

УДК 517.958532

ПОСТРОЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГРАВИТАЦИОННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Б. П. Рыбакин¹, Н. И. Шидер²

Предложены две разностные схемы для решения двух- и трехмерных уравнений гравитационной газовой динамики, основанные на известных схемах типа TVD (Total Variation Diminishing). Качество полученных алгоритмов продемонстрировано на ряде тестовых расчетов: взаимодействие ударных волн с областями газа пониженной плотности, процесс образования ударных волн и вихрей и моделирование процесса самогравитации газового облака. Проведенные численные расчеты показали, что предлагаемые схемы и компьютерные программы позволяют с достаточной точностью решать задачи газовой динамики, представляющие практический интерес. Статья рекомендована к печати программным комитетом Международной научной конференции «Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи» (<http://agora.guru.ru/abrau>).

Ключевые слова: математическое моделирование, газовая динамика, графические процессоры.

1. Введение. Математическое моделирование важных для практики задач газовой динамики требует применения нелинейных схем высокого порядка точности с ограничением полной вариации, которые позволяют проводить расчеты ударных волн с большим разрешением и предотвращать нефизические осцилляции за их фронтом. Первая из предлагаемых разностных схем основана на методе предиктор–корректор и является модификацией схемы Nessyahu и Tadmor [1]. Вторая схема, основанная на идеях методов типа TVD (Total Variation Diminishing), позволяет проводить газодинамические расчеты в двумерном и трехмерном случаях [2–4].

2. Постановка задачи. Создание численных схем высокого разрешения для решения многомерных задач гравитационной газовой динамики дает возможность решать различные астрофизические задачи. Основные современные космологические модели основываются на предположении о существовании во Вселенной двух типов вещества — барионного (baryonic matter) и так называемого темного вещества (dark matter). Если первый тип вещества мы можем наблюдать непосредственно в виде звезд, газо-пылевых туманностей и т.д., то темное вещество непосредственно невидимо, но именно оно дает основной вклад в гравитационную массу Вселенной. В масштабах галактик доминирующая роль принадлежит движению газопылевых масс, которое описывается уравнениями газовой динамики с учетом сил гравитации [5, 6]. Для достаточно точного описания таких задач необходимо использовать высокоразрешающие разностные схемы [12]. Основной задачей схем высокого разрешения является использование схем как можно более высокого порядка. Кроме того, для подавления осцилляций в областях больших градиентов необходимо добавлять разумную диссипацию [7].

Для проверки работоспособности разностной схемы и программы использовалась задача взаимодействия ударной волны с цилиндрической или сферической полостями, заполненными газом с пониженной плотностью. Кроме того, такие примеры являются хорошими тестовыми задачами для проверки различных методов и программ. С практической точки зрения эти задачи позволяют изучать процессы образования вихрей при контактном взаимодействии нескольких газов с различными параметрами [2]. Уравнения движения самогравитирующего газа в консервативном виде можно записать в форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

вместе с уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (2)$$

¹ Научно-исследовательский институт системных исследований, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, 119899, Москва; ведущий науч. сотр., e-mail: rybakin1@mail.ru

² Институт математики и информатики АН Молдовы, ул. Академическая, 5, MD 2028, Кишинев; инженер-программист, аспирант, e-mail: natalia.shider@gmail.com

Здесь \mathbf{U} — вектор консервативных переменных, \mathbf{F}_x , \mathbf{F}_y и \mathbf{F}_z — потоки переменных. В уравнении (2) $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, G и ρ обозначают гравитационный потенциал, гравитационную постоянную и плотность соответственно.

