

УДК 541.186

О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ БАЛАНСИРОВКИ ЛОКАЛЬНОГО И ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

К. А. Баркалов¹, В. В. Рябов¹, С. В. Сидоров¹

Данная работа продолжает развитие информационно-статистического подхода к минимизации многоэкстремальных функций при невыпуклых ограничениях, получившего название индексного метода глобальной оптимизации. Решение многомерных задач сводится к решению эквивалентных им одномерных. Редукция основана на использовании кривых Пеано, однозначно отображающих единичный отрезок вещественной оси на гиперкуб. Используется схема построения множества кривых Пеано (“вращаемые развертки”), которую можно эффективно применять при решении задачи на кластере с десятками и сотнями процессоров. Основное внимание уделяется применению смешанной локально-глобальной схемы вычислений для ускорения сходимости параллельного алгоритма, а также применению локального спуска при каждом улучшении оценки глобального оптимума (локальное уточнение рекорда) с последующим продолжением глобального поиска. Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (гранты МК-1536.2009.9 и НШ-64729.2010.9). Статья рекомендована к печати программным комитетом Международной научной конференции “Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи” (<http://agora.guru.ru/abrau>).

Ключевые слова: глобальная оптимизация, индексный метод, вращаемые развертки, смешанная стратегия, локально-глобальная стратегия, локальное уточнение, GKLS, операционные характеристики.

1. Введение. Данная работа продолжает развитие известного подхода к минимизации многоэкстремальных функций при невыпуклых ограничениях, описанного в работах [1–6] и получившего название индексного метода глобальной оптимизации. Подход основан на раздельном учете каждого ограничения задачи и не связан с использованием штрафных функций, при этом решение многомерных задач сводится к решению эквивалентных им одномерных. Соответствующая редукция основана на использовании кривых Пеано (называемых также развертками Пеано), однозначно отображающих единичный отрезок вещественной оси на гиперкуб. Используется схема построения множества кривых Пеано (“вращаемые развертки”), которую можно применять при решении задачи на кластерных системах с десятками и сотнями процессоров. Эта схема распараллеливания дополняется применением смешанной локально-глобальной стратегии поиска, заключающейся в чередовании итераций индексного метода и его локально-адаптивной модификации, что приводит к ускорению сходимости. Кроме того, в работе исследуется применение методов многомерного локального спуска из каждой точки, в которой достигается улучшение оценки глобального оптимума, причем локальный спуск может быть скомбинирован как с исходным глобальным методом, так и с его смешанной версией. Приведены результаты экспериментов по сравнению смешанного алгоритма с исходным индексным методом (с локальным уточнением рекордов и без него), а также с известным алгоритмом DIRECT [9], убедительно подтверждающие достоинство параллельной схемы построения множественных отображений в совокупности со смешанной стратегией поиска и локальными уточнениями рекордов. Эксперименты выполнены на вычислительном кластере ННГУ им. Н. И. Лобачевского, установленном в ходе выполнения нацпроекта “Образование”.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу глобальной оптимизации вида

$$\varphi = \varphi(y^*) = \min \{ \varphi(y) : y \in D, g_j(y) \leq 0, 1 \leq j \leq m \}, \quad (1)$$

где целевая функция $\varphi(y)$ (в дальнейшем обозначаемая также через $g_{m+1}(y)$) и левые части ограничений g_j , $1 \leq j \leq m$, удовлетворяют условию Липшица с соответствующими константами L_j , $1 \leq j \leq m+1$, а именно $|g_j(y_1) - g_j(y_2)| \leq L_j |y_1 - y_2|$, $y_1, y_2 \in D$.

