

УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОДВИЖНОЙ КОНСТРУКЦИИ С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИСТЕННЫХ ДЕМПФИРУЮЩИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А. А. Аксёнов¹, А. С. Шишаева¹

Рассматривается моделирование взаимодействия подвижной конструкции с потоком жидкости в программном комплексе FlowVision-НПС. Для повышения устойчивости совместного расчета уравнений движения жидкости и уравнений динамики конструкции вводятся пристенные демпфирующие коэффициенты в расчетные ячейки, соприкасающиеся с конструкцией. Проводится серия расчетов, в рамках которой определяется граница устойчивости решения без использования демпфирующих коэффициентов, демонстрируется повышение устойчивости решения с использованием демпфирующих коэффициентов и определяются оптимальные значения демпфирующих коэффициентов.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, Fluid-Structure Interaction, явный метод расщепления, искусственная сжимаемость, демпфирующие коэффициенты, численная устойчивость, FlowVision-НПС.

1. Введение. Задачи взаимодействия подвижных и деформируемых конструкций с жидкостью или газом широко распространены в науке, промышленности, медицине. Примерами таких задач в авиации являются флаттер крыльев и обшивки самолета [1, 2], в автомобилестроении — аквапланирование автомобильной шины [3], движение масла через уплотнители [4], в машиностроении — деформация лопаток турбины в потоке [5], тепловые деформации работающего подшипника [6], в медицине — работа сердца, движение крови по деформируемым сосудам [7]. Основная сложность моделирования взаимодействия жидкости и конструкций заключается в необходимости получения совместного согласованного решения уравнений динамики конструкции и уравнений движения жидкости.

Существуют два основных подхода для решения таких задач: монолитный и метод расщепления. Монолитный подход подразумевает сведение задачи в одну систему уравнений [8]. Метод расщепления предполагает разделение всей системы уравнений на блоки, которые решаются отдельно, периодически обмениваясь данными через заданный интервал времени [9, 10].

Монолитный подход лучше отражает физику явления, поскольку на каждом шаге по времени он позволяет получить согласованное решение для жидкости и конструкции. Однако этот подход обладает рядом существенных недостатков. Во-первых, одновременное решение всех уравнений достаточно громоздко и требует большого количества времени и ресурсов компьютера. Во-вторых, такой метод требует общий математический аппарат для решения всех уравнений. Однако на сегодняшний день большинство решателей для моделирования движения и теплопереноса в потоке используют метод конечного объема, а решатели для моделирования деформации конструкции — метод конечных элементов. Использование данных решателей для моделирования задач, для которых они не предназначены, может привести к снижению точности получаемого решения. Поэтому применимость монолитного подхода для решения задач взаимодействия потока с деформируемой конструкцией крайне ограничена.

Метод расщепления позволяет использовать для решения гидродинамического и прочностного блоков различные готовые решатели, разработанные именно для данного блока. Наиболее общеупотребительный вариант разделенного подхода — последовательно ступенчатый. При этом каждый блок уравнений решается последовательно до указанного времени, после чего полученные данные пересылаются в другой блок. Однако как все явные методы расщепления, они могут проявлять неустойчивость, поскольку на каждом временном шаге обмена информацией оба решения не согласованы между собой. Для большинства типов схем расщепления согласование происходит на уровне положения границ расчетных областей, но нагрузки на эти границы получаются разными со стороны конструкции и жидкости [9–11]. На первый взгляд, это должно просто вызвать ограничения на временной шаг. Однако наблюдения показывают, что уменьшение размера временного шага вызывает увеличение неустойчивости [11]. Такая неустойчивость присуща самой схеме и носит название “эффект искусственно добавленной массы”, поскольку основные

¹ ООО “ТЕСИС”, ул. Юннатов, 18, офис 705, 127083, Москва; А. А. Аксёнов, технический директор, e-mail: andrey@tesis.com.ru; А. С. Шишаева, начальник группы тестирования, e-mail: nsh@tesis.com.ru

части потока действуют на степени свободы твердого тела на границе раздела как дополнительная масса. Примечательно, что неустойчивость проявляется в случае взаимодействия конструкции с несжимаемым потоком жидкости, зависит от плотностей жидкости и твердого тела, а также от формы области [11].