В уравнении (1) для идеального газа с самогравитацией векторы \mathbf{U} и \mathbf{F}_x представляются в виде

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \rho E)^T, \quad \mathbf{F}_x = (\rho v_x, \rho v_x^2 + p + \rho g_x, \rho v_x v_y, \rho v_x v_z, \rho E + p + \rho g)^T,$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ — компоненты скорости, $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)^T = -\nabla \Phi$ представляет гравитационное поле, $E = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}$ — общая энергия, ρ — плотность и p — давление. Члены \mathbf{F}_y и \mathbf{F}_z выписываются аналогично [5]. В качестве уравнения состояния используется уравнение состояния идеального газа с $\gamma = 5/3$, $p = (\gamma - 1)\varepsilon$. В приведенных выше уравнениях ρ — плотность, \mathbf{v} — скорость, p — давление и ε — удельная внутренняя энергия; уравнение полной энергии имеет вид $e = \rho v^2/2 + \varepsilon$.

3. Дискретизация. Многие современные численные схемы высокого разрешения для решения газодинамических задач используют подход, предложенный Годуновым [8]. Этот метод иногда называют методом конечных объемов. В них, как правило, используется двухшаговый алгоритм типа предиктор–корректор. Решение осуществляется на однородной кубической сетке с $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ для оси x . В таких схемах используются средние значения $u(x, y, z, t)$ в направлении оси x : $\bar{u}(x, t) \equiv \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} u(s, t) ds$, $I_x \equiv \{s : |s - x| \leq \Delta x/2\}$ так, что интегрирование уравнений (1) в прямоугольнике $I_x \times [t, t + \Delta t]$ дает эквивалентную формулировку:

$$\bar{u}(x, t + \Delta t) = \bar{u}(x, t) - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{I_x}^{t+\Delta x} f\left(u\left(x + \frac{\Delta x}{2}, \tau\right)\right) d\tau - \int_{I_x}^{t+\Delta x} f\left(u\left(x - \frac{\Delta x}{2}, \tau\right)\right) d\tau \right]. \quad (3)$$

Другим классом разностных схем являются центральные схемы типа Мак-Кормака или Лакса–Вендроффа. Однако оригинальные разностные схемы такого типа обладают большой схемной вязкостью и, как следствие, плохим разрешением. Nessyahu и Tadmor [1] предложили схему второго порядка точности, в которой они заменили кусочно-постоянную аппроксимацию на линейную интерполяцию. Таким образом, схемы Nessyahu и Tadmor обладают значительно лучшим разрешением, чем противопотоковые схемы, и в то же время проще схем, использующих инварианты Римана.

Среднюю величину \bar{w}_j^n вычислим в момент времени t^n в ячейке $I_j \equiv \{x : x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}\}$. Для вычисления среднего значения в ячейке $I_{j+1/2} \equiv \{x : x_j \leq x \leq x_{j+1}\}$ на временном слое t^{n+1} необходимо построить кусочно-линейный интерполяционный полином по известным средним значениям \bar{w}_j^n в момент времени t^n .

Кусочно-линейная (piecewise-linear) аппроксимация в одномерном случае может быть представлена в виде

$$w(x, t^n) = \sum \left[\bar{w}_j^n + w_j' \left(\frac{x - x_j}{\Delta x} \right) \right] \chi_j(x),$$

где $\chi_j(x)$ — характеристическая функция ячейки, а w_j' — ограничитель первого порядка, который построен по средним значениям окружающих ячеек $\{\bar{w}_j^n\}$. Если $\{\bar{w}_j^n, t \geq t^n\}$ является точным решением законов сохранения $w_t + f(w)_x = 0$, то мы имеем центральную разностную схему, в отличие от противопотоковой схемы типа Годунова. Пусть $\bar{w}_{j+1/2}^n(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_{j+1/2}} w(\xi, t) d\xi$ обозначает это смещенное к центру

ячейки $x_{j+1/2} = (j + 1/2)\Delta x$ среднее значение. Тогда интегрирование по контрольному объему приводит (аналогично (3)) к соотношению

$$\bar{w}_{j+1/2}^n(t^{n+1}) = \bar{w}_{j+1/2}^n(t^n) - \lambda \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w_{j+1}(\tau)) d\tau - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w_j(\tau)) d\tau \right], \quad (4)$$

где $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ — обычное ограничение на шаг по времени.