¹ Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, факультет вычислительной математики и кибернетики, просп. Гагарина, 23, 603950, Нижний Новгород; К. А. Баркалов, ст. препод., e-mail: KonstantinBarkalov@yandex.ru; В. В. Рябов, мл. науч. сотр., e-mail: vasily.v.ryabov@gmail.com; С. В. Сидоров, инженер, e-mail: sidorov.sergey@gmail.com

Используя кривые типа развертки Пеано $y(x)$, однозначно отображающие отрезок $[0, 1]$ на N -мерный гиперкуб $D = \{y \in \mathbb{R}^N : -2^{-1} \leq y_i \leq 2^{-1}, 1 \leq i \leq N\} = \{y(x) : 0 \leq x \leq 1\}$, исходную задачу можно редуцировать к одномерной задаче $\varphi(y(x^*)) = \min \left\{ \varphi(y(x)) : x \in [0, 1], g_j(y(x)) \leq 0, 1 \leq j \leq m \right\}$.

Рассматриваемая схема редукции размерности сопоставляет многомерной задаче с липшицевой минимизируемой функцией и липшицевыми ограничениями одномерную задачу, в которой соответствующие функции удовлетворяют равномерному условию Гельдера [1], т.е. для $x', x'' \in [0, 1]$ и $1 \leq j \leq m + 1$ выполняется неравенство $\left| g_j(y(x')) - g_j(y(x'')) \right| \leq K_j |x' - x''|^{1/N}$, где N — размерность исходной многомерной задачи, а коэффициенты K_j связаны с константами Липшица L_j исходной задачи соотношениями $K_j \leq 4L_j \sqrt{N}$. Различные варианты индексного алгоритма для решения одномерных задач и соответствующая теория сходимости представлены в работах [3, 5].

3. Использование множественных отображений. Редукция многомерных задач к одномерным с помощью разверток имеет такие важные свойства, как непрерывность и сохранение равномерной ограниченности изменения функций при ограниченности вариации аргумента. Однако при этом происходит потеря части информации о близости точек в многомерном пространстве, так как точка $x \in [0, 1]$ имеет лишь левых и правых соседей, а соответствующая ей точка $y(x) \in \mathbb{R}^N$ имеет соседей по 2^N направлениям. Кроме того, при использовании отображений типа кривой Пеано близким в N -мерном пространстве образам y', y'' могут соответствовать достаточно далекие прообразы x', x'' на отрезке $[0, 1]$. Как результат, единственной точке глобального минимума в многомерной задаче соответствует несколько (не более 2^N) локальных экстремумов в одномерной задаче, что, естественно, ухудшает свойства одномерной задачи.

Сохранить часть информации о близости точек позволяет использование множества отображений

$$Y_L(x) = \{y^1(x), \dots, y^L(x)\} \tag{2}$$

вместо применения единственной кривой Пеано $y(x)$ [2, 4]. Каждая кривая Пеано $y^i(x)$ из $Y_L(x)$ может быть получена в результате некоторого сдвига вдоль главной диагонали гиперинтервала D . Таким образом сконструированное множество кривых Пеано позволяет получить для любых близких образов y', y'' , отличающихся только по одной координате, близкие прообразы x', x'' для некоторого отображения $y^i(x)$.

3.1. Вращаемые развертки. К числу недостатков ставшей уже классической схемы построения множественных разверток (далее будем называть их сдвигowymi развертками, или С-развертками) можно отнести, во-первых, наличие дополнительного ограничения, порождающего сложную допустимую область на одномерных отрезках, а во-вторых, при построении С-разверток число L-разверток (а следовательно, и число параллельно решаемых задач) зависело от требуемой точности поиска решения задачи. С позиции экономии вычислительных ресурсов было невыгодно использовать число разверток большее, чем $\lceil \log_2(\epsilon^{-1}) \rceil$. Например, при решении задачи с точностью 10^{-3} по координате целесообразно было выбирать число разверток, не большее 10.

