

УДК 532.529

СРАВНЕНИЕ ДВУХ- И ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В КОНИЧЕСКОЙ КАВЕРНЕ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

К. Н. Волков¹

Рассматриваются вопросы, связанные с моделированием турбулентного течения вязкого сжимаемого газа в конической каверне турбины высокого давления. Для расчетов используются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, замкнутые при помощи модели турбулентности Спалларта–Аллмареса. Проводится сравнение результатов численного моделирования, полученных в рамках двумерной (осесимметричная модель) и трехмерной (модель в виде сектора с периодическими граничными условиями в окружном направлении) постановке задачи. Учитывается наличие мелких деталей (типа болтов и фланцев) в расчетной модели и их влияние на поле течения. Сравняется структура течения (распределения характеристик потока, положение и количество рециркуляционных зон, направление течения) в каверне, полученная в рамках различных моделей.

Ключевые слова: коническая каверна, газовая турбина, турбулентность, сжимаемость, вращение.

1. Введение. Двигателестроение относится к одной из науко- и капиталоемких отраслей энергетического и транспортного машиностроения. Растущие требования к эффективности и надежности газотурбинных двигателей, а также расширение диапазона параметров и условий эксплуатации создают предпосылки для их конструктивного и технологического совершенствования.

При выполнении исследовательских, проектных и проверочных расчетов турбулентных течений вязкого сжимаемого газа и теплообмена в проточной части и внутренней воздухопроводной системе (internal air system) газотурбинных двигателей широкое применение находят методы вычислительной газовой динамики (Computational Fluid Dynamics, CFD). Использование методов CFD позволяет не только улучшить показатели эффективности проектируемых изделий при обеспечении приемлемой механической надежности, но и создать конструкции, практически не нуждающиеся в доработке, что сокращает период ввода изделия в эксплуатацию и повышает его конкурентоспособность. К важным вопросам относятся численная оптимизация, включение мелких деталей в расчетную модель, интеграция методов CFD с предварительными газодинамическими расчетами и программными комплексами расчета теплового и напряженно-деформированного состояния.

В качестве теплопередающих, теплоизолирующих и технологических элементов газотурбинных двигателей широкое применение находят полости (каверны) различных типов, чем объясняется устойчивый интерес к исследованию структуры течения и теплообмена при взаимодействии потока жидкости с ограниченным объемом [1–3].

В настоящей статье рассматривается моделирование турбулентного течения вязкого сжимаемого газа в конической каверне (drive cone cavity) турбины высокого давления трехвального газотурбинного двигателя. Каверна формируется коническим валом (conical shaft), соединяющим компрессор и турбину высокого давления, диском турбины высокого давления и внутренней поверхностью камеры сгорания. Каверна данного типа используется для доставки воздуха от последней ступени компрессора к лопаткам турбины, а также для вентиляции внутренних полостей двигателя, предотвращая их от чрезмерного нагрева. Она представляет собой один из теплонапряженных (температура достигает 900 К при угловой скорости вращения вала 10^4 об/мин) и неохлаждаемых компонентов газотурбинного двигателя.

В трехвальном (three-shaft) двигателе имеется три последовательно расположенные турбины, каждая из которых приводит свой вал. Турбина высокого давления (High Pressure Turbine, НРТ), которая размещена после камеры сгорания, всегда приводит компрессор двигателя, а турбины промежуточного давления (Intermediate Pressure Turbine, IPT) и низкого давления (Low Pressure Turbine, LPT) приводят как внешнюю нагрузку, так и дополнительные компрессоры самого двигателя, расположенные перед основным. В компрессорной системе используются три компрессора — компрессор низкого давления (вентилятор), компрессор промежуточного давления и компрессор высокого давления. Турбины имеют отдельный вал, что позволяет выбрать оптимальную скорость вращения ротора.

¹ Балтийский государственный технический университет “Военмех” им. Д. Ф. Устинова, физико-механический факультет, 1-я Красноармейская ул., 1, 190005, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: dsci@mail.ru

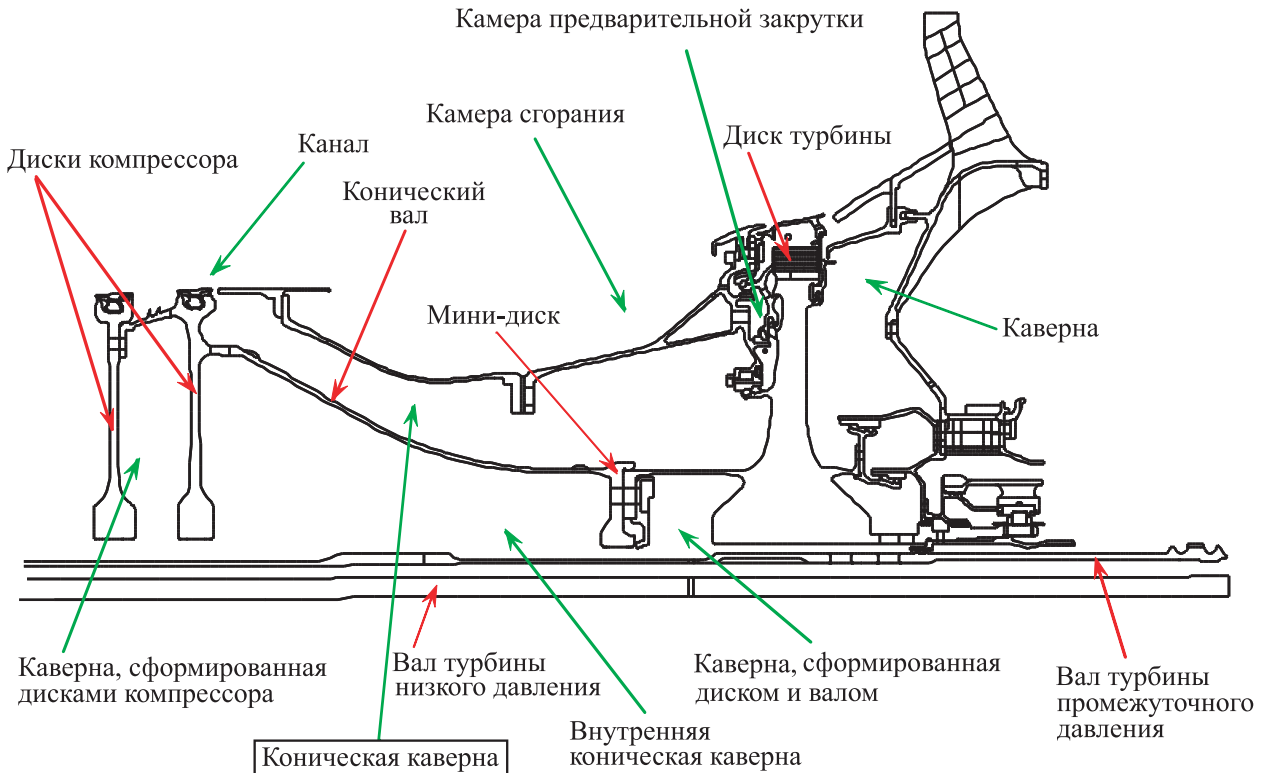


Рис. 1. Осесимметричная модель двигателя

Полномасштабная твердотельная осесимметричная модель газотурбинного двигателя и его основные компоненты показаны на рис. 1. Компрессор высокого давления состоит из 6 ступеней, но для простоты на рисунке показаны только последние 2 ступени. Длина двигателя составляет 5.30 м, а диаметр вентилятора — 2.79 м. Максимальная тяга достигает 310–370 кН, а полная степень повышения давления и степень двухконтурности — 41.1 и 8.15 соответственно. Удельный расход топлива составляет 0.557 кг/ч.

Газодинамические расчеты выполняются на детализированной модели проточной части, что позволяет учесть влияние ряда ее конструктивных особенностей (протечки через радиальные зазоры, вдув охлаждающего воздуха, галтели, уступы, фланцы, болты) на общую структуру течения во внутреннем тракте. Проводится сравнение моделей течения в двух- и трехмерной постановке и делаются выводы о возможности их практического использования.

2. Основные параметры. Режим течения во вращающейся системе с осевым подводом рабочего тела определяется линейным и вращательным числами Рейнольдса $Re_x = \frac{2\rho vr}{\mu}$, $Re_\omega = \frac{\rho\omega r^2}{\mu}$, где r — локальный радиус и ω — угловая скорость вращения.

Структура течения в каверне в существенной степени зависит от параметра турбулентности (turbulent flow parameter) $\lambda_t = C_W Re_\omega^{-0.8}$, где $C_W = \dot{m}/(\mu b)$ представляет собой безразмерный массовый расход (flow Reynolds number), b — радиус диска.

Относительная скорость закрутки потока во входном сечении (inlet swirl fraction) определяется соотношением $\beta = \frac{v_{\theta b}}{\omega b}$, где $v_{\theta b}$ — тангенциальная скорость при $r = b$.

Безразмерный расход жидкости, притекающей к поверхности свободного вращающегося конуса, находится из соотношения [1, 2] $C_W = 0.219 \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^5 \right] Re_\omega^{0.8}$. Для конической каверны, имеющей радиус b

и угол наклона θ (рис. 2), вращательное число Рейнольдса определяется соотношением $Re_\omega = \frac{\rho\omega b^2}{\mu \sin \theta}$.