Средние кусочно-линейные величины, построенные в момент времени $t = t^n$, дают выражения

$$\bar{w}_{j+1/2}^n(t^{n+1}) = \frac{1}{2} (w_{j+1}^n + w_j^n) + \frac{1}{8} (w'_j - w'_{j-1}).$$

Можно показать, что $\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(w_j(\tau)) d\tau \sim f(w_j(t^{n+1/2}))$.

Шаг “предиктор” завершается вычислением величин

$$w_j^{n+1/2} = \bar{w}_j^n - \frac{\lambda}{2} (f(w_j))'. \quad (5)$$

Величины на шаге “корректор” находятся следующим образом:

$$\bar{w}_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{w}_j^n + \bar{w}_{j+1}^n) + \frac{1}{8} (w'_j + w'_{j+1}) - \lambda [f(w_{j+1}^{n+1/2}) - f(w_j^{n+1/2})]. \quad (6)$$

Здесь w'_j и $f(w_j)'$ обозначают пространственные ограничители (spatial discrete slopes) соответствующих сеточных функций. Более подробно эти ограничители описаны в работах [9, 10].

Чтобы получить не сдвинутую на $1/2$ схему, можно переписать кусочно-линейную схему (6) в форме

$$\begin{aligned} \bar{w}_j^{n+1} = \frac{1}{4} (\bar{w}_{j-1}^n + 2\bar{w}_j^n + \bar{w}_{j+1}^n) - \frac{1}{16} ((w_x)_{j+1} - (w_x)_{j-1}) - \\ - \frac{\lambda}{2} [f(w_{j+1}^{n+1/2}) - f(w_{j-1}^{n+1/2})] - \frac{1}{8} ((w_x)_{j+1/2} - (w_x)_{j-1/2}). \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнении (7) $(w_x)_j$ и $(w_x)_{j+1/2}$ — дискретные производные по времени на t^n и t^{n+1} шагах по времени. Величина $w_j^{n+1/2}$ определяется на шаге “предиктор” по (5). Для данной центральной разностной схемы необходимо соблюдать условие устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви.

В двумерном случае построим кусочно-линейную аппроксимацию $\bar{w}_{i,j}^n$ для средних величин, отнесенных к центрам ячеек C_{ij} : $C_{ij} = \left\{ (\xi, \eta) : |\xi - x_i| \leq \frac{\Delta x}{2}, |\eta - y_j| \leq \frac{\Delta y}{2} \right\}$.

На шаге “предиктор” вычислим

$$w(x, y, t^n) = \sum \left[\bar{w}_{ij}^n + w'_{ij} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) + \dot{w}_{ij} \left(\frac{y - y_j}{\Delta y} \right) \right] \chi_{ij}(x, y),$$

где w'_{ij} и \dot{w}_{ij} — ограничители по осям x и y . Далее аналогично (4)–(7).

Рассмотрим прямоугольную область $R : \{-1.0 \leq x \leq 1.0, -0.5 \leq y \leq 0.5\}$, заполненную покоящимся газом. Плотность $\rho_0 = 1.0$ и давление $p_0 = 1.0$ одинаковы во всей области. В точке $x = 0.5, y = 0.0$ размещается область размером $a = 0.25$, заполненная газом с плотностью $\rho = 1/29$ и давлением $p = 1.0$. Кроме того, в области $\{x > 3/4, -0.5 \leq y \leq 0.5\}$ задается ударная волна со следующими параметрами: $(p, \rho, u, v)^T = (2/3, 4/3, -707/2000, 0)^T$. Ударная волна, которая движется влево, начинает взаимодействовать с областью газа пониженной плотности. Результаты расчетов приведены на рис. 1. Отметим формирование симметричного вихря на последних рисунках. Приведенные результаты демонстрируют надежность и устойчивость предложенной схемы для решения гиперболических законов сохранения.