Преодолеть эти недостатки, сохранив информацию о близости точек в N -мерном пространстве, позволяет схема построения множественных отображений, предложенная в [7]. Отличительной чертой этой схемы является построение множества кривых Пеано не с помощью сдвига вдоль главной диагонали гиперкуба, а поворотом развертки вокруг начала координат. При этом найдется отображение $y^i(x)$, которое точкам многомерного пространства y', y'' , которым при исходном отображении соответствовали достаточно далекие прообразы на отрезке $[0, 1]$, будет сопоставлять более близкие прообразы x', x'' . Развертки, порождаемые в соответствии с новой схемой, будем называть вращаемыми развертками, или В-развертками. Максимальное число различных поворотов развертки, отображающей N -мерный гиперкуб на одномерный отрезок, составляет 2^N . Использование всех из них является избыточным, требуется выбрать лишь часть из всех возможных вариантов.

В предложенной схеме преобразование развертки осуществляется в виде поворота на угол $\pm\pi/2$ в каждой из координатных плоскостей. Число подобных пар поворотов определяется числом координатных плоскостей пространства, которое равно $C_N^2 = \frac{1}{2} N(N - 1)$, а общее число преобразований будет равно $N(N - 1)$. Учитывая исходное отображение, приходим к заключению, что данный способ позволяет строить до $N(N - 1) + 1$ разверток для отображения N -мерной области на соответствующие одномерные отрезки. При этом дополнительное ограничение, которое возникало при построении С-разверток [2], отсутствует. В случае необходимости данный способ построения множества отображений может быть легко "отмасштабирован" для получения большего (вплоть до 2^N) числа разверток.

3.2. Параллельный индексный метод. Использование множества отображений (2) приводит к

формированию соответствующего множества одномерных многоэкстремальных задач

$$\min \left\{ \varphi(y^l(x)) : x \in [0, 1], g_j(y^l(x)) \leq 0, 1 \leq j \leq m \right\}, \quad 1 \leq l \leq L. \quad (3)$$

Каждая задача из данного набора может решаться независимо, при этом любое вычисленное значение $z = g_\nu(y')$, $y' = y^i(x')$ функции $g_\nu(y)$ в i -й задаче может интерпретироваться как вычисление значения $z = g_\nu(y')$, $y' = y^s(x'')$ для любой другой s -й задачи без повторных трудоемких вычислений функции $g_\nu(y)$. Подобное информационное единство позволяет решать исходную задачу (1) путем параллельного решения индексным методом L задач вида (3) на наборе отрезков $[0, 1]$. Каждая одномерная задача решается на отдельном процессоре. Для организации взаимодействия на каждом процессоре создается L очередей, в которые процессоры помещают информацию о выполненных итерациях. Используемая схема не содержит какого-либо единого управляющего процессора, что увеличивает надежность выполняемых вычислений. Подробное описание решающих правил параллельного индексного алгоритма глобальной оптимизации приведено в работе [8].

3.3. Смешанная локально-глобальная стратегия. *Локально-адаптивный алгоритм* является модификацией индексного метода глобального поиска, состоящей в том, что, начиная с некоторого шага, при выборе точек итераций используется дополнительная информация — текущие оценки плотности вероятности для расположения точки искомого оптимума. Оценки плотности определяются по значениям функционалов задачи, вычисленных в точках выполненных итераций. Таким образом, плотность переоценивается после каждой итерации, причем максимумы плотности соответствуют окрестностям точек текущих оптимальных значений.

Подробно решающие правила локально-адаптивного метода приведены, например, в [6]. Существенным параметром этого метода является целое число $0 \leq \alpha \leq 30$, влияющее на характер сходимости. При $\alpha = 0$ поиск носит глобальный характер, при $\alpha = 30$ — локальный. *Смешанный алгоритм* является модификацией индексного метода глобального поиска, состоящей в том, что, начиная с некоторого шага, итерации, определяемые правилами индексного метода, чередуются с итерациями, определяемыми правилами локально-адаптивного алгоритма. Частота чередования является параметром метода. Данная схема естественным образом адаптируется к параллельному индексному методу с вращаемыми развертками.