Локальное число Нуссельта для конической поверхности рассчитывается по формуле $Nu = \frac{q_w r}{\lambda \Delta T \sin \theta}$, где q_w — плотность теплового потока к стенке. Теплофизические свойства рабочей среды берутся при средней температуре во входном сечении. Характерный перепад температур вычисляется как разность средней температуры во входном и выходном сечениях и температуры стенки: $\Delta T = \frac{1}{2}(T_i + T_o) - T_w$, где

T_i и T_o — температуры во входном и выходном сечениях и T_w — температура стенки.

Среднее число Нуссельта рассчитывается по формуле

$$\langle Nu \rangle = \frac{\langle q_w \rangle r}{\lambda \langle \Delta T \rangle \sin \theta}, \quad \langle q_w \rangle = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b q r dr, \quad \langle \Delta T \rangle = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b \Delta T r dr.$$

3. Теоретические основы. Для исследования течения и теплообмена в конической каверне используются как данные физического эксперимента и инженерного анализа, так и результаты численного моделирования.

Данные физического эксперимента показывают существование в конической каверне с радиальным вытеканием вихрей Тейлора, которые подавляются при расширении зазора между ротором и статором, увеличении числа Рейнольдса или расхода газа, подаваемого в каверну [4]. Картина линий тока в конической каверне, полученная расчетным путем в работе [5] при тех же параметрах, что и измерения [4], показывает, что структура течения в каверне имеет черты, присущие классическим течениям во вращающихся системах [1, 2]. На поверхности ротора и статора образуются пограничные слои, разделенные слоем жидкости, который вращается как квазитвердое тело.

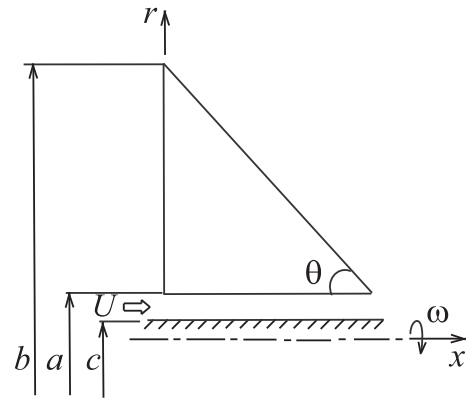


Рис. 2. Коническая каверна

Структура течения изучается для случаев наличия (случай 1) и отсутствия (случай 2) входного осевого потока рабочего тела. В случае 1 измерения [6] указывают на присутствие в каверне комбинированного вихря, в то время как в случае 2 формируется только вынужденный вихрь. Эти данные подтверждаются результатами работ [7–9].

Данные измерений и результаты численных расчетов в стационарной осесимметричной постановке представлены в работе [10] при $0.2 \leq \frac{Re_\omega}{10^7} \leq 2$, $0 \leq \frac{C_W}{10^5} \leq 1.7$, $0 \leq \lambda_t \leq 0.8$, $0.3 \leq \beta \leq 0.5$. Для варьирования параметром турбулентности изменяется расходный параметр, в то время как число Рейнольдса поддерживается постоянным (это требуется для того, чтобы получить приемлемое распределение универсальной пристеночной координаты y^+). Расчеты приводят к заниженному уровню скорости в ядре потока. Согласование расчетных и экспериментальных данных улучшается при уменьшении параметра турбулентности. Переход от режима течения, обусловленного вращением, к режиму течения, определяемому осевым подводом рабочего тела, происходит при $\lambda_t = 0.1$.

При относительно малых расходах рабочего тела ($Re_\omega = 3 \times 10^6$, $C_W = 8000$, $\lambda_t = 0.5$, $\beta = 0.3$) во входном сечении каверны формируется рециркуляционная зона, обусловленная взаимодействием основного потока в межлопаточном канале с центробежными силами, формирующими течение в каверне [6, 10]. Рециркуляционная зона подавляется при увеличении расхода в межлопаточном канале и полностью исчезает при $C_W = 81\,000$ [10].

Толщины пограничных слоев на вращающейся и неподвижной конической поверхности находятся из соотношений [1, 11] $\delta_r = 0.08598 r(x^2 Re_\omega)^{-0.2}$, $\delta_s = 0.37 x Re_x^{-0.2}$, где x — координата, отсчитываемая вдоль поверхности. Для вращающейся поверхности считается, что угловая скорость вращения невязкого ядра составляет 0.6 от угловой скорости вращения ротора.

Локальное число Нуссельта для свободного конуса вычисляется с использованием аналогии Рейнольдса ($Pr = 1$, $n = 2$), которая для турбулентного режима течения (при $Re_\omega > 3 \times 10^5$) приводит к соотношению

$$Nu = 0.0197(n + 2.6)^{0.2} (x^2 Re_\omega)^{0.8} Pr^{0.6} \left[1 + 0.087 \left(\frac{a}{r} \right)^5 \right] (\sin \theta)^{-0.8},$$

где a — внутренний радиус конуса. Вращательное число Рейнольдса определяется при $\theta = 90^\circ$ (как для свободного вращающегося диска). Показатель степени n определяет закон изменения температуры стенки $T_w - T_\infty \sim x^n$, где T_w — температура поверхности, T_∞ — температура в свободном потоке, а $x = r/b$. Приведенное соотношение представляет собой решение, полученное для свободного вращающегося диска в турбулентном режиме, умноженное на поправочный множитель в квадратных скобках, учитывающий ненулевой радиус вала.

При наличии осевого подвода рабочей среды к системе, образованной вращающейся конической поверхностью и валом, выделяют два характерных режима течения в зависимости от числа Россби

$Ro = U/(\omega a)$ [6], где $U = \dot{m}/(\rho S)$ — средняя скорость во входном сечении, имеющем площадь S . Для удобства вводится также число плавучести $Bo = Ro (\beta \Delta T)^{-1/2}$.

При $Bo < 6$ реализуется режим течения, определяемый действием сил плавучести, индуцированных вращением (buoancy или rotationally dominated regime). При вращении конической поверхности и вала в одну сторону уровень теплообмена на конической поверхности выше, чем при их вращении в противоположные стороны. Увеличение линейного и вращательного чисел Рейнольдса приводит к увеличению тепловых потоков к поверхности конуса. При $Bo > 6$ (throughflow dominated regime) течение определяется, в основном, осевым подводом рабочего тела, а уровень тепловых потоков сравнительно слабо зависит от направления вращения конической поверхности и вала. Распределение локального числа Нуссельта имеет максимум около внутреннего радиуса конической поверхности, что связывается с влиянием осевого подвода рабочей среды к системе.

В зависимости от числа плавучести, число Нуссельта находится из следующих соотношений: при $Bo < 6$ (режим течения, определяемый силами плавучести)

$$Nu = 0.0243 Re_x^{0.086} Gr^{0.326} x^{-1.89} (x^{-1} - 1)^{-0.022};$$

при $Bo > 6$ (режим течения, определяемый осевым подводом рабочего тела)

$$Nu = 8.93 \times 10^{-5} Re_x^{1.301} x^{-3.523}.$$

Числа Рейнольдса и Грасгофа определяются соотношениями $Re = \frac{\rho U d}{\mu}$, $Gr = \frac{\omega^2 r \sin \theta \beta \Delta T}{\nu^2} \left(\frac{r}{\sin \theta} \right)^3$. Линейное число Рейнольдса вычисляется по ширине зазора, образованного внутренним радиусом конической поверхности и радиусом вала ($d/2 = a - c$). Под x понимается безразмерная радиальная координата ($x = r/b$), а под ΔT — разница температур жидкости и стенки ($\Delta T = T - T_w$).