Более сложной является задача исследования взаимодействия пространственной ударной волны с областями газа пониженной плотности в трехмерной постановке.

Пусть область $R : \{0 \leq x \leq 1.0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ представляет собой параллелепипед, заполненный покоящимся газом с плотностью $\rho_0 = 1.0$ и давлением $p_0 = 1.0$ [2].

В этой области находятся два взаимно перпендикулярных цилиндра одинакового радиуса $r = 0.2$. Первый цилиндр расположен вдоль оси z и симметрично относительно осей $x = y = 0$. Давление в этом цилиндре $p = 10.0$, а плотность газа $\rho = 1.0$. Другой цилиндр параллелен оси y с симметрией по осям $x = 0.4$ и $z = 0$ (рис. 2). Давление в этом цилиндре $p = 1.0$, а плотность $\rho = 0.1$. В результате взаимодействия газов с такими начальными условиями возникает система ударных волн, контактных поверхностей и волн разрежения. На рис. 2 приведены результаты расчетов. Уровни равной плотности на рисунках обозначены каждая своим цветом. Отметим отсутствие осцилляций за фронтами волн и хорошее разрешение всех особенностей течения.

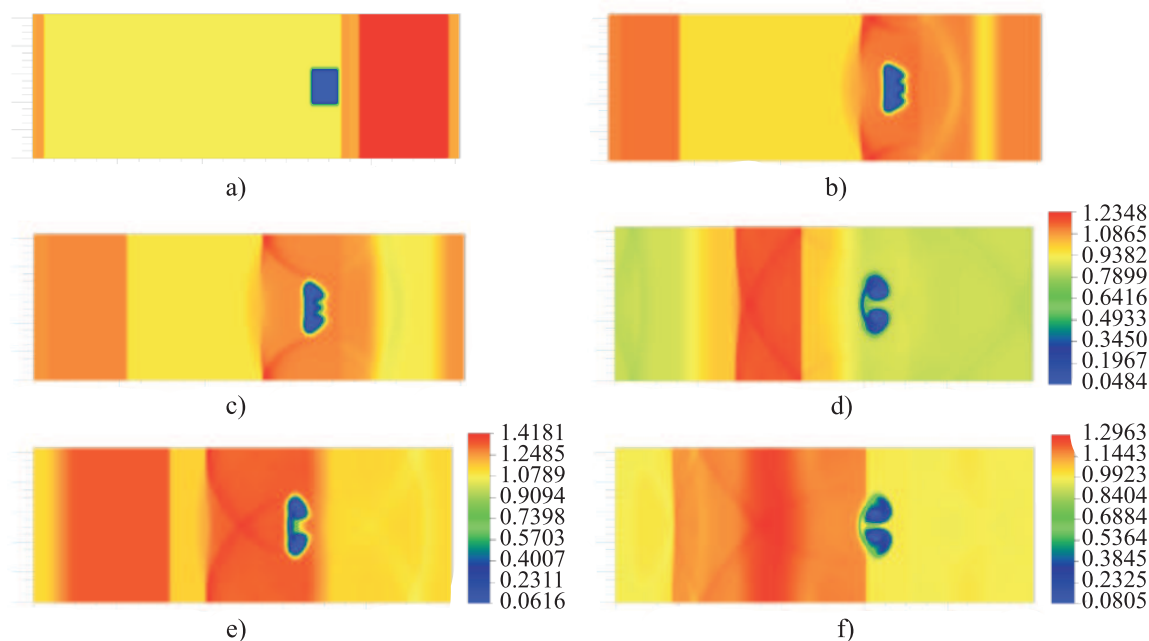


Рис. 1. Приведены изоденсы в моменты времени $t = 0.12$ (a), $t = 2.335$ (b), $t = 6.586$ (c), $t = 10.02$ (d), $t = 14.058$ (e), $t = 18.988$ (f)

Коллапс астрофизических объектов имеет место в начальной и конечной стадиях эволюции звезд. В последнее время он является наиболее активно изучаемым явлением, что обусловлено появлением большого количества новых наблюдательных данных. Сложность таких задач часто препятствует аналитическим исследованиям, поэтому практически единственной возможностью остается компьютерное моделирование процессов коллапса с учетом наблюдаемых и измеренных экспериментально данных [13–15].