Существуют три основных пути преодоления возникающей неустойчивости явной схемы расщепления. Первый — использование неявной схемы сопряжения [12], второй — использование предиктор/корректора [10], третий — использование искусственной сжимаемости [13]. Использование неявной схемы в разделенном подходе предполагает повторное решение уравнений движения жидкости и динамики конструкции вплоть до достижения согласованного решения в обеих расчетных областях. Такой способ позволяет полностью устранить причину неустойчивости, однако в десятки раз увеличивает время расчета. Использование предиктор/корректора предполагает предсказание скорости границы со стороны конструкции и нагрузки на границе со стороны потока на следующем шаге, поскольку нагрузки, вычисляемые в потоке, зависят от предсказанных, а не истинных смещений твердого тела на границе раздела. В случае недостаточно точного предсказания это также может приводить к неустойчивости. Использование искусственной сжимаемости предполагает введение в уравнение неразрывности для жидкости коэффициентов демпфирования, предугадывающих отклик гибкой конструкции на изменение нагрузки со стороны потока. Аналогичные коэффициенты получаются при сведении всех уравнений в одну систему. Введение искусственной сжимаемости — это, по сути, недостающие члены общей системы уравнений, которые имеются в монолитном подходе. В работе [13] этот подход используется для повышения устойчивости неявного метода расщепления, в настоящей статье авторы попытались его применить для явного метода расщепления решения задач взаимодействия жидкости и конструкции.

В данной работе метод искусственной сжимаемости дополнен введением двух разных коэффициентов — отклик гибкой конструкции (податливость) и жесткой конструкции (подвижность). Метод реализован в программном комплексе FlowVision-НРС. Проводится серия расчетов, в рамках которой определяется граница устойчивости решения без использования демпфирующих коэффициентов, демонстрируется повышение устойчивости решения с использованием демпфирующих коэффициентов и определяются оптимальные значения демпфирующих коэффициентов.

Отметим, что в настоящей статье рассматривается несжимаемая жидкость только с точки зрения упрощения изложения. Этот же подход применяется авторами и для задач сжимаемой жидкости. Более того, далее будет рассмотрен метод расщепления с введением пристенной сжимаемости на примере расчета взаимодействия жидкости и твердого тела. Однако данный метод с успехом применяется и для расчета гибких конструкций, например для задач аквапланирования автомобильного колеса или падения вертолета с мягкими баллонетами в воду [14].

2. Уравнения движения жидкости и конструкции. Для решения задач взаимодействия жидкости и конструкции необходимо моделировать как движение жидкости или газа, так и движение конструкции. Движение элемента конструкции описывается уравнением Ньютона

$$m \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_f, \tag{1}$$

где t — время; m — масса элемента конструкции; \mathbf{u} — перемещение элемента конструкции; \mathbf{F} — внешняя сила, действующая на элемент не со стороны жидкости или газа; \mathbf{F}_f — внешняя сила, действующая на элемент со стороны жидкости или газа.

Сила, действующая на конструкцию со стороны жидкости или газа, может быть вычислена по формуле $\mathbf{F}_f = (P + \rho D)\mathbf{s}$, где \mathbf{s} — векторная площадь поверхности элемента, P — давление со стороны жидкости, а D — вязкое напряжение со стороны жидкости. Уравнение Навье–Стокса для элемента несжимаемой жидкости в интегральной форме имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{V} d\Omega + \oint_S \mathbf{V}(\mathbf{V} - \mathbf{W}) ds = - \oint_S \frac{P}{\rho} ds + \oint_S D ds, \tag{2}$$

где \mathbf{V} — скорость жидкости, \mathbf{W} — скорость поверхности конструкции, ρ — плотность жидкости и Ω — объем элемента жидкости. Уравнение неразрывности в интегральной форме имеет вид

$$\oint_S (\mathbf{V} - \mathbf{W}) ds = 0 \tag{3}$$

3. Метод решения. Взаимодействие жесткой конструкции с жидкостью моделируется в программном комплексе FlowVision-НРС [15] посредством явного расщепления. Уравнения разбиваются на два

блока: уравнения для определения движения тела и уравнения для определения движения жидкости. Уравнения (1)–(3) в дискретной форме имеют следующий вид:

$$m \frac{\mathbf{W}^{i+1} - \mathbf{W}^i}{\tau^{i+1}} = \mathbf{F}^i + \mathbf{F}_f^i, \quad (4)$$

$$\frac{\mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{V}^i}{\tau^{i+1}} \Omega + \oint_S \mathbf{V}^{i+1} (\mathbf{V}^i - \mathbf{W}^i) ds = - \oint_S \frac{P^{i+1}}{\rho} ds + \oint_S D^{i+1} ds, \quad (5)$$

$$\oint_S (\mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{W}^{i+1}) ds = 0, \quad (6)$$

где $\tau^{i+1} = T^{i+1} - T^i$. Решение уравнений осуществляется поочередно на каждом временном шаге.