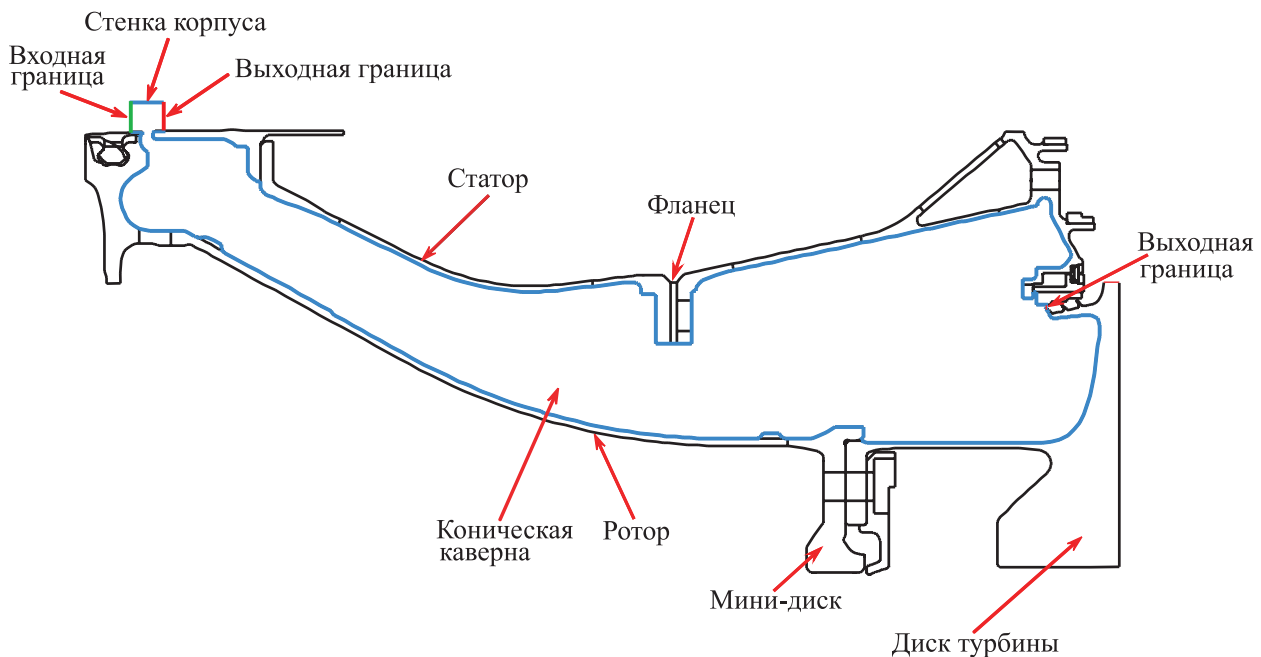


Рис. 3. Коническая каверна

При низких числах Рейнольдса или Грасгофа течение в каверне содержит нестационарные крупномасштабные вихревые структуры, вытянутые в радиальном направлении [12, 13]. Моделирование крупных вихрей течения и теплообмена во вращающейся каверне с осевым подводом рабочего тела (примером является каверна, образованная соседними дисками компрессора) дает результаты, лучше согласующиеся с данными измерений, чем $k-\varepsilon$ модель [14]. Приближенная модель, учитывающая силы плавучести, индуцированные вращением, и наличие рециркуляционного течения в каверне, построена в работе [12].

4. Расчетная область. Часть газотурбинного двигателя, включающая в себя коническую каверну, сформированную валом и диском турбины высокого давления, а также стенкой камеры сгорания, показана на рис. 3. Угловые скорости вращения вала турбины промежуточного давления и диска турбины высокого давления составляют 774 c^{-1} и 1139 c^{-1} соответственно.

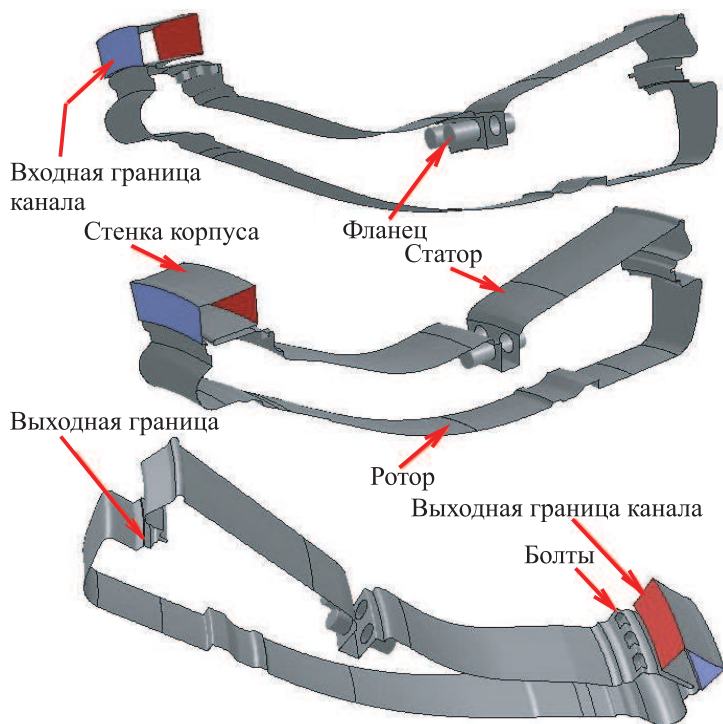
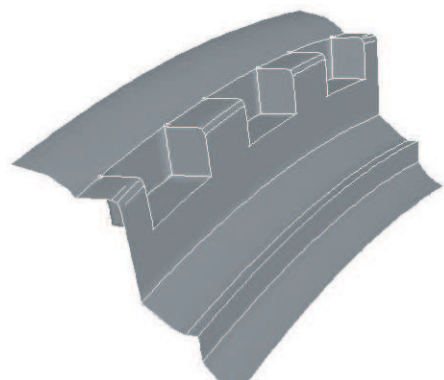
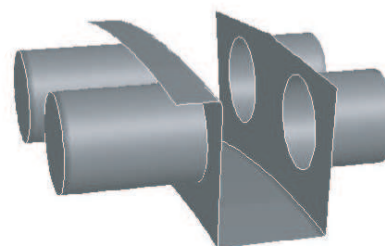


Рис. 4. Область, занятая жидкостью, под различными углами зрения



а) Болты



б) Фланец

Рис. 5. Трехмерные детали расчетной модели

В расчетах используется как осесимметричная, так и трехмерная модель области, занятой жидкостью (рис. 4), представляющая собой 1/24 полной модели (сектор с углом 15°). Конфигурацию трехмерных деталей расчетной модели (болты и фланец) поясняет рис. 5.

Геометрия каверны характеризуется внутренним и внешним радиусами ($a = 154$ мм, $b = 295.22$ мм, $a/b = 0.5216$). Протяженность каверны в осевом направлении составляет 443.25 мм, а ширина ее сегментов, разделенных фланцем, равняется 243.5 мм и 199.75 мм. Угол наклона конической поверхности изменяется в осевом направлении. Для простоты оценок в расчетах используется его среднее значение: $\theta = 28^\circ$.

Скорость закрутки потока во входном сечении каверны составляет $\beta = 0.6248$, вращательное число Рейнольдса — $Re_\omega = 6.08 \times 10^7$, безразмерный удельный массовый расход — $C_w = 8.9 \times 10^4$, параметр турбулентности — $\lambda_t = 0.0528$. Входные параметры задачи соответствуют “rotationally-dominated” режиму течения в каверне [10] (течение определяется вращением потока).

5. Основные уравнения. В декартовой системе координат (x, y, z) нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается уравнением

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = H. \tag{1}$$

Уравнение (1) дополняется уравнением состояния совершенного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[e - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - \omega^2 r^2) \right].$$

Неинерциальность системы отсчета учитывается при помощи введения в источник член H кориолисовой и центробежной сил. Ниже представлены вектор консервативных переменных Q , векторы

потоков F_x, F_y, F_z и источниковый член H :

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \omega (y \omega + 2v_z) \\ \rho \omega (z \omega - 2v_y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{pmatrix}; \quad F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \tau_{xx} \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x v_z - \tau_{xz} \\ (\rho e + p)v_x - v_x \tau_{xx} - v_y \tau_{xy} - v_z \tau_{xz} + q_x \end{pmatrix};$$

$$F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \tau_{yy} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ (\rho e + p)v_y - v_x \tau_{yx} - v_y \tau_{yy} - v_z \tau_{yz} + q_y \end{pmatrix}; \quad F_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \tau_{zx} \\ \rho v_z v_y - \tau_{zy} \\ \rho v_z v_z + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p)v_z - v_x \tau_{zx} - v_y \tau_{zy} - v_z \tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений $\tau_{ij} = \mu_e \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$, $q_i = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_i}$. Здесь t — время; ρ — плотность; r — радиус; v_x, v_y, v_z — составляющие скорости в координатных направлениях x, y, z соответственно; ω — угловая скорость вращения; p — давление; e — полная энергия единицы массы; T — температура; γ — отношение удельных теплоемкостей.

Уравнение (1) пригодно для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. При моделировании турбулентных течений уравнение (1) дополняется уравнениями модели турбулентности. При этом эффективная вязкость μ_e вычисляется как сумма молекулярной μ и турбулентной μ_t вязкости, а эффективная теплопроводность λ_e выражается через вязкость и число Прандтля $\mu_e = \mu + \mu_t$, $\lambda_e = c_p \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right)$, где c_p — теплоемкость при постоянном давлении. Молекулярному и турбулентному числам Прандтля присваиваются постоянные значения (для воздуха $Pr = 0.72$, $Pr_t = 0.9$).

Для получения значений молекулярной вязкости в зависимости от температуры используется закон Сазерленда $\frac{\mu}{\mu_*} = \left(\frac{T}{T_*} \right)^{3/2} \frac{T_* + S_0}{T + S_0}$, где $\mu_* = 1.68 \times 10^{-5}$ кг/(м·с), $T_* = 273$ К и $S_0 = 110.5$ К для воздуха.

6. Модель турбулентности. Модель Спалларта–Аллмареса в дополнение к уравнениям (1) предполагает решение уравнения переноса для рабочей переменной $\tilde{\nu}$, являющейся аналогом турбулентной вязкости [15]:

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \tilde{\nu} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \left[(\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \right] + c_{b2} \rho \nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \tilde{\nu} \right\} + S_{\tilde{\nu}}. \quad (2)$$

Источниковый член в уравнении (2) учитывает порождение, диссипацию турбулентной вязкости и ламинарно-турбулентный переход [16]:

$$S_{\tilde{\nu}} = \underbrace{c_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu}}_{\text{производство}} - \underbrace{\left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\chi^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2}_{\text{диссипация}} + \underbrace{f_{t1} \rho (\Delta U)^2}_{\text{переход}},$$

где d — расстояние от центра контрольного объема до ближайшей стенки. Рабочая переменная $\tilde{\nu}$ связана с турбулентной вязкостью при помощи соотношения $\nu_t = f_{v1} \tilde{\nu}$. Член производства турбулентности моделируется соотношением $\tilde{S} = S f_{v3} + \frac{\tilde{\nu}}{\chi^2 d^2} f_{v2}$, в котором S вычисляется на основе величины завихренности $S = |\Omega| = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2}$, $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$.