При этом приходится учитывать очень большие градиенты исследуемых величин, возникающие на фронтах ударных волн, контактных разрывов и т.д. Присутствие вращения в моделях коллапсирующих звезд приводит к необходимости использовать трехмерные модели — либо осесимметричные, либо полные трехмерные модели. Наилучшая аппроксимация для трехмерных уравнений гидродинамики осуществляется в прямоугольной декартовой системе координат с кубическими ячейками. Для выделения и более точного разрешения фронтов ударных волн и контактных поверхностей в программе используется метод адаптивных сеток [3]. Большое количество интересных и важных задач, которые существуют в астрофизике, исследованиях Солнца и др., можно описать системой уравнений газовой динамики и уравнением гравитационного потенциала (1)–(2). Для повышения точности численных расчетов и улучшения эффективности алгоритмов в последнее время используют методы адаптивных сеток (AMR — Adaptive Mesh Refinement). Такие подходы позволяют в десятки раз сокращать затраты компьютерного времени и объем используемой памяти. Эти методы особенно эф-

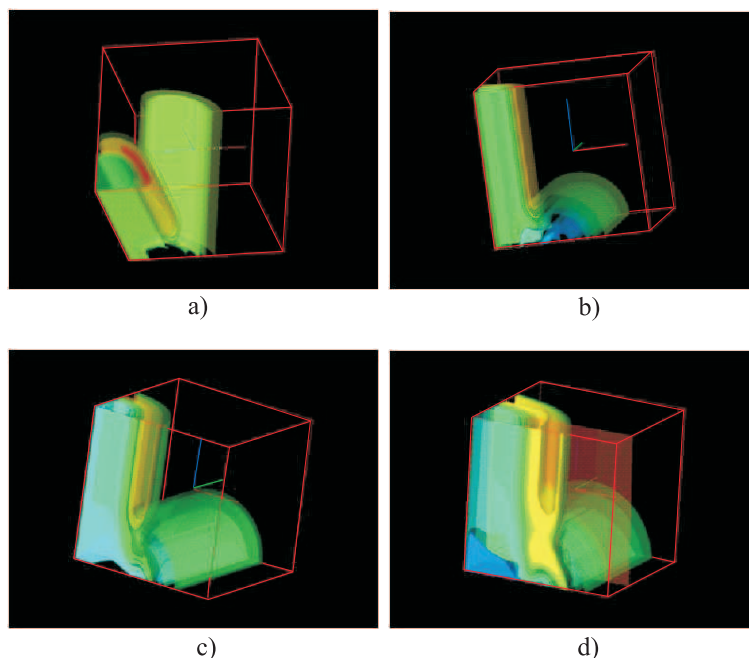


Рис. 2. Взаимодействие ударной волны с областью низкой плотности в моменты времени $t = 0.251$ (a), $t = 0.507$ (b), $t = 1.051$ (c), $t = 1.507$ (d)

Рис. 2. Взаимодействие ударной волны с областью низкой плотности в моменты времени $t = 0.251$ (a), $t = 0.507$ (b), $t = 1.051$ (c), $t = 1.507$ (d)

фективны в задачах газовой динамики, где возникают скачки уплотнения, ударные волны и контактные разрывы. Применение адаптивных сеток позволяет исследовать процессы с желаемой степенью точности в областях со сложной геометрией или большими градиентами. Метод AMR позволяет уменьшить общее число ячеек, в которых производится численный расчет, и, соответственно, общее время расчета. Технология AMR основана на использовании иерархической структуры ячеек, при этом каждому уровню иерархии соответствует свой уровень пространственного и временного разрешения. Особенностью такой организации является возможность локально и динамическим образом добавлять ячейки в сетку в данном месте расчетной области. Был предложен алгоритм разбиения расчетной сетки на несколько подуровней с последовательно уменьшаемыми шагами по пространству.