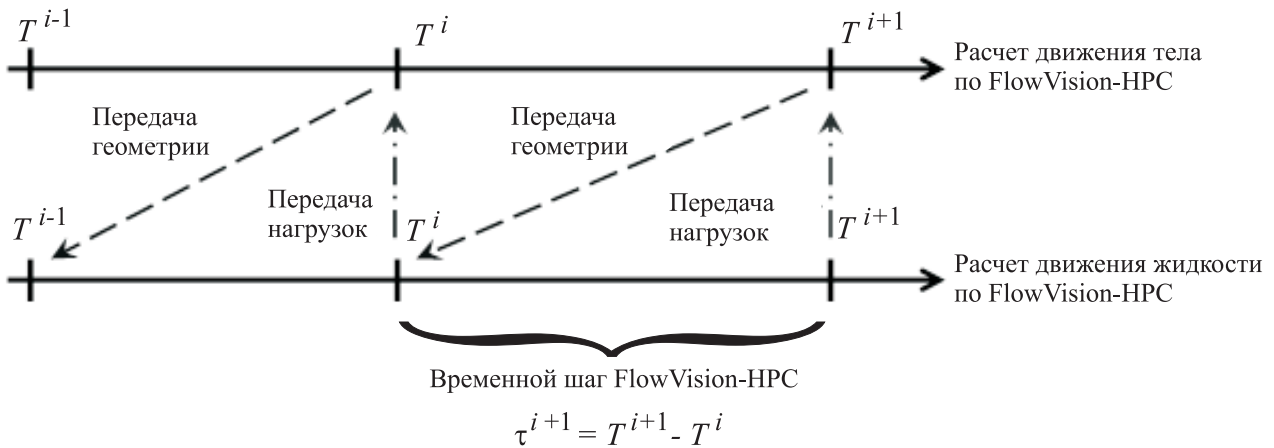


Рис. 1. Алгоритм сопряжения расчета движения твердых тел и расчета движения жидкости в FlowVision-HPC

Алгоритм сопряжения выглядит следующим образом (рис. 1).

1. Решается уравнение (4) для движения твердого тела. В результате решения определяются положение и скорость \mathbf{W}^{i+1} в момент времени T^{i+1} , при этом сила со стороны жидкости \mathbf{F}_f^i , полученная на предыдущем шаге обмена T^i , считается постоянной в течение всего интервала τ^{i+1} .

2. С учетом нового положения тела перестраивается сетка.

3. Значения скорости тела \mathbf{W}^{i+1} передаются в уравнения (5) и (6).

4. Решаются уравнения (5) и (6), определяется поле скоростей и давлений в жидкости и на поверхности тела: \mathbf{V}^{i+1} , P^{i+1} , D^{i+1} .

5. Вычисляется сила \mathbf{F}_f^{i+1} , действующая на тело со стороны жидкости, которая передается в уравнение (4).

Рассмотрим уравнение (6). Проблемы, возникающие при использовании явного метода, появляются из-за того, что в данном уравнении скорость жидкости \mathbf{V}^{i+1} вычислена при давлении и вязком напряжении с шага $i + 1$, а скорость поверхности тела \mathbf{W}^{i+1} — при значении силы с шага i . Подстановка последнего в разностную схему вызывает осцилляции давления и может привести к расхождению решения.

Для того чтобы предотвратить осцилляции, необходимо предугадать изменение скорости $\Delta \mathbf{W}$ на шаге $i + 1$ под действием силы со стороны жидкости. Оценим скорость по формуле $\Delta \mathbf{W} = \frac{\Delta l}{\tau} \mathbf{n}$, или $\Delta \mathbf{W} = \frac{\Delta l}{\Delta P} \frac{\Delta P}{\tau} \mathbf{n}$, где ΔP — изменение давления, Δl — перемещение при изменении давления на ΔP и \mathbf{n} — нормальный к поверхности вектор. Значение ΔP известно из уравнений (5) и (6), τ и \mathbf{n} определяются геометрией и шагом по времени. Значение Δl заранее не известно, однако его можно попытаться оценить вручную с учетом характеристик движения конструкции.