3.4. Локальное уточнение рекордов. Для быстрого уточнения текущих оценок глобально-оптимальных решений может быть применено *локальное уточнение рекордов*. Оно заключается в применении одного из методов многомерного локального спуска при каждом улучшении оценки глобального оптимума. Метод построения неравномерного покрытия области (глобальный либо смешанный) продолжает свою работу после окончания локального спуска, причем конечная точка локального спуска добавляется в базу поисковой информации для глобального поиска, тогда как промежуточные точки траектории спуска используются лишь для уточнения адаптивной оценки константы Липшица. В данной работе экспериментально показано, что даже применение достаточно простого метода наискорейшего координатного спуска с переменным шагом дает улучшение сходимости без потери глобального оптимума.

4. Результаты экспериментов. На кафедре математического обеспечения ЭВМ факультета вычислительной математики и кибернетики ННГУ им. Н. И. Лобачевского разрабатывается программный комплекс параллельной глобальной оптимизации Global Expert, одной из особенностей которого является быстрая работа с большими объемами поисковой информации (т.е. с совокупностью всех точек, в которых вычислялись функции задачи), включая собственную подсистему подкачки, учитывающую особенности алгоритмов глобального поиска. В рамках данной работы реализована поддержка смешанной локально-глобальной схемы в подсистеме хранения поисковых данных. Смешанная схема поддерживается также и в режиме возобновления вычислений после предшествующей остановки поиска (например по исчерпанию вычислительных ресурсов).

4.1. Классы тестовых функций. При сравнении методов глобальной оптимизации, ориентированных на определенные классы задач, является актуальным вопрос выбора тестовых задач для сравнения. В литературе встречается немало различных классов липшицевых многоэкстремальных функций для минимизации, многие из которых генерируются автоматически. Среди подобных генераторов одним из наиболее востребованных является GKLS, описанный, например, в [12] и доступный для свободного скачивания (сокращение по первым буквам фамилий авторов). Отличительной особенностью GKLS является прозрачный способ задания сложности генерируемых

Таблица 1

Параметры GKLS-генератора для классов тестовых функций

Класс	N	M	f^*	d	r_g
1-simple	2	10	-1.0	0.66	0.33
2-hard	2	10	-1.0	0.90	0.20
3-simple	3	10	-1.0	0.66	0.33
4-hard	3	10	-1.0	0.90	0.20
5-simple	4	10	-1.0	0.66	0.33
6-hard	4	10	-1.0	0.90	0.20

задач: количество локальных минимумов, размеры областей притяжения и многое другое. Все это во многом определило использование GKLS в данной работе. В работе [13] для сравнения методов глобальной оптимизации описывается шесть классов тестовых задач по 100 функций каждый. В табл. 1 приведены параметры GKLS-генератора для каждого класса. Здесь N — размерность, M — количество локальных минимумов, f^* — значение функции в точке глобального оптимума, d — расстояние точки глобального оптимума от вершины базового параболоида, r_g — радиус области притяжения глобального оптимума. Областью поиска является $[-1.0, 1.0]^N$.

4.2. Сравнение с известными алгоритмами. Алгоритм глобальной оптимизации DIRECT и его модификация LBDIRECT (Locally-Biased DIRECT) подробно описаны в [9–11], а из работы [13] использованы результаты экспериментов для приведенных классов тестовых функций для DIRECT и для исходного индексного метода глобального поиска, который также известен как алгоритм Стронгина с индексной схемой учета ограничений (обозначим его AG, как в [13]). Введем следующие сокращения: AG-R — индексный метод с вращаемыми развертками и AG-R-mixed — индексный метод с вращаемыми развертками и смешанной стратегией. Как и в работе [13], здесь для каждой задачи использовалось правило останова $\|y - y^*\| \leq \rho$, т.е. достижение известного глобального оптимума с заданной точностью. Для задач размерности $N = 2, 3$ использовалось $\rho = 0.01\sqrt{N}$, а для $N = 4$ бралось $\rho = 0.02\sqrt{N}$. Параметры индексного метода и его модификаций: $m = 10$ — плотность развертки, $r = 3.2, 3.8$ — параметр надежности для AG-R и AG-R-mixed (в зависимости от числа разверток выбран так, чтобы решалось 100% задач или максимально близко к 100% для всех 6 классов). В AG-R-mixed каждая четвертая итерация — локально-адаптивная с параметром $\alpha = 15$.