Рассмотрим задачу эволюции самогравитирующей газовой среды. На внешней границе выполняется условие межзвездной среды. В начальный момент времени газовая среда неподвижна и однородна. Плотность, давление и удельная внутренняя энергия в безразмерном виде равны [16] $\rho = 1.0$, $p = 1.0$ и $e = 2.5$; показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. Такое соотношение соответствует двухатомному газу — молекулярному водороду. Дальнейшие процессы, происходящие в этой системе, являются балансом двух сил — гравитации и давления. На рис. 3 и 4 приведены графики плотности и скорости к моменту времени $t = t^*$. Поле плотности отражает процесс формирования центральной области самогравитирующего газового облака. На внешней границе расчетной области значение плотности с течением времени уменьшается.

Распараллеливание газодинамических уравнений осуществлялось с использованием технологий OpenMP и MPI. Проведенные расчеты показали достаточно равномерную загрузку кластера и хорошую степень распараллеливания данной задачи. Основная проблема — распределение подмножеств сетки между процессорами с необходимым перекрытием. Параллельный алгоритм для задач гравитационной газовой динамики позволил использовать более точные сетки для проведения расчетов и соответственно решать более широкий круг проблем.

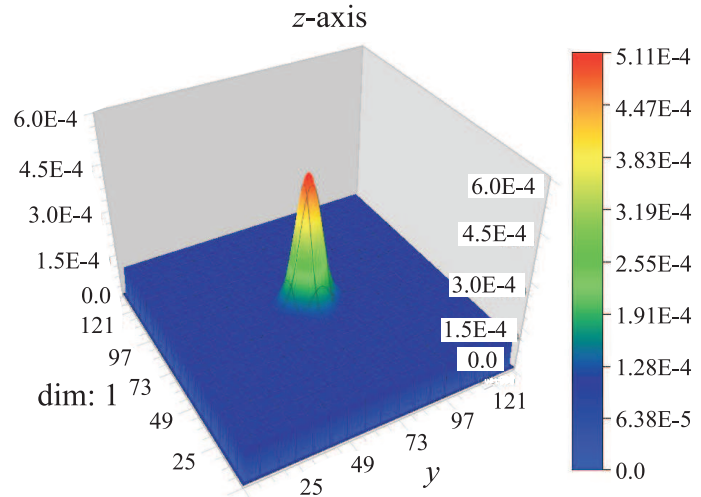


Рис. 3. Распределение плотности в самогравитирующем газовом облаке

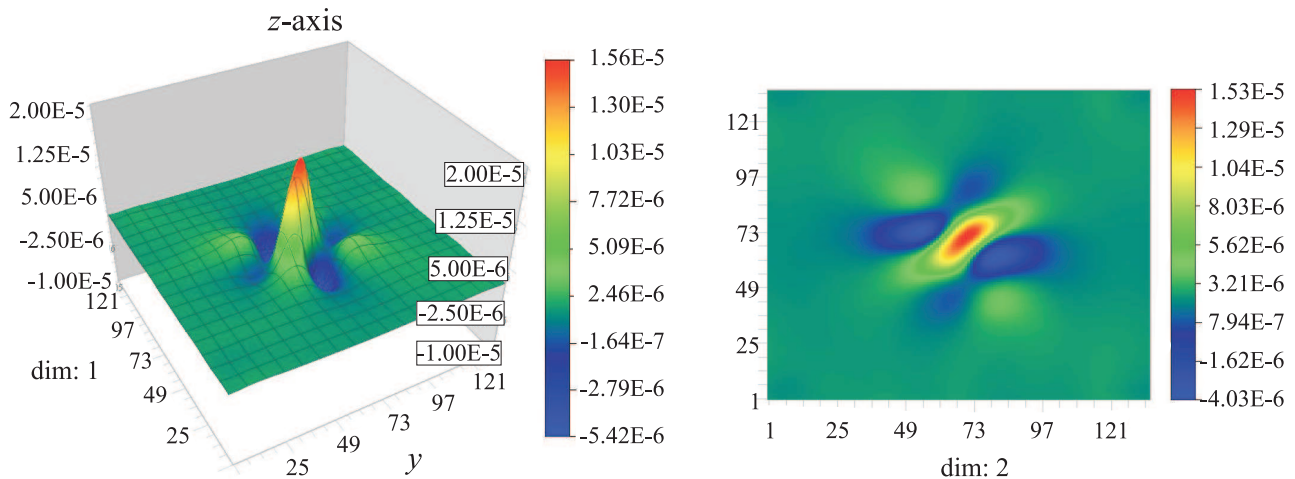


Рис. 4. Графики скорости в облаке самогравитирующего газа

Решение уравнений Пуассона проводилось с помощью технологии CUDA (Compute Unified Device Architecture), предложенной NVIDIA. Новая архитектура позволяет использовать графические ускорители для проведения численных расчетов [17]. В архитектуре TESLA используются многопоточковые процессоры SM (Streaming Multiprocessors), которые позволяют использовать новую технологию распараллеливания SIMT (Single Instruction Multiply Thread). Такая технология позволяет создавать, управлять