Введем демпфирующий коэффициент (параметр) податливости конструкции $C = \frac{\Delta l}{\Delta P}$. Физический смысл этого параметра — линейный отклик элемента подвижной конструкции на изменение давления. Тогда выражение для изменения скорости примет вид $\Delta \mathbf{W} = C \frac{\Delta P}{\tau} \mathbf{n}$.

С помощью параметра податливости можно прогнозировать изменение скорости тела, при движении

которого определяющую роль играет изменение внешней силы. Примерами могут послужить движение тела, закрепленного на пружине, или клапана в потоке. Однако параметр податливости никак не учитывает напрямую инертность конструкции. Для того чтобы учесть инертность, оценим изменение скорости конструкции под воздействием силы со стороны жидкости с учетом ее массы. Пусть давление за время τ меняется на величину ΔP . Изменение скорости элемента можно оценить исходя из уравнения $m \frac{\Delta W}{\tau} = \Delta P s t n$, откуда $\Delta W = \frac{\Delta P \tau s n}{m}$.

При решении уравнений (5) и (6) масса элемента конструкции m не известна, поэтому ее необходимо оценить вручную. Введем коэффициент (параметр) мобильности $B = \frac{s}{m}$. Мобильность можно охарактеризовать как величину, обратную инертности элемента конструкции с единичной площадью.

Выражение для изменения скорости с учетом мобильности будет выглядеть следующим образом: $\Delta W = B \Delta P \tau n$. Окончательное выражение для изменения скорости под воздействием силы со стороны жидкости имеет вид $\Delta W = C \frac{\Delta P}{\tau} n + B \Delta P \tau n$.

Подстановка выражения для изменения скорости в уравнение неразрывности (6) дает уравнение

$$\oint_S \left(\mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{W}^{i+1} - \left(C + B(\tau^{i+1})^2 \right) \frac{\Delta P^{i+1}}{\tau^{i+1}} \mathbf{n} \right) ds = 0,$$

или, поскольку C и B постоянны на поверхности интегрирования (т.е. внутри элемента жидкости), имеем

$$\oint_S (\mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{W}^{i+1}) ds = \left(C + B(\tau^{i+1})^2 \right) \frac{\Delta P^{i+1}}{\tau^{i+1}} s. \tag{7}$$

Выражение в правой части уравнения (7) может трактоваться как искусственная сжимаемость жидкости в пристенных ячейках.

В идеальном случае податливость и мобильность должны определяться для каждого элемента жидкости, контактирующего с твердым телом. Однако в первом приближении можно оценить их исходя из средних характеристик движения тела. В этом случае во всех пристенных ячейках параметр податливости C будет равен отношению предполагаемого перемещения тела на расстояние Δl под воздействием давления ΔP , а параметр мобильности B — отношению площади тела, взаимодействующей с жидкостью, к массе тела. С другой стороны, эти коэффициенты можно рассматривать как демпфирующие коэффициенты, предотвращающие неустойчивость явного метода расщепления, и получать их из решения модельных задач.

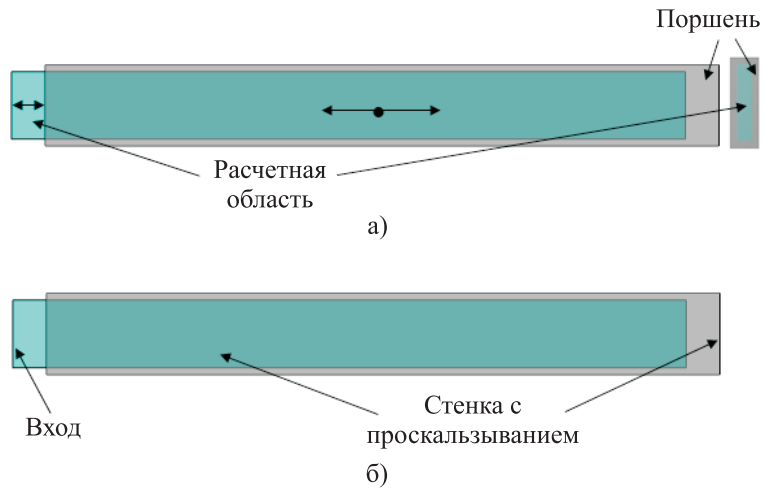


Рис. 2. Постановка задачи: расчетная область (а) и граничные условия (б)

