      v0_1 ← s5L,3
      L ← L + 1
      s4 ← Lines(r0,v0,B1,1)
      s5L,0 ← s4_1,0
      s5L,1 ← s4_1,1
      s5L,2 ← s4_1,2
      s5L,3 ← s4_1,3
      r0_0 ← s5L,0
      r0_1 ← s5L,1
      v0_0 ← s5L,2
      v0_1 ← s5L,3
    otherwise
      s4 ← Lines(r0,v0,B1,1)
      s5L,0 ← s4_1,0
      s5L,1 ← s4_1,1
      s5L,2 ← s4_1,2
      s5L,3 ← s4_1,3
      s5L,4 ← 0
      r0_0 ← s5L,0
      r0_1 ← s5L,1
      v0_0 ← s5L,2
      v0_1 ← s5L,3
  s5

```

Рис. 13. Функция, возвращающая значения координат отрезков траектории движения частицы в бильярде Синая

```

K := 11
R0 :=  $\begin{pmatrix} -3.3 \\ 3.63 \end{pmatrix}$  v :=  $\begin{pmatrix} 1.1 \\ -0.8 \end{pmatrix}$  L5 := L4(R0,v,Bound,Bound2,K)

 $\Delta := \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.0 \end{pmatrix}$  R0 := R0 +  $\Delta$  L6 := L4(R0,v,Bound,Bound2,K)
P1 := rows(L5) - 1 P2 := rows(L6) - 1
ii := 0..P1    ii1 := 0..P2

```

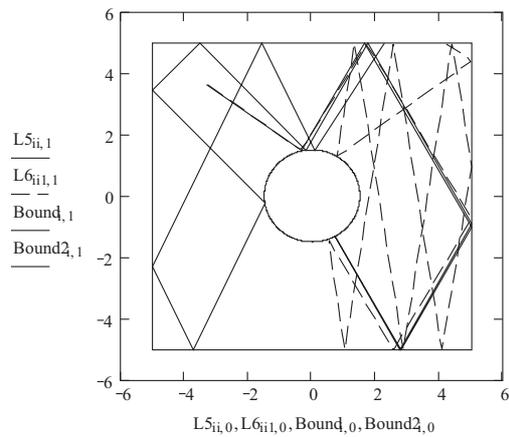


Рис. 14. Фрагмент документа для вычисления и демонстрации разбегания траекторий движения частиц в бильярде Синая, близких в начальный момент времени