Таблица 2
Сравнение AG-R-mixed и других алгоритмов в худшем случае

Класс задач	N	Direct	AG	AG-R	AG-R	AG-R	AG-R mixed	AG-R mixed	AG-R mixed
				$L = 2$ $r = 3.8$	$L = 4$ $r = 3.8$	$L = 6$ $r = 3.2$	$L = 2$ $r = 3.8$	$L = 4$ $r = 3.8$	$L = 6$ $r = 3.2$
1-simple	2	127	239	587	—	—	221	—	—
1-simple*		—	77	183	—	—	141	—	—
2-hard	2	1159	938	90000 (2)	—	—	90000 (1)	—	—
2-hard*		—	90000 (1)	938	—	—	90000 (2)	—	—
3-simple	3	1179	3945	3505	5330	4276	1301	961	1013
3-simple*		—	929	537	751	1242	910	804	1066
4-hard	3	77951	26964	11672	15057	18535	7513	9025	90000 (1)
4-hard*		—	8231	7890	7105	90000 (1)	8601	6817	90000 (1)
5-simple	4	90000 (1)	27682	31611	36551	17399	7057	5221	9697
5-simple*		—	7028	10711	14985	8825	7369	6325	7538
6-hard	4	90000 (43)	90000 (1)	90000 (2)	90000 (2)	90000 (3)	90000 (2)	61613	81081
6-hard*		—	90000 (2)	61590	90000 (1)	68011	75065	62565	82187

В табл. 2 и 3 приведены максимальные и средние значения количества испытаний, затраченные методами для достижения глобального оптимума с заданной точностью. Если не все 100 задач были решены, то в скобках указано количество нерешенных задач. Прочерк означает неприменимость метода с указанным количеством разверток для задач слишком маленькой размерности, поскольку максимальное число разверток в текущей реализации $L = N(N - 1)$. В строках таблиц с пометкой * приведены результаты поиска с локальным уточнением рекордов.