4. Модельные расчеты. Исследуем влияние параметров податливости и мобильности при моделировании одномерного движения жесткого поршня под воздействием избыточного давления со стороны несжимаемой невязкой жидкости в резервуаре, на левом конце которого поддерживается постоянное давление. Такое упрощение позволяет исключить влияние других параметров, которые могут улучшать устойчивость разностной схемы. К таким параметрам можно отнести часто используемые коэффициенты релаксации, различные схемы предикторов в твердом теле и в жидкости и т.п. Сжимаемость и вязкость жидкости также делают решение более устойчивым. Область устойчивости схемы также зависит от точности разностной аппроксимации. Кроме того, такая упрощенная задача является физически устойчивой. Это важно, ибо часто бывает очень непросто отделить численную неустойчивость от физической.

Расчетная область представляет собой параллелепипед $1 \times 0.1 \times 0.02$. Поршень представляет собой параллелепипед $1 \times 0.12 \times 0.04$. Для того чтобы предотвратить протекание жидкости в зазорах между боковыми стенками расчетной области и поршнем, размеры поршня выбраны несколько больше, чем

размеры расчетной области (рис. 2а). На левой боковой границе расчетной области задано граничное условие “вход/выход — полное давление”, равное 10 000 Па. На остальных границах задано граничное условие “стенка с проскальзыванием”. На поверхности поршня задано граничное условие “стенка с проскальзыванием” (рис. 2б). В начальный момент времени граница поршня, соприкасающаяся с жидкостью, расположена на расстоянии 0.05 м от входа. Поршень имеет одну степень свободы вдоль наибольшего размера расчетной области. В процессе моделирования решаются уравнения Навье–Стокса (2) и неразрывности (3), а также уравнение движения недеформируемой конструкции. В качестве рабочего вещества используется вода, плотность которой равна $1000 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, а вязкость равна $0.001 \text{ кг}\cdot(\text{м}\cdot\text{с})^{-1}$. Задача решается в двумерной постановке. При моделировании используется расчетная сетка $500 \times 10 \times 1$.

Для исследования влияния параметра мобильности рассмотрим движение незакрепленного поршня. Определим конфигурацию, при которой пульсации давления достаточно существенны. Известно, что чем меньше отношение между плотностью тела и жидкости, тем больше вероятность возникновения неустойчивости [11]. Проведем серию расчетов при различных значениях безразмерной плотности поршня. Безразмерная плотность поршня вычисляется по формуле $\rho = \frac{\rho_s}{\rho_{\text{ж}}}$, где ρ_s — плотность материала поршня и $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости.

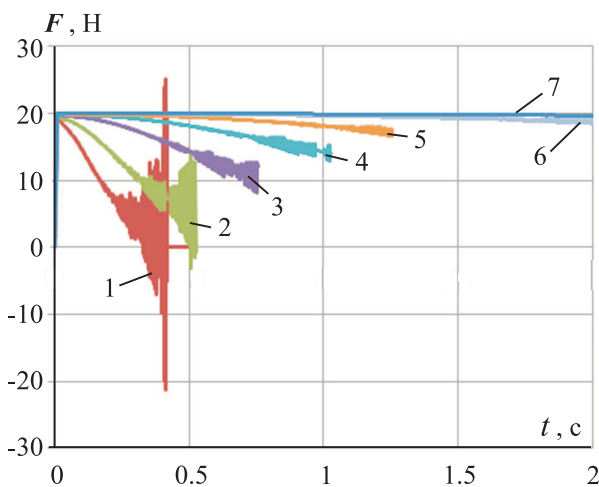


Рис. 3. Зависимость значения силы, действующей на незакрепленный поршень со стороны жидкости, от времени при различных значениях ρ : 1) 0.5; 2) 1; 3) 2.5; 4) 5; 5) 10; 6) 25; 7) 50