и вычислять несколько десятков тысяч конкурирующих потоков на GPU Tesla C 1060. Потоки организуются в 1d-, 2d- и 3d-потоковые блоки, каждый из которых вычисляется на своем SM. В свою очередь они отображаются на блоки (warps), которые выполняются в потоковых процессорах SP. Потоки выполняются независимо по своим собственным адресам инструкций и регистров. Каждый поток и блок обозначались двумя встроенными переменными: `threadIdx` и `blockIdx`.

CUDA устанавливает иерархию памяти аппаратных средств. Это дает возможность каждой нити получить доступ к необходимым данным. Таким образом, для запуска задания на GPU необходимо:

- 1) выделить память для данных и потоков на GPU;
- 2) скопировать данные в GPU;
- 3) распределить ядра для вычисления;
- 4) скопировать полученные данные обратно в CPU;
- 5) освободить память GPU.

Программирование осуществлялось на языке Фортран PGI (Portland Group Int.). Главная программа запускается на host-компьютере (CPU) и организует потоки, потоковые блоки и grid-среды, которые выполняются на GPU [17].

Проведенные расчеты показали достаточно равномерную загрузку кластера и хорошую степень параллелизации данной задачи. Основная проблема — распределение подмножеств сетки между процессорами с необходимым перекрытием. Параллельный алгоритм для задач гравитационной газовой динамики позволил использовать более точные сетки для проведения расчетов и соответственно решать более широкий круг проблем.

Решение гидродинамических задач практически невозможно без подробной графической визуализации полученных результатов. Это особенно справедливо для трехмерных течений. В данной работе графическая визуализация результатов компьютерного моделирования осуществлялась с помощью программы HDVIS [18], любезно предоставленной В. Д. Горячевым, за что автор выражает ему глубокую признательность.

4. Выводы. Тестирование разностных схем и программ осуществлялось с помощью задачи о распаде произвольного разрыва Сода и Лакса, а также задачи о точечном взрыве Седова–Тейлора [4, 11]. Отметим, что численное решение задачи Седова–Тейлора имеет сферически симметричную форму. Полученные результаты показали хорошее совпадение с аналитическими решениями. Все задачи решались на декартовой сетке, не инвариантной относительно вращения. Несмотря на это, анизотропный разброс всех величин мал.