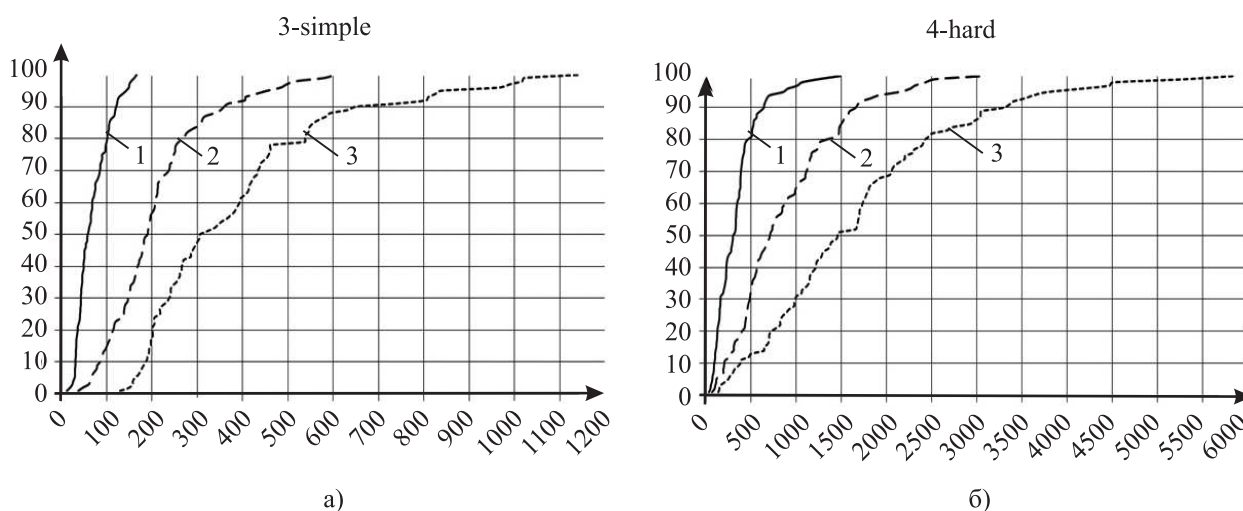
Таблица 3

Сравнение AG-R-mixed и других алгоритмов в среднем

Класс задач	N	Direct	AG	AG-R	AG-R	AG-R	AG-R mixed	AG-R mixed	AG-R mixed
				$L = 2$ $r = 3.8$	$L = 4$ $r = 3.8$	$L = 6$ $r = 3.2$	$L = 2$ $r = 3.8$	$L = 4$ $r = 3.8$	$L = 6$ $r = 3.2$
1-simple	2	68.1	90.1	198.1	—	—	94.4	—	—
1-simple*		—	16	24	—	—	23.3	—	—
2-hard	2	208.6	333.1	2168.7	—	—	1080	—	—
2-hard*		—	> 331.6	124.2	—	—	> 144.3	—	—
3-simple	3	238.1	817.7	1359.1	1963.9	1239.7	346.7	370.5	336.8
3-simple*		—	118.8	113.9	106.8	123.7	123.4	117.5	121.8
4-hard	3	5857.2	3541.8	4483.3	5652.7	4125.5	1798.9	1689.8	2543.1
4-hard*		—	1226.2	1266.9	1234	> 1245	1362.9	1403.5	> 1359
5-simple	4	> 12206	3950.4	4179.2	5752.7	3470.0	1387.5	1536.1	1315.6
5-simple*		—	1079.2	1293.4	1639.8	856.6	993.5	1202.2	931.3
6-hard	4	> 57333	> 22315	> 24038	> 27548	> 28791	> 18642	16416	16935
6-hard*		—	> 15408	14322	> 15622	13398	16865	16238	14873

Полученные данные убедительно показывают в целом превосходство последовательного смешанного индексного метода с вращаемыми развертками, особенно с ростом размерности и сложности решаемых задач. Заметим, однако, что подбор одинакового для всех классов задач параметра надежности r затруднен: 2-й, 4-й и 6-й классы задач порой решаются на 98–99%, а для одной-двух оставшихся задач небольшое варьирование r приводит к их решению. Здесь намеренно не приводятся результаты такого варьирования, хотя в результатах, взятых из [13], такое варьирование присутствует.

4.3. Сравнение с параллельным методом. В рамках данной работы реализована модификация параллельного индексного метода, использующая смешанную локально-глобальную стратегию без локального уточнения рекордов (реализация локального уточнения требует дополнительных способов балансировки процессов параллельного метода, находящихся в режиме уточнения и в режиме глобального поиска).



Операционные характеристики на задачах, порожденных GKLS-генератором ($N=3$).

Рисунок а): кривая 1 — $p = 6$ (max 166), кривая 2 — $p = 2$ (max 604), кривая 3 — $p = 1$ (max 1145).

Рисунок б): кривая 1 — $p = 6$ (max 1489), кривая 2 — $p = 2$ (max 3084), кривая 3 — $p = 1$ (max 5853)

Для более полного сравнения методов может быть использован аппарат операционных характеристик, предложенный В. А. Гришагиным [1]. Операционная характеристика метода — это кривая, пока-

зависимость числа решенных задач из определенного класса от числа испытаний. На рисунке приведены операционные характеристики последовательного и параллельного индексного метода со смешанной локально-глобальной стратегией. Указанное расположение кривых показывает, что параллельный индексный метод обеспечивает в среднем значительно более быстрое получение оценок, лежащих в заданной окрестности решения, чем его последовательный прототип. Для последовательного метода число итераций k совпадает с количеством испытаний K , а при применении параллельной версии $K \approx kL$. Отметим, что оценка по итерациям косвенно характеризует выигрыш по времени от применения параллельных реализаций. Таким образом, для 6 процессов выигрыш по времени на классе функций 3-simple (при условии правильного решения всех задач) примерно равен 6.9 раза, а на классе 4-hard — 3.9 раза.