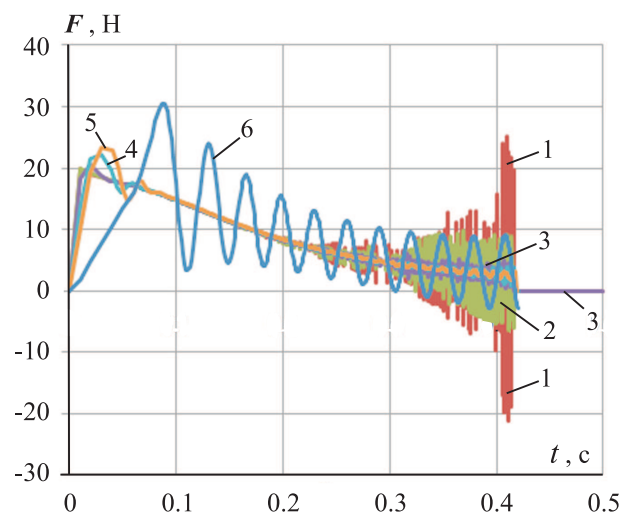


Рис. 4. Зависимость силы, действующей на незакрепленный поршень, от времени при различных значениях B : 1) 0; 2) $0.1 B_0$; 3) B_0 ; 4) $5 B_0$; 5) $10 B_0$; 6) $100 B_0$

Согласно полученным результатам, чем меньше плотность поршня, тем больше пульсации силы, действующей на поршень (рис. 3), причем, когда безразмерное значение плотности поршня становится меньше 1, величина пульсаций силы начинает превышать среднее значение силы, действующей на поршень.

Исследуем возможность устранения пульсаций силы посредством использования параметра мобильности. Исследование проведем для поршня, безразмерная плотность которого равна 0.5. Грубая оценка этого параметра по величине массы поршня и его площади дает значение $B_0 = 0.002$. Выполним серию расчетов при значениях параметра мобильности из интервала от $0.1 B_0$ до $100 B_0$.

Из результатов расчетов видно, что мобильность существенно влияет на поведение силы (рис. 4). При увеличении значения параметра мобильности амплитуда пульсаций силы уменьшается. Однако при существенном превышении значения B_0 ($B = 100 B_0$) возникают нефизичные низкочастотные колебания решения. Получено, что с точки зрения демпфирования колебаний оптимальное значение параметра мобильности лежит в интервале от B_0 до $10 B_0$.

Для исследования влияния параметра податливости C закрепим поршень при помощи невесомой пружины. В начальном положении пружина не деформирована. Сила, с которой пружина действует на поршень, задается формулой $F = -k\Delta l$, где k — жесткость пружины и Δl — смещение поршня из начального положения. Жесткость пружины k равна $10 \text{ Н}\cdot\text{м}^{-1}$. Оценка параметра C дает значение $C_0 = 0.0002$.

Определим конфигурацию, при которой пульсации давления достаточно существенны. Проведем серию расчетов при различных значениях массы поршня.

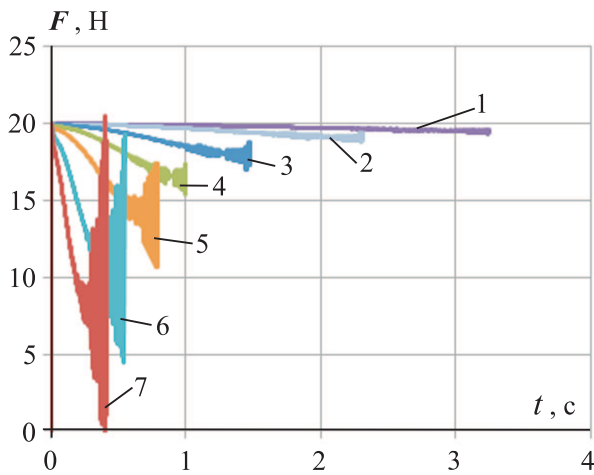


Рис. 5. Зависимость значения силы, действующей на закрепленный на пружине поршень со стороны жидкости, от времени при различных значениях ρ : 1) 50; 2) 25; 3) 10; 4) 5; 5) 2.5; 6) 1; 7) 0.5