Для обеспечения корректного поведения рабочей переменной в логарифмическом слое ($\tilde{\nu} = \chi y u_\tau$) вводится демпфирующая функция $f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}$, $\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$. Функции f_{v2} и f_{v3} имеют следующий вид: $f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$, $f_{v3} = 1$. Функция f_w играет роль во внешней области пограничного слоя:

$$f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\chi^2 d^2 \tilde{S}}.$$

Функция g выступает в качестве ограничителя, предотвращая завышенные значения f_w . Параметры r и f_w равняются единице в логарифмическом слое и уменьшаются во внешней области. Постоянным модели присваиваются значения $c_{b1} = 0.1355$, $c_{b2} = 0.622$, $\sigma = 2/3$, $c_{v1} = 7.1$, $c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\varkappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}$, $c_{w2} = 0.3$, $c_{w3} = 2.0$, $\varkappa = 0.42$.

Функции f_{t1} , f_{t2} и g_t контролируют ламинарно-турбулентный переход, имеющий место в некоторой точке (x_t, y_t, z_t) пограничного слоя:

$$f_{t1} = c_{t1} g_t \exp \left[-c_{t2} \frac{S_t^2}{\Delta U^2} (d^2 + g_t^2 d_t^2) \right], \quad f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2), \quad g_t = \min \left\{ 0.1, \frac{\Delta U}{S_t \Delta x_t} \right\}.$$

Здесь S_t — величина завихренности, Δx_t — шаг сетки вдоль стенки, $\Delta U = |u - u_t|$. Расстояние от точки перехода до стенки находится из соотношения $d_t = [(x - x_t)^2 + (y - y_t)^2 + (z - z_t)^2]^{1/2}$. Дополнительные постоянные принимают следующие значения: $c_{t1} = 1$, $c_{t2} = 2$, $c_{t3} = 1.2$, $c_{t4} = 0.5$.

Форма диссипативного члена показывает, что возможна ситуация, когда $\tilde{S} \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$. При $r \rightarrow \infty$ следует, что $f_w \rightarrow (1 + c_{w3}^6)^{1/6}$. Для устранения особенности действительные значения функций заменяются их предельными значениями при $|r| > 5$.

Для устранения отрицательных значений источникового члена производства турбулентности при сильном изменении r (например при расчете отрывных течений) функции f_{v2} и f_{v3} переопределяются:

$$f_{v2} = \left(1 + \frac{\chi}{c_{v2}} \right)^{-3}, \quad f_{v3} = \frac{1}{\chi} (1 + \chi f_{v1}) (1 - \chi f_{v2}),$$

где $c_{v2} = 5$. Такой выбор демпфирующих функций гарантирует, что источниковый член является неотрицательным. При $\tilde{\nu} = 0$ и нулевой завихренности следует, что $\tilde{S} = 0$. Для избежания численных проблем вместо χ используется $\max\{\chi, 10^{-4}\}$.

В модели [17] источниковый член находится по величине завихренности и инварианту тензора скоростей деформаций:

$$S = |\Omega| + c_s \min\{0, |S| - |\Omega|\}, \quad |S| = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Дополнительной постоянной присваивается значение $c_s = 2.0$.

7. Численный метод. Для дискретизации уравнений Навье–Стокса и уравнений модели турбулентности, записанных в виде (1) и (2), используется метод конечных объемов на неструктурированной сетке, детали которого подробно обсуждаются в [3].

Для дискретизации по времени применяется метод Рунге–Кутты 5-го порядка, а для дискретизации по пространству — схема MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) для невязких потоков и схема CDS (Central Difference Scheme) 2-го порядка для вязких потоков. Детали дискретизации приводятся в работе [18].

Для решения системы разностных уравнений используется многосеточный метод [19], для ускорения сходимости которого применяется обобщенный метод взвешенных невязок (Generalized Minimal Residual, GMRES). Устойчивость вычислительной процедуры при моделировании низкоскоростных течений обеспечивается при помощи блочного метода предобуславливания Якоби (block-Jacobi preconditioning), реализованного в [20].

Дискретизация уравнения (2) проводится так же, как и уравнений Навье–Стокса, записанных в виде уравнения (1). Отличие заключается в дискретизации диффузионного члена, который имеет неконсервативную форму [16]. Слагаемое, содержащее градиент $(\nabla \tilde{\nu})^2$, будет представлено в виде $\nabla \tilde{\nu}^{n+1} \nabla \tilde{\nu}^n$. А для представления члена с градиентом в неявном виде при численной реализации используется равенство $\nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \tilde{\nu} = \nabla \cdot (\tilde{\nu} \nabla \tilde{\nu}) - \tilde{\nu} \nabla \cdot (\nabla \tilde{\nu})$. Полагая модифицированную турбулентную вязкость в центре контрольного объема постоянной ($\tilde{\nu}_p = \text{const}$), получим $(\nabla \tilde{\nu})^2 = \nabla \cdot [(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_p) \nabla \tilde{\nu}]$.

Диффузионный член в уравнении (2) примет вид: $\nabla \cdot \left\{ \left[\mu + \rho \tilde{\nu} + c_{b2} \rho_p (\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_p) \right] \nabla \tilde{\nu} \right\}$. Наличие слагаемого $c_{b2} \rho_p (\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_p)$ может приводить к отрицательной суммарной вязкости.

Будем рассматривать коэффициент турбулентной диффузии для грани (i, j) контрольного объема $\Gamma_{ij} = \rho_{ij} \tilde{\nu}_{ij} + c_{b2} \rho_p (\tilde{\nu}_i + \tilde{\nu}_j)$. Полагая $\tilde{\nu}_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{\nu}_i + \tilde{\nu}_j)$, получим $\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\rho_{ij} + c_{b2} \rho_p) \tilde{\nu}_i + \frac{1}{2} (\rho_{ij} - c_{b2} \rho_p) \tilde{\nu}_j$. При постоянной плотности положительность коэффициента переноса гарантируется, если $|c_{b2}| < 1$ (по

умолчанию используется значение $c_{b2} = 0.622$). При переменной плотности требуется проверить положительность суммарного коэффициента диффузии.

Для получения устойчивой вычислительной процедуры проводится линеаризация источникового члена в уравнении (2). В уравнении (2) выделены члены производства и диссипации, каждый из которых является знакопеременным, в связи с чем линеаризуется суммарный источниковый член.

Приведем соотношения, используемые для дискретизации невязких и вязких потоков, а также источникового члена в уравнении (2).

1. *Невязкие потоки:*

$$\int_{\partial V_i} (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \tilde{\nu} dS = \sum_{j \in E_i} \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\rho(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\tilde{\nu}_j + \tilde{\nu}_i)}_{\text{невязкий поток}} - \underbrace{|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}| \left[(1 - \varphi) \underbrace{\rho(\hat{L}_i^*(\tilde{\nu}_j) - \hat{L}_j^*(\tilde{\nu}_i))}_{\text{4-й порядок}} + \varphi \underbrace{\rho(\tilde{\nu}_j - \tilde{\nu}_i)}_{\text{2-й порядок}} \right]}_{\text{диссипативный член}} \right\} \Delta s_{ij}.$$

2. *Вязкие потоки:*

$$\int_{\partial V_i} \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \left[(\mu + \rho \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \right] + c_{b2} \rho (\nabla \tilde{\nu})^2 \right\} dS = \sum_{j \in E_i} \frac{1}{\sigma} \left[(\mu + \rho \tilde{\nu}) + \frac{1}{2} c_{b2} \rho (\tilde{\nu}_j - \tilde{\nu}_i) \right] \nabla \tilde{\nu} \Delta s_{ij}.$$

3. *Источниковый член:*

$$\int_{V_i} \rho S d\Omega = \rho \sum_{j \in E_i} \left[\tilde{S} \tilde{\nu} - \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\varkappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + f_{t1} (\Delta U)^2 \right] V_i.$$

Здесь \mathbf{n}_{ij} — внешняя нормаль к грани (i, j) , Δs_{ij} — площадь грани (i, j) . Под E_i понимается множество внутренних граней, связанных с узлом i , а под B_k — множество граней, лежащих на границе расчетной области и связанных с узлом k . Под \hat{L}_i^* понимается модифицированный псевдолапласиан в узле i [3].