Дадим оценки избыточности. Анализируя результаты для класса 3-simple, можно оценить общее количество вычислений функций, выполненных параллельной версией, исходя из общего числа итераций (оно составило 166), необходимого для решения 100% задач. Общее число измерений функции (в худшем случае) при этом оценивается как $166L = 996$ на задачу. Для полного решения всех задач в худшем случае последовательной версии потребовалось 1145 итераций. Таким образом, коэффициент избыточности по количеству испытаний при $L = 6$ за счет параллелизма может быть оценен как $\frac{996}{1145} \approx 0.87$. Аналогичный способ оценивания для второго эксперимента (4-hard) дает оценку избыточности, равную $\frac{1489L}{5853} \approx 1.53$.

5. Заключение. В рамках данной работы программно реализована модификация последовательного и параллельного индексного метода с вращаемыми развертками путем внедрения смешанной локально-глобальной схемы выполнения вычислений и локального уточнения рекордов. Проведено исследование эффективности этих стратегий в последовательном и параллельном случае на шести классах автоматически сгенерированных многоэкстремальных задач различной сложности. Результаты наглядно подтверждают ускорение сходимости, а эффективный параллелизм позволяет еще дальше отодвинуть порог сложности решаемых задач. Отметим также, что существуют параллельные реализации метода DIRECT и его модификаций. Сравнение с ними параллельного индексного метода может стать одним из дальнейших направлений исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума. М.: Знание, 1990.
2. Стронгин Р.Г. Параллельная многоэкстремальная оптимизация с использованием множества разверток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. **31**, № 8. 1173–1185.
3. Стронгин Р.Г., Баркалов К.А. О сходимости индексного алгоритма в задачах условной оптимизации с ϵ -резервированными решениями // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1999. 273–288.
4. Strongin R.G., Sergeyev Ya.D. Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
5. Баркалов К.А., Стронгин Р.Г. Метод глобальной оптимизации с адаптивным порядком проверки ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. **42**, № 9. 1338–1350.
6. Баркалов К.А. Ускорение сходимости в задачах условной глобальной оптимизации. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2005.
7. Баркалов К.А., Рябов В.В., Сидоров С.В. Использование кривых Пеано в параллельной глобальной оптимизации // Материалы IX Международной конференции-семинара “Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах”. Владимир, 2009. 44–47.
8. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Баркалов К.А. Параллельные методы решения задач глобальной оптимизации // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2009. **52**, № 10. 25–32.
9. Jones D.R., Perttunen C.D., Stuckman B.E. Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant // J. of Optimization Theory and Applications. 1993. **79**, N 1. 157–181.
10. Gablonsky M.J. Modifications of the DIRECT algorithm. Ph.D. thesis, North Carolina State University. Raleigh, 2001.
11. Gablonsky M.J., Kelley C.T. A locally-biased form of the DIRECT algorithm // J. of Global Optimization. 2001. **21**, N 1. 27–37.
12. Gavano M., Kvasov D.E., Lera D., Sergeyev Ya.D. Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization // ACM TOMS. 2003. **29**, N 4. 469–480 (<http://si.deis.unical.it/~yaro/GKLS.html>).
13. Lera D., Sergeyev Ya.D. Lipschitz and Hölder global optimization using space-filling curves // Applied Numerical Mathematics. 2010. **60**, N 1–2. 115–129.

Поступила в редакцию
30.10.2010