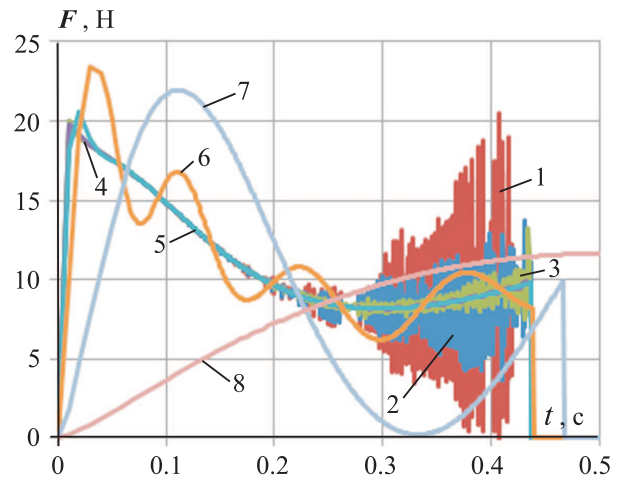


Рис. 6. Зависимость силы, действующей на закрепленный на пружине поршень, от времени при $B = 0$ и различных значениях C : 1) 0; 2) $10^{-6} C_0$; 3) $10^{-5} C_0$; 4) $10^{-4} C_0$; 5) $10^{-3} C_0$; 6) $10^{-2} C_0$; 7) $10^{-1} C_0$; 8) $C = C_0$

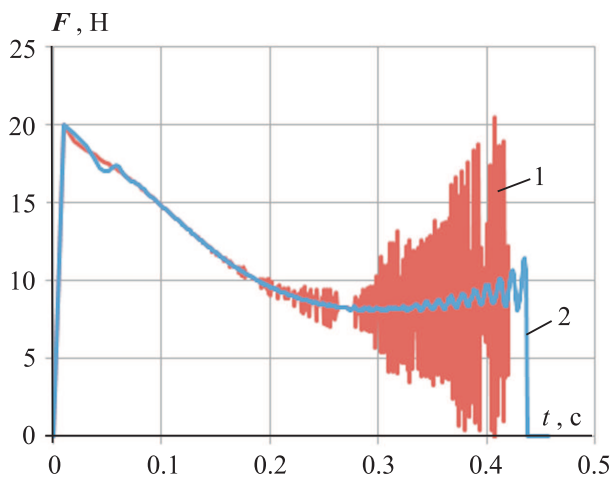


Рис. 7. Зависимость силы, действующей на закрепленный на пружине поршень, от времени при 1) $B = 0$ и 2) $B = 10 B_0$

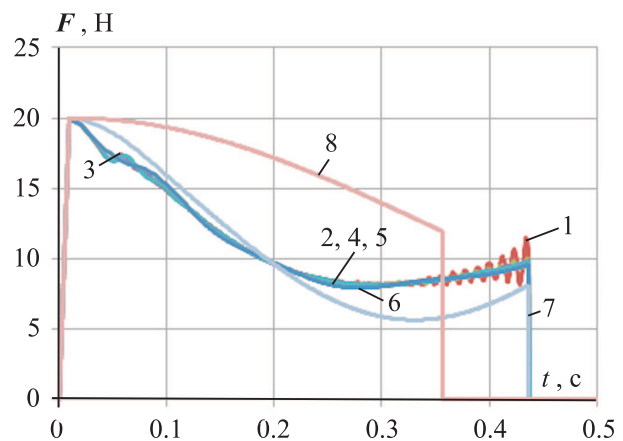


Рис. 8. Зависимость силы, действующей на закрепленный на пружине поршень, от времени при $B = 10 B_0$ и различных значениях C : 1) 0; 2) $10^{-5} C_0$; 3) $10^{-4} C_0$; 4) $10^{-3} C_0$; 5) $10^{-2} C_0$; 6) $10^{-1} C_0$; 7) $C = C_0$; 8) $C = 10 C_0$

Согласно полученным результатам, чем меньше плотность поршня, тем больше пульсации силы, действующей на поршень (рис. 5). Величина пульсаций становится существенной при значении безразмерной плотности, равной 10, и начинает превышать среднее значение силы, действующей на поршень, когда значение безразмерной плотности становится меньше 1.

Исследуем возможность устранения пульсаций силы посредством изменения параметра C . Исследования проведем для поршня, безразмерная плотность которого равна 0.5. Проведем расчеты при значениях C из интервала от $10^{-6} C_0$ до C_0 , что соответствует интервалу от 2×10^{-10} до 2×10^{-4} .

Из результатов расчетов видно, что параметр C существенно влияет на поведение силы (рис. 6). При увеличении значения параметра податливости от $10^{-6} C_0$ до $10^{-3} C_0$ амплитуда пульсаций силы уменьшается. Оптимальное решение получается при $C = 10^{-3} C_0$, т.е. при $C = 2 \times 10^{-7}$. Дальнейшее увеличение значения параметра податливости приводит к появлению низкочастотных колебаний силы.