При моделировании низкоскоростных течений используется скорость жидкости $|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}|$ на грани (i, j) контрольного объема. Матрица предобусловливания для невязких потоков имеет следующий вид:

$$(P_i^I)^{-1} = \frac{1}{2V_i} \left(\sum_{j \in E_i} |\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}| \Delta s_{ij} + \sum_{i \in B_k} |\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_{ik}| \Delta s_{ik} \right).$$

Матрица предобусловливания для вязких потоков представляется в следующем виде:

$$(P_i^V)^{-1} = \frac{1}{V_i} \sum_{j \in E_i} \frac{1}{\sigma} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \Delta s_{ij}.$$

Локальный шаг интегрирования по времени в узле i определяется спектральными радиусами невязкого и вязкого якобианов и находится из соотношения

$$\frac{1}{\Delta t_i} = \frac{1}{2V_j} \left[\sum_{j \in E_i} \rho |\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}| \Delta s_{ij} + \frac{2(\mu + \rho \tilde{\nu})}{\sigma} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \Delta s_{ij} \right].$$

При использовании метода Рунге–Кутты 5-го порядка для предотвращения появления отрицательных значений рабочей переменной ее приращение во времени находится как $\Delta \tilde{\nu} = \alpha_m \Delta t_\nu R^{(m-1)}$, где $R^{(m-1)}$ — коэффициенты разностной схемы на шаге m . Для того чтобы гарантировать положительность рабочей переменной, полагается $\Delta \tilde{\nu}_{\text{lim}} = \begin{cases} \Delta \tilde{\nu} & \text{при } \Delta \tilde{\nu} \leq 0, \\ \frac{(\tilde{\nu}^n - \tilde{\nu}_{\text{min}}) \Delta \tilde{\nu}}{(\tilde{\nu}^n - \tilde{\nu}_{\text{min}}) + \Delta \tilde{\nu}} & \text{при } \Delta \tilde{\nu} > 0. \end{cases}$

На практике $\tilde{\nu}_{\text{min}} = \tilde{\nu}_\infty = 10 \nu_\infty$, где ν_∞ — кинематическая вязкость в невозмущенном потоке.

Для сохранения положительности рабочей переменной во времени необходимо модифицировать процедуру Рунге–Кутты. Вклад источникового члена вычисляется при помощи неявной схемы, что эквивалентно в этом случае явной процедуре с уменьшенным шагом по времени: $\Delta t_\nu = \Delta t \left[1 - \left| \frac{\partial S}{\partial \tilde{\nu}} \right| \Delta t \right]^{-1}$.

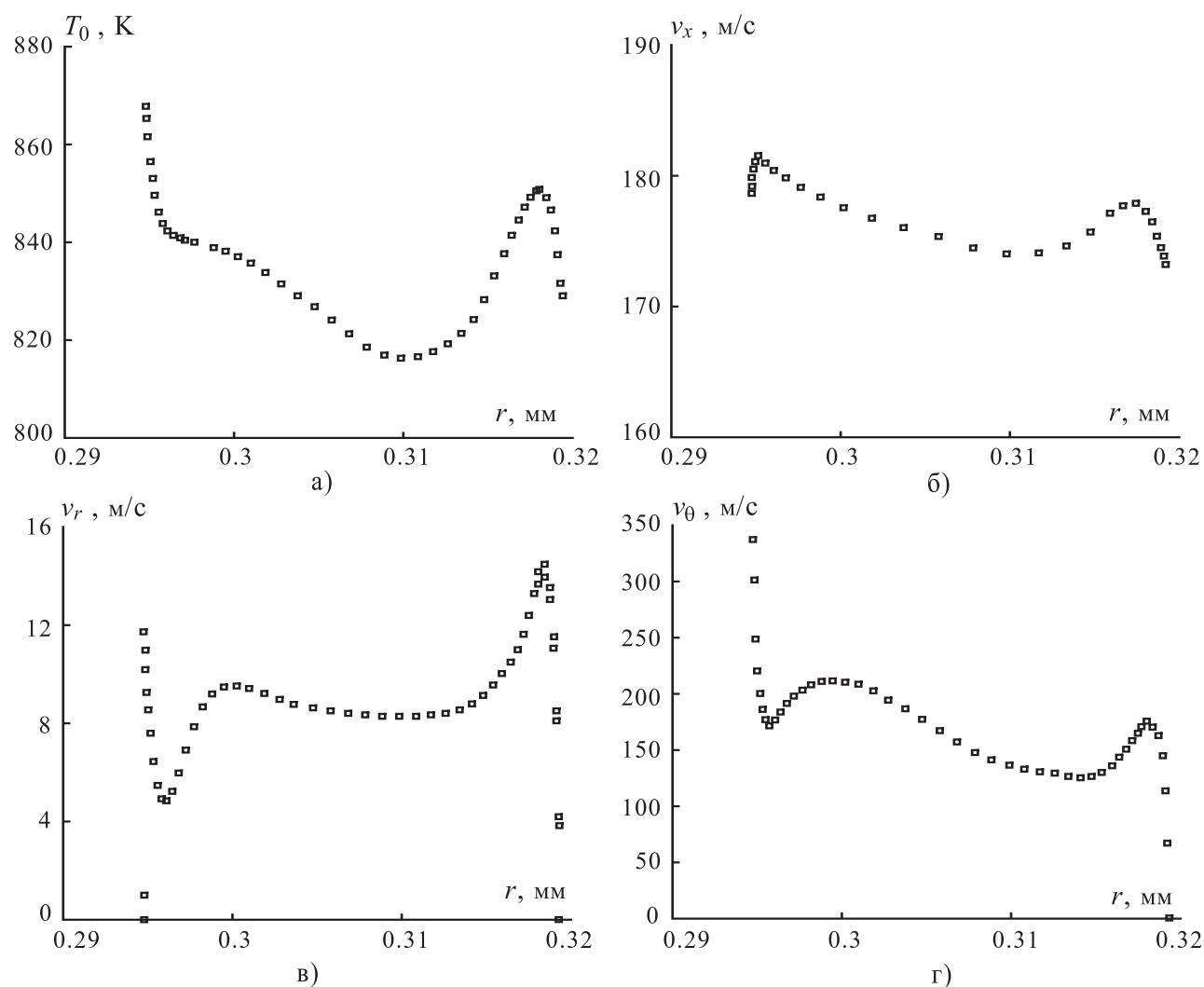


Рис. 6. Профили полной температуры (а), осевой скорости (б), радиальной скорости (в) и тангенциальной скорости (г) во входном сечении

8. Граничные условия. Коническая каверна имеет одну входную (входное сечение межлопаточного канала) и две выходных границы (выходное сечение межлопаточного канала и лабиринтное уплотнение, предотвращающее перетекание газа в камеру предварительной закрутки).

Во входном сечении межлопаточного канала фиксируется массовый расход ($\dot{m} = 97.6824$ кг/с для осесимметричной модели и $\dot{m}/24 = 4.0701$ кг/с для модели в виде сектора), а также задаются радиальные профили полной температуры, осевой, радиальной и тангенциальной скорости, приведенные на рис. 6. Кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации на входных границах полагаются равными 10^{-3} м²/с² и 10^{-2} м²/с³.

На выходной границе, представляющей собой лабиринтное уплотнение, отделяющее каверну от камеры предварительной закрутки, фиксируется массовый расход ($\dot{m} = 1.0032$ кг/с для осесимметричной модели и $\dot{m}/24 = 0.041798$ кг/с для модели в виде сектора) и полная температура ($T_0 = 850$ К), а в выходном сечении межлопаточного канала фиксируется статическое давление ($p = 2.7 \times 10^6$ Па). Течение на выходе считается по нормали к границе.

Для скорости на стенке используются граничные условия непротекания и прилипания. В качестве граничных условий для температуры на стенке используется условие теплоизолированности ($\partial T / \partial n = 0$). Характеристики турбулентности на стенке определяются при помощи метода пристеночных функций. При расчете турбулентных течений на основе модели Спалларта–Аллмареса для определения диффузионного потока касательной скорости используется подход, реализующий переход от низкорейнольдсово формулировки к пристеночным функциям в зависимости от разрешения сетки в пристеночной области.

9. Сетка. Расчеты проводятся для осесимметричной модели (модель 1), трехмерной модели, не вклю-

чающей в себя трехмерные детали расчетной области (модель 2, игнорируется наличие болтов и фланца), и трехмерной модели с учетом трехмерных деталей (модель 3). Течение в межлопаточном канале не рассчитывается. Для учета особенностей течения в межлопаточном канале к модели пристыкуется дополнительный блок, имеющий трапециидальную форму поперечного сечения в плане, на входной и выходной границах которого задаются граничные условия в виде распределений скорости и полной температуры потока. Стенка корпуса считается теплоизолированной.

Для модели 1 используется блочно-структурированная сетка, содержащая 39 000 ячеек, а для модели 2 — сетка с 2 миллионами ячеек. Блочно-структурированная сетка для модели 3 содержит 2 087 643 узлов и 2 006 300 ячеек. Некоторые детали сетки около фланца и выходного сечения показаны на рис. 7.

Для сетки 3, которая используется в сопряженных тепловых расчетах, поверхности ротора и статора содержат по 28 116 и 29 348 граней, поверхность болтов и фланца — 10 660 граней, стенка корпуса — 2068 граней. На входной границе межлопаточного канала размещается 2024 граней. Границы, через которые газ покидает расчетную область, содержат 2024 (выходное сечение межлопаточного канала) и 741 (лабиринтное уплотнение) граней. Периодические границы (границы области в окружном направлении) содержат по 43 459 граней.

Для условий работы турбины, характеризуемых максимальной угловой скоростью вращения ротора, универсальная пристеночная координата изменяется от 30 до 120 на поверхности ротора и статора лишь с несколькими ячейками, находящимися вне указанного интервала и расположенными вблизи поверхности фланца (статор).

В двумерном случае сеточная зависимость решения проверяется при помощи расчетов на более подробной сетке со сгущением узлов в осевом и радиальном направлении и содержащей 107 000 ячеек. Измельчение сетки приводит к изменению момента ротора приблизительно на 1.3% без существенных различий в распределениях скорости и давления в контрольных сечениях.

Для проверки сеточной зависимости решения в трехмерном случае изменяется лишь число узлов сетки в окружном направлении (их количество удваивается). Подробная сетка содержит около 3 миллионов ячеек, что приводит к изменению момента ротора на 0.6% без значимых различий в распределениях параметров потока в контрольных сечениях.