В связи с тем, что разрешение фронта ударной волны равно размеру двух-трех пространственных ячеек, проведенное тестирование предложенных схем и программ двумерного и трехмерного моделирования гидродинамических течений показывает, что схемы можно применять для решения задач нестационарной газовой динамики, астрофизики и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nessyahu H., Tadmor E.* Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // *J. of Computational Physics*. 1990. **87**. 408–463.
2. *Langseth J.O., LeVeque R.J.* A wave propagation method for three-dimensional hyperbolic conservation laws // *J. of Computational Physics*. 2000. **165**. 126–166.
3. *Рыбакин Б.П.* Компьютерное моделирование гидродинамических задач на многопроцессорных ЭВМ // Научный сервис в сети Интернет: технологии параллельного программирования. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 422–425.
4. *Rybakin B., Shider N.* Computer modeling of multidimensional problems of gravitational gas dynamics on multiprocessor computers // *Computer Science Journal of Moldova*. 2009. **17**, N 1(49). 3–13.
5. *Matsumoto T.* Self-gravitational magnetohydrodynamics with adaptive mesh refinement for protostellar collapse // *Publ. Astron. Soc. Japan*. 2007. **59**, N 5. 905–927.
6. *Gheller C., Pantano O., Moscardini L.* A cosmological hydrodynamic code based on the piecewise parabolic method // *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* 2006. **295**, N 3. 519–533.
7. *Jiang G.-S., Levy D., Lin C.-T., Osher S., Tadmor E.* High-resolution nonoscillatory central schemes with nonstaggered grids for hyperbolic conservation laws // *SIAM J. Numer. Anal.* 1998. **35**, N 6. 2147–2168.
8. *Годунов С.К.* Разностный метод расчета ударных волн // *Успехи матем. наук*. 1957. **12**, № 1. 176–177.
9. *Toth G., Odstrcil D.* Comparison of some flux corrected transport and total variation diminishing numerical schemes for hydrodynamic and magnetohydrodynamic problems // *J. of Comp. Phys.* 1996. **128**. 82–100.
10. *Liska R., Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1d and 2d test problems for the Euler equations // *SIAM J. Sci. Comput.* 2003. **25**, N 3. 995–1017.

11. Рыбакин Б.П. Параллельная трехмерная TVD схема для решения задач гравитационной газовой динамики // Тр. Международной конференции "Параллельные вычислительные технологии" (ПаВТ-2009). Нижний Новгород, 2009. 673–679.
12. Рыбакин Б.П. Численные методы для многопроцессорных ЭВМ. Ч.1.: СЕР USM, 2008.
13. Ardeljan N.V., Bisnovatyi-Kogan G.S., Kosmachevskii K.V., Moiseenko S.G. An implicit Lagrangian code for the treatment of nonstationary problems in rotating astrophysical bodies // Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 1996. **115**. 573–594.
14. Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A., Kaygorodov P.V., Kuznetsov O.A., Matsuda T. The structure of cool accretion disc in semidetached binaries // Astron. Rep. 2004. **81**. 494–502.
15. Bisnovatyi-Kogan G.S., Moiseenko S.G., Rybakin B.P., Secrieru G.V. Modelling of explosive magnetorotational phenomena: from 2D to 3D // Bul. ACM Mat. 2007. N 3. 55–63.
16. Алиев А.В., Тарнавский Г.А. Иерархический SPH-метод для математического моделирования в гравитационной газовой динамике // Сибирские электронные математические известия. 2007. **4**. 376–434.
17. Евстигнеев Н.М. Интегрирование уравнений Пуассона с использованием графического процессора технологии CUDA // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, № 2. 82–88.
18. Горячев В.Д., Смирнов Е.М., Балашов М.Е. Визуализация результатов численного эксперимента при моделировании нестационарных течений с большим объемом данных в системе HDVIS // Научный сервис в сети Интернет: решение больших задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. 55–59.

Поступила в редакцию
9.11.2010