Как и в предыдущем примере, попробуем устранить пульсации посредством изменения значений па-

раметра мобильности. Из результатов расчета следует, что использование значения $B = 10B_0$, полностью устранявшее колебания поршня, снижает пульсации силы, но не устраняет их полностью (рис. 7).

Проведем серию расчетов при $B = 10B_0$ и значениях параметра C из интервала от $10^{-5}C_0$ до $10C_0$, что соответствует интервалу от 2×10^{-9} до 2×10^{-3} . Из результатов видно, что в этом случае решение относительно устойчиво при значениях C из интервала от $10^{-4}C_0$ до $10^{-2}C_0$ (рис. 8). Таким образом, использование параметра мобильности позволяет расширить диапазон применения параметра податливости и сделать алгоритм более робастным по отношению к оценке этого параметра.

5. Выводы. Рассмотрено моделирование взаимодействия твердых конструкций с потоком жидкости в программном комплексе FlowVision-НРС. Обосновано введение параметров податливости и мобильности для устранения осцилляций решения при применении явной схемы расщепления для задач о взаимодействии жидкости и конструкций. Проведено исследование влияния коэффициентов демпфирования на примере моделирования движения свободного поршня и поршня, закрепленного на пружине, под воздействием давления со стороны жидкости. В ходе исследований установлено, что без использования коэффициентов демпфирования сила, действующая на поршень, имеет осциллирующий характер. Показано, что использование параметра мобильности для свободного поршня и параметра податливости для закрепленного на пружине поршня позволяет устранить осцилляции. В рамках расчетов определены наилучшие значения этих параметров для рассмотренной задачи.

Таким образом, использование пристенных демпфирующих коэффициентов позволяет существенно расширить границы устойчивости явного метода расщепления для расчета взаимодействия подвижной конструкции с жидкостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгазин С.Д., Куйко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006.
2. *Келдыш М.В.* Избранные труды. М.: Наука, 1985.
3. *Van Es G.W.H.* Hydroplaning of modern aircraft tires. National Aerospace Laboratory (NLR), Technical Paper TP-2001-242. Amsterdam, 2001.
4. *Макаров Г.В.* Уплотнительные устройства. Л.: Машиностроение, 1973.
5. *Черкасский В.М.* Насосы, вентиляторы, компрессоры. М.: Энергоатомиздат, 1984.
6. *Чернавский С.А.* Подшипники скольжения. М.: МАШГИЗ, 1963.
7. *Scotti C.M., Shkolnik A.D., Muluk S.C., Finol E.A.* Fluid-structure interaction in abdominal aortic aneurysms: effects of asymmetry and wall thickness // *BioMedical Engineering OnLine*. 2005. 4–64.
8. *Hubner B., Walhorn E., Dinkler D.* A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2004. **193**. 2087–2104.
9. *Piperno S., Farhat C., Larroturou B.* Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part I: Model problem, theory, and two-dimensional application // *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.* 1995. **124**, N 1-2. 79–112.
10. *Piperno S., Farhat C.* Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part II: Energy transfer analysis and three-dimensional applications // *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.* 2001. **190**, N 24-25. 3147–3170.
11. *Forster C.* Robust methods for fluid-structure interaction with stabilized finite elements. Bericht Nr. 51. Institut fur Baustatik und Baudynamik der Universitat Stuttgart. Stuttgart, 2007.
12. *Sachhs S.M., Stetnel D.C., Schafer M.* Implicit partitioned coupling with global multigrid in fluid-structure interaction // *Proc. of the V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010*. Lisbon, Portugal. 14–17 June 2010.
13. *Raback P., Ruokolainen J., Lyly M., Järvinen E.* Fluid-structure interaction boundary conditions by artificial compressibility // *ECCOMAS CFD 2001*. Swansea. 4–7 September 2001.
14. *Aksenov A., Iläine K., Schelayev A., Garipov A., Luniewsky T., Shmelev V.* Modeling fluid structure interaction for aerospace applications // *Proc. of Abaqus User Conference 2007*. Paris, France. 2006.
15. *Aksenov A. A., Dyadkin A.A., Pokhilko V.I.* Overcoming of barrier between CAD and CFD by modified finite volume method // *Proc. of 1998 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference*. San Diego, ASME PVP. 1998.

Поступила в редакцию
30.09.2010