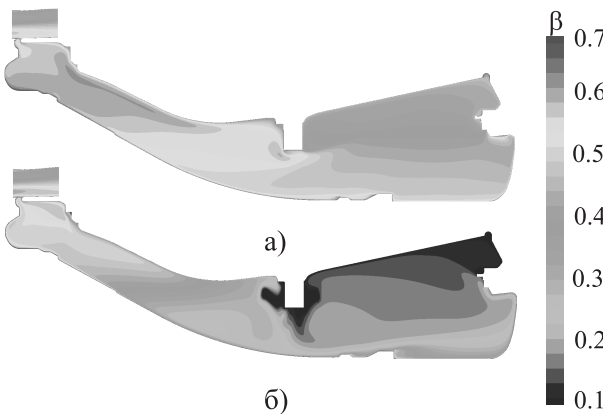


Рис. 8. Линии уровня относительной тангенциальной скорости в двух- (а) и трехмерном (б) случаях

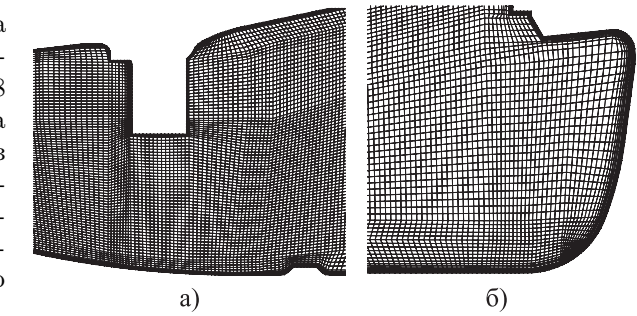


Рис. 7. Детали сетки в меридиональном сечении около фланца (а) и выходного сечения (б)

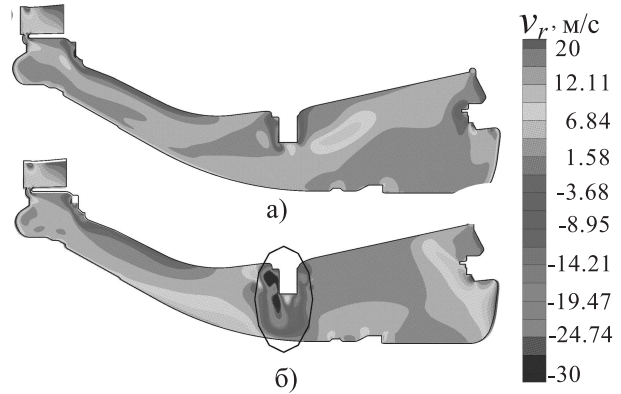


Рис. 9. Линии уровня радиальной скорости в двух- (а) и трехмерном (б) случаях

10. Результаты расчетов. Структура течения в конической каверне имеет черты классических систем, образованных неподвижным и вращающимся дисками [1–3].

Линии уровня относительной тангенциальной и радиальной скорости показаны на рис. 8 (0 соответствует отсутствию вращения жидкости, а 1 — вращению жидкости с угловой скоростью вращения ротора) и рис. 9. Распределения тангенциальной и радиальной скорости, полученные в рамках двух- и трехмерной модели, имеют различия как в количественном, так и в качественном отношении.

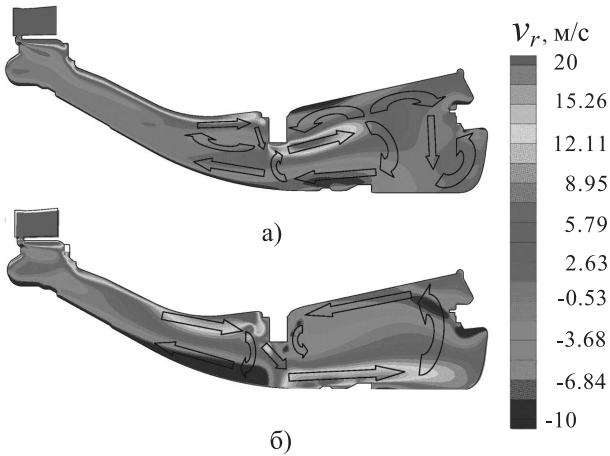


Рис. 10. Направления течения и линии уровня осевой скорости в двух- (а) и трехмерном (б) случаях

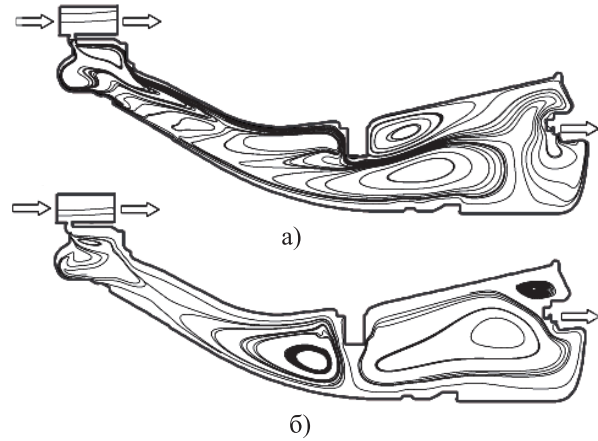


Рис. 11. Линии тока в двух- (а) и трехмерном (б) случаях

Качественное различие результатов численных расчетов в двух- и трехмерной постановке показывает рис. 10 (линии уровня осевой скорости) и линии тока, приведенные на рис. 11. Газ, поступающий в камеру по радиусу, движется вдоль конической поверхности примерно посередине между ее внутренним и внешним радиусами. В сегменте камеры, находящимся слева от фланца, образуется невязкое ядро, а справа от фланца формируется рециркуляционная зона, занимающая практически весь объем камеры. Контрольные сечения, соответствующие различным сечениям по осевой координате, показаны на рис. 12 (в качестве точки отсчета осевой координаты — входное сечение компрессора низкого давления). В контрольных сечениях сравниваются распределения осевой и тангенциальной скорости.

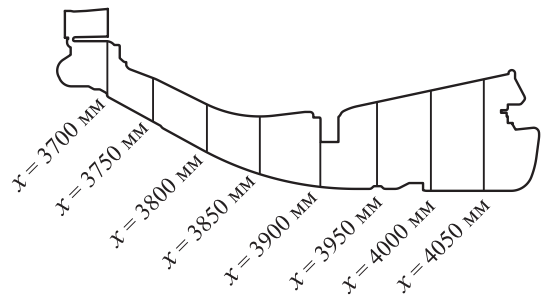


Рис. 12. Положения контрольных сечений по осевой координате

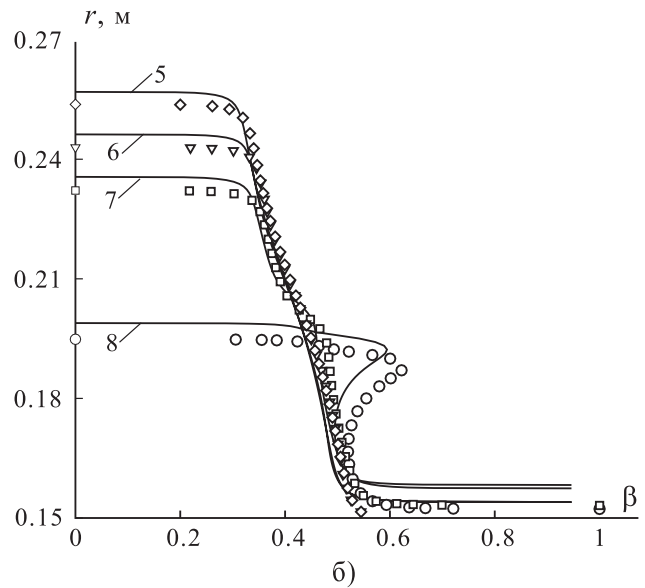
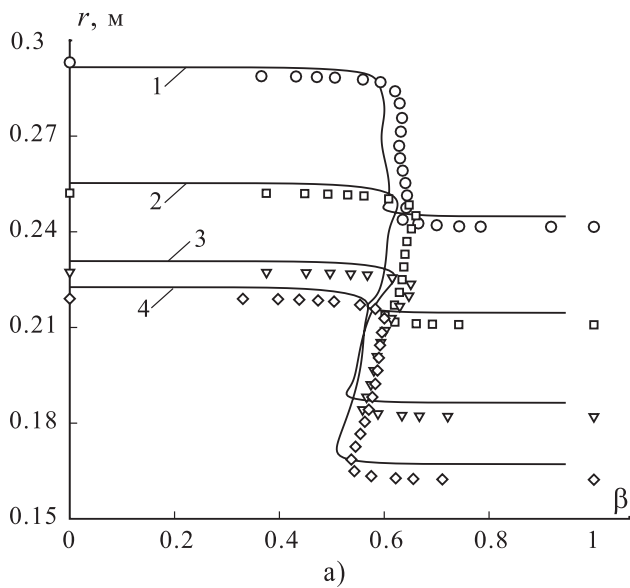


Рис. 13. Распределения относительной тангенциальной скорости при $x = 3700$ (1, \circ); 3750 (2, \square); 3800 (3, ∇); 3850 (4, \diamond); 3900 (5, \diamond); 3950 (6, ∇); 4000 (7, \square); 4050 мм (8, \circ)

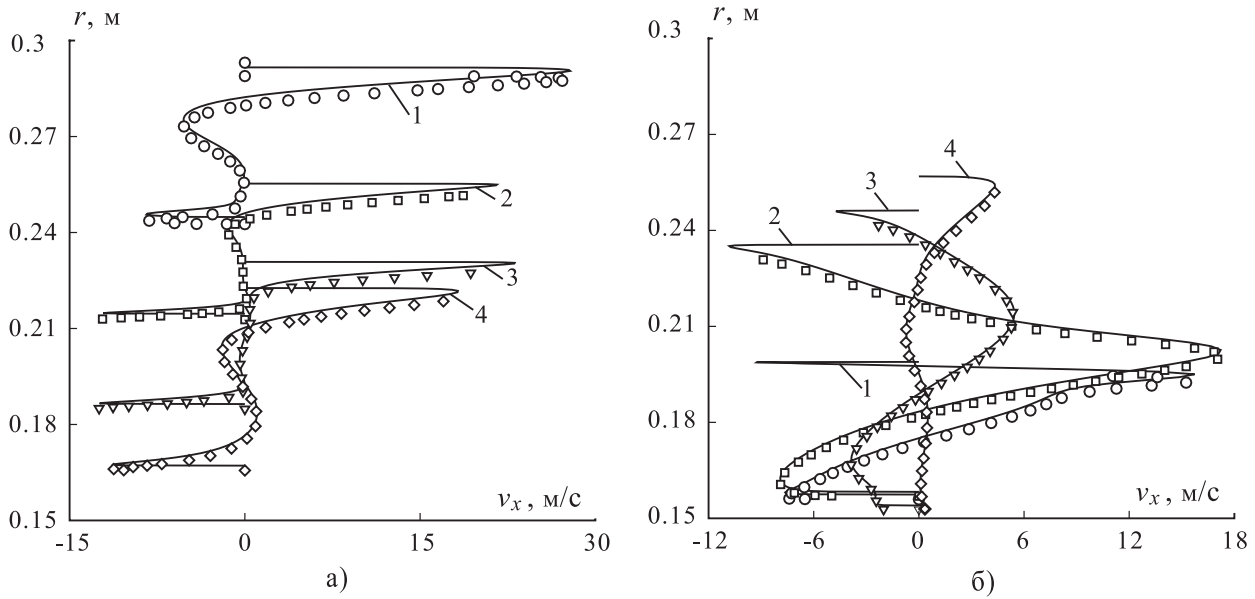


Рис. 14. Распределения осевой скорости при $x = 3700$ (1, \circ); 3750 (2, \square); 3800 (3, ∇); 3850 (4, \diamond)

Распределения относительной тангенциальной скорости приведены на рис. 13. Линии соответствуют результатам расчетов по двумерной модели (модель 1), а символы — расчетам по трехмерной модели, не учитывающей наличие фланца и болтов (модели 2 и 3 при этом дают близкие результаты). Расчеты достаточно хорошо воспроизводят профиль тангенциальной скорости, соответствующий комбинированному вихрю. Уровень тангенциальной скорости в невязком ядре потока, полученный в рамках двумерной модели, в сечениях, лежащих слева от фланца, оказывается ниже, а в сечениях, лежащих справа от фланца, выше по сравнению с распределениями, рассчитанными по трехмерной модели.

Тангенциальная скорость в контрольных сечениях, лежащих слева от фланца, оказывается выше теоретического значения $\beta_* = 0.426$ [1, 2], что объясняется влиянием внешнего осевого потока в межлопаточном канале.

Распределения осевой скорости, приведенные на рис. 14, показывают, что по мере продвижения по осевой координате слева направо невязкое ядро, в котором жидкость вращается как квазитвердое тело, перестает существовать, а пограничные слои на роторе и статоре сливаются (такое поведение согласуется с профилями тангенциальной скорости на рис. 13).

В отличие от болтов, находящихся вблизи входного сечения каверны, фланец оказывает существенное влияние на структуру течения в тангенциальном направлении, приводя к отрыву потока. Присутствие болтов во фланце замедляет течение, способствуя формированию радиального градиента давления (рис. 15) и радиальному течению газа, направленному внутрь каверны (рис. 16).

Градиент давления в осевом направлении практически отсутствует. В трехмерном случае распределение статического давления в рабочем объеме каверны является равномерным. На формирование течения в большей части каверны определяющее влияние оказывают эффекты, связанные с вращением потока, а не силы давления.

Распределения температуры ротора и статора приведены на рис. 17 для различных расчетных моделей. Учет трехмерных деталей модели (модель 3) приводит к увеличению температуры ротора приблизительно на 10 К по сравнению со случаем, когда эти детали не учитываются (модель 2), и на 8 К по сравнению с расчетами на основе двумерной модели (модель 1). Для статора различие температур относительно модели 3 составляет 5 К (модель 2) и 4 К (модель 1).

Момент сопротивления всего диска, смачиваемого жидкостью с одной стороны, выражается равен-

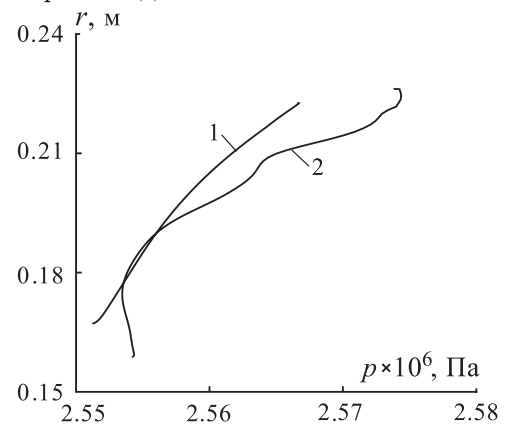


Рис. 15. Распределения статического давления при $x = 3850$ (1); $x = 3890$ мм (2)

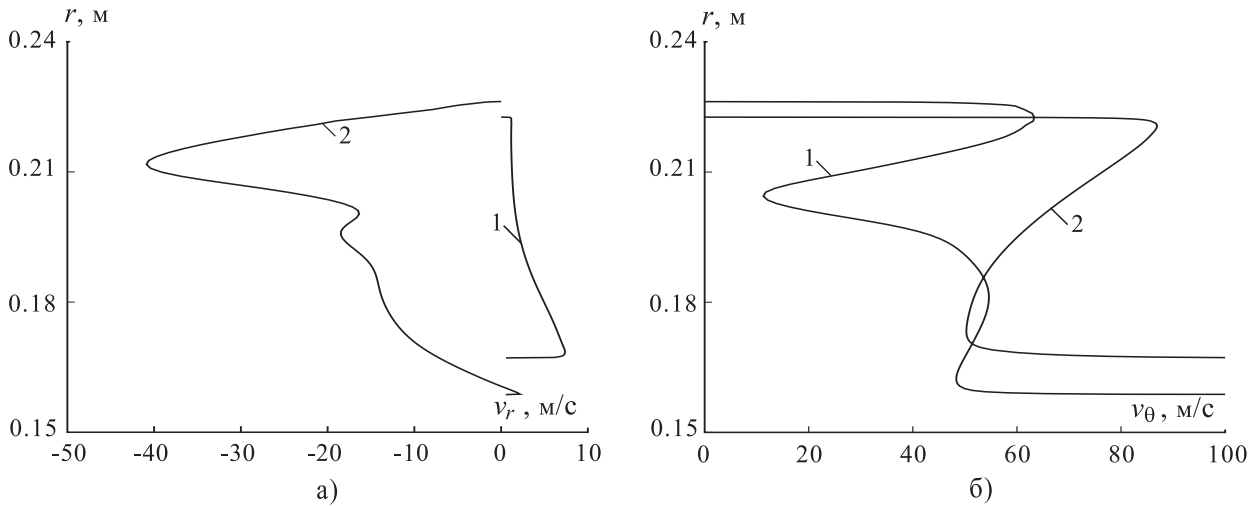


Рис. 16. Распределения радиальной (а) и тангенциальной (б) скорости при $x = 3850$ (1); 3890 мм (2)

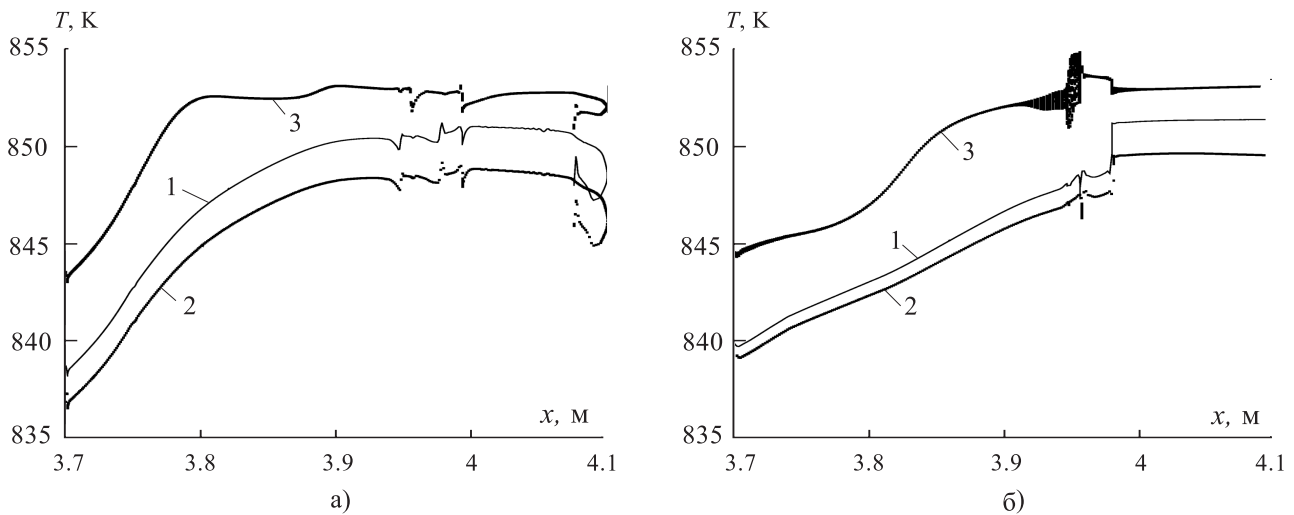


Рис. 17. Распределения температуры ротора (а) и статора (б) в двух- (линия 1) и трехмерных случаях без учета (линия 2) и с учетом (линия 3) трехмерных деталей

ством $M = -2\pi \int_0^b r^2 \tau_{x\varphi} dr$. Коэффициент момента вычисляется по формуле $C_M = \frac{4M}{\rho\omega^2 b^5}$. При изменении

угловой скорости вращения турбинного диска коэффициент момента, обработанный в виде зависимости $C_M Re_\omega^{0.2}$ от параметра турбулентности, изменяется сравнительно слабо (рис. 18).

Для случая теплоизолированной поверхности диска мощность, затрачиваемая на поддержание вращения диска, вычисляется по формуле (disc windage correlation): $W = \frac{1}{2} C_M \rho \omega^3 b^5$, где b – радиус диска. Коэффициент момента C_M обычно рассчитывается по корреляционным формулам для свободного вращающегося диска или диска, вращающегося в осесимметричной каверне [3].

Для расчета дополнительного сопротивления, вызванного вращением ротора, он разделяется на ряд контрольных сечений, показанных на рис. 19 (под n понимается номер сечения). В трехмерном случае мощность, затрачиваемая на поддержание вращения, существенно выше, чем в двумерном случае. Разница достигает 80% (53.8 кВт в трехмерном случае и 29.8 кВт в двумерном). Полученные значения оказываются меньше, чем для свободного вращающегося диска, и близки к тем, которые имеют место для диска, вращающегося в корпусе [3].

11. Заключение. Разработанные математические модели и численные методы реализованы в виде программного комплекса, который является инструментом расчета внутренних турбулентных течений и теплообмена в межлопаточных каналах и вращающихся кавернах газовых турбин и компрессоров, и допускают включение их в состав систем автоматизированного проектирования.

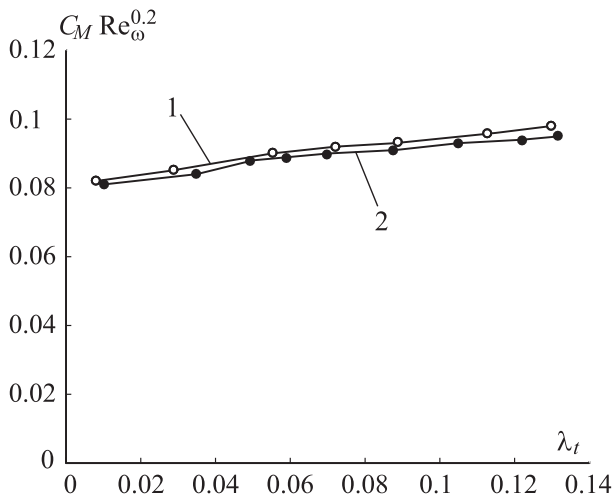


Рис. 18. Зависимость коэффициента момента ротора от безразмерного массового расхода при $\omega = 210$ (1); 470 (2) 1/с

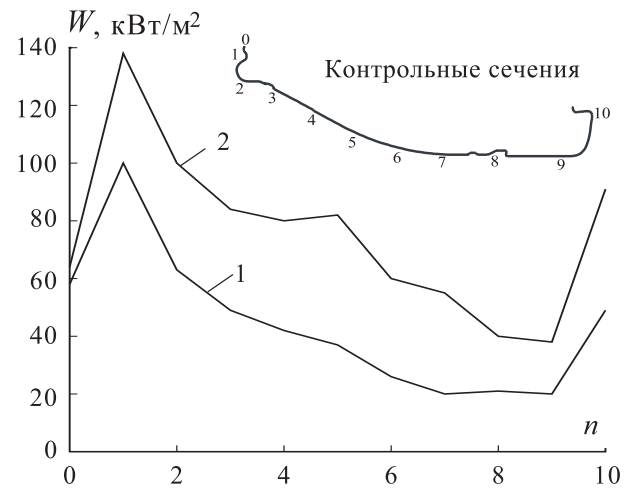


Рис. 19. Мощность, затрачиваемая на поддержание вращения, в двух- (линия 1) и трехмерном (линия 2) случаях

Результаты численного моделирования показывают, что трехмерные детали расчетной области оказывают существенное влияние на структуру течения в конической каверне (направление течения, количество и положение рециркуляционных зон), а также на распределения локальных (скорости, давление, температура) и интегральных характеристик потока (коэффициент момента, мощность, затрачиваемая на поддержание вращения). В частности, максимальное различие температур ротора, полученных в рамках осесимметричной и трехмерной модели, составляет 10 градусов.

Полученные результаты имеют значение для повышения эффективности газотурбинных двигателей и их компонентов, расчета напряженно-деформированного состояния, прочностного анализа и являются входными данными для сопряженного теплового моделирования (газодинамическая задача решается совместно с задачей расчета температурного поля в твердом теле).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Owen J.M., Rogers R.H. Flow and heat transfer in rotating disc systems. Vol. 1. Rotor-stator systems. Taunton: Research Studies Press, 1989.
2. Owen J.M., Rogers R.H. Flow and heat transfer in rotating-disc systems. Vol. 2. Rotating cavities. Taunton: Research Studies Press, 1995.
3. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. Москва: Физматлит, 2010.
4. Yamada Y., Ito M. Frictional resistance of enclosed rotating cones with superposed throughflow // J. of Fluids Engineering. 1979. **101**. 259–264.
5. May N.E., Chew J.W., James P.W. Calculation of turbulent flow for an enclosed rotating cone // J. of Turbomachinery. 1994. **116**, N 3. 548–554.
6. Long C.A., Turner A.B., Kais G., Tham K.M., Verdicchio J.A. Measurement and CFD prediction of the flow within an HP compressor drive cone // J. of Turbomachinery. 2003. **125**, N 1. 165–172.
7. Gan X., Mirzaee I., Owen J.M., Rees D.A.S., Wilson M. Flow in a rotating cavity with a peripheral inlet and outlet of cooling air // ASME Paper. 1996. Paper N 96-GT-309.
8. Mirzaee I., Gan X., Wilson M., Owen J.M. Heat transfer in a rotating cavity with a peripheral inflow and outflow of cooling air // J. of Turbomachinery. 1998. **120**, N 4. 818–823.
9. Jaafar A.A., Motallebi F., Wilson M., Owen J.M. Flow and heat transfer in a rotating cavity with a stationary stepped casing // ASME Paper. 2000. Paper N 2000-GT-281.
10. Tham K.M., Long C.A., Turner A.B., Dixon J.A. Computation of the flow in a HP compressor drive cone cavity // Proc. of the Int. Gas Turbine Congress, 2–7 November 2003, Tokyo, Japan. 2003. Paper N TS-024.
11. Incropera F.P., de Witt D.P. Fundamentals of heat and mass transfer. New York: John Wiley & Sons, 1996.
12. Kilfoil A.S.R., Chew J.W. Modelling of buoyancy-affected flow in co-rotating disc cavities // ASME Paper. 2009. Paper N GT2009-59214.
13. Long C.A., Tucker P.G. Numerical computation of laminar flow in a heated rotating cavity with an axial throughflow of air // Int. J. of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. 1994. **4**, N 4. 347–365.

14. *Sun Z., Kilfoil A., Chew J.W., Hills N.J.* Numerical simulation of natural convection in stationary and rotating cavities // ASME Paper. 2004. Paper N GT2004-53528.
15. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one equation turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper. 1992. Paper N 92-0439.
16. *Deck S., Duveau P., d’Espiney P., Guillen P.* Development and application of Spalart–Allmaras one-equation turbulence model to three-dimensional supersonic complex configurations // Aerospace Science and Technology. 2002. **6**, N 3. 171–183.
17. *Dacles-Mariani J., Zilliac G.G., Chow J.S., Bradshaw P.* Numerical/experimental study of a wingtip vortex in the near field // AIAA Journal. 1995. **33**, N 9. 1561–1568.
18. *Волков К.Н.* Дискретизация уравнений Навье–Стокса на неструктурированной сетке при помощи метода контрольного объема и разностных схем повышенной разрешающей способности // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2008. **48**, № 7. 1250–1273.
19. *Волков К.Н.* Применение метода контрольного объема для решения задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 1. 43–60.
20. *Волков К.Н.* Блочное предобуславливание уравнений Эйлера и Навье–Стокса при моделировании низкоскоростных течений на неструктурированных сетках // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2009. **49**, № 10. 1868–1884.

Поступила в редакцию
21.10.2010
