

УДК 519.6

ДВУХШАГОВЫЙ МЕТОД ЛЕВЕНБЕРГА–МАРКВАРДТА С УЧЕТОМ АПРИОРНОЙ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ

А. В. Елесин¹, А. Ш. Кадырова¹, П. А. Мазуров¹

Предлагается новый двухшаговый метод типа Левенберга–Марквардта минимизации функции невязки, учитывающий априорную сравнительную информацию о значениях идентифицируемых параметров. Эффективность предложенного метода показана на примере решения модельных задач идентификации коэффициента фильтрации трехмерного напорного пласта.

Ключевые слова: минимизация функции невязки, обратная задача, априорная информация.

Введение. Рассматривается задача идентификации коэффициента фильтрации по замерам напора в наблюдательных точках в условиях стационарной напорной однофазной фильтрации жидкости, подчиняющейся закону Дарси. Коэффициент фильтрации представляется в виде кусочно-постоянной функции. Область решения задачи разбивается на зоны однородности, каждая из которых характеризуется двумя значениями коэффициента фильтрации. Уравнение фильтрации в области Ω имеет вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

где $h = h(x, y, z)$ — напор, $K_{xy} = K_{xy}(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n_z} K_{xyk} \varphi_k(x, y, z)$, $K_z = K_z(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n_z} K_{zk} \varphi_k(x, y, z)$ — кусочно-постоянные функции коэффициента фильтрации, Ω_k — зоны однородности, $\bigcup_{k=1}^{n_z} \Omega_k = \Omega$, n_z — число зон однородности, $\varphi_k(x, y, z) = 1$ на Ω_k и $\varphi_k(x, y, z) = 0$ вне Ω_k . На границе области Ω задаются граничные условия первого и второго рода. Стандартным методом решения задачи идентификации является определение идентифицируемых параметров из минимума функции невязки [2]

$$J(K) = \frac{1}{2} R^T R, \quad (2)$$

где $K = \{K_i\}_{i=1}^N = \{\ln K_{xyi}, \ln K_{zi}\}_{i=1}^{n_z}$ — логарифмы идентифицируемых значений коэффициента фильтрации, $N = 2n_z$, $R^T = (h_1 - h_1^{tr}, \dots, h_M - h_M^{tr})$ — вектор невязки, $h_j = h_j(K)$, h_j^{tr} — вычисленные и заданные значения напора в наблюдательных точках и M — число наблюдательных точек. Для минимизации функции невязки (2), которая, как правило, имеет овражную структуру, широко используются различные варианты метода Левенберга–Марквардта [2–6]. В методе Левенберга–Марквардта новые значения параметров на каждой итерации определяются по формуле $K^n = K^{n-1} - (H + \mu_n E)^{-1} g$, где E — единичная матрица, $H = A^T A$ — приближенная матрица вторых производных, $A = \left\{ \frac{\partial h_j}{\partial K_i} \right\}$ — матрица чувствительности, g — градиент функции невязки, μ_n — параметр Марквардта и n — номер итерации. При больших значениях μ_n направление спуска метода Левенберга–Марквардта близко к направлению метода наискорейшего спуска, а при малых значениях μ_n близко к направлению метода Гаусса–Ньютона. Различные варианты метода Левенберга–Марквардта отличаются стратегией выбора на каждой итерации параметра Марквардта.

В настоящей статье предлагается двухшаговый вариант метода Левенберга–Марквардта, учитывающий сравнительную информацию о значениях идентифицируемых параметров K_{xyk} , K_{zk} , полученную по результатам геофизических и геологических исследований:

$$K_{xy1} \leq K_{xy2} \leq \dots \leq K_{xyn_z}, \quad K_{z1} \leq K_{z2} \leq \dots \leq K_{zn_z}. \quad (3)$$

¹ Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, г. Казань; А. В. Елесин, ст. науч. сотр., e-mail: elesin@mail.knc.ru, А. Ш. Кадырова, науч. сотр., e-mail: kadyrova@mail.knc.ru, П. А. Мазуров, зав. лабораторией, e-mail: mazurov@mail.knc.ru

В двухшаговых методах Левенберга–Марквардта [7, 8] используется главная система координат, полученная с помощью сингулярного разложения приближенной матрицы вторых производных $H = V\Sigma V^T$, где V — ортогональная матрица, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ — диагональная матрица и $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$ — сингулярные числа. Направления минимизации в главной системе координат условно делятся на две группы: направления, соответствующие большим сингулярным числам, и направления, соответствующие маленьким сингулярным числам. Смещение по направлениям первой группы соответствует спуску ко дну оврага, по направлениям второй группы — движению вдоль склона оврага. На первом шаге двухшаговых методов Левенберга–Марквардта допускается увеличение функции невязки за счет ее увеличения в направлениях с большими сингулярными числами. Вдоль этих направлений проводится смещение параметров на втором шаге. Особенностью предлагаемого метода, учитывающего сравнительную информацию, является сохранение упорядоченности параметров (3) в течение всего процесса минимизации.

При построении алгоритма используются запасы чувствительности [9]. Запишем приближенное приращение функции невязки между текущей точкой K и точкой минимума $K - s$:

$$J(K - s) - J(K) \approx -g^T(K)s + \frac{1}{2} s^T G(K)s, \tag{4}$$

где $G(K) = \left\{ \frac{\partial^2 J}{\partial K_i \partial K_j} \right\}$ — матрица Гессе. Для вектора $s^N = G^{-1}(K)g(K)$ отклонений Ньютона в окрестности минимума $J(K - s) = 0$ формула (4) приобретает вид $J(K) \approx \frac{1}{2} g^T s^N$ или

$$R^T R \approx g^T s^N = \sum_{i=1}^N g_i s_i^N. \tag{5}$$

Каждое слагаемое $g_i s_i^N$ в (5) характеризует приращение квадрата вектора невязки $R^T R$ за счет i -й переменной. При приближении к точке минимума функции невязки при ограниченных производных $\frac{\partial^2 h_j}{\partial K_i \partial K_i}$ имеем $G \rightarrow H$.

Запасом чувствительности i -й переменной называется величина $P_i = s_i g_i$, где s_i — компоненты вектора отклонений Гаусса–Ньютона $s = H^{-1}g$. В окрестности минимума функции невязки запас чувствительности P_i характеризует потенциальную возможность i -й переменной к минимизации функции невязки. Если матрица A квадратная и невырожденная, то сумма запасов чувствительности всех переменных минимизации равна квадрату вектора невязки:

$$s = H^{-1}g = (A^T A)^{-1} A^T R = A^{-1}R, \\ P = \sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N s_i g_i = s^T g = (A^{-1}R)^T (A^T R) = R^T R = 2J.$$

В случае $M > N$ (число наблюдений больше числа переменных минимизации) сумма запасов чувствительности P не больше квадрата вектора невязки.

Модельные задачи идентификации коэффициента фильтрации по замерам напора в наблюдательных точках. Представленные модельные задачи были построены для пятислойного пласта ($\approx 40 \text{ км} \times 30 \text{ км} \times 200 \text{ м}$). На кровле пласта заданы граничные условия второго рода (меняются от $-9.2 \times 10^{-3} \text{ м/сут}$ до $2 \times 10^{-3} \text{ м/сут}$). Подошва и боковая поверхность пласта непроницаемы, за исключением боковой поверхности пятого слоя, на которой задаются один или два участка с граничными условиями первого рода. Слои разбиты на зоны однородности (всего 71 зона однородности), каждая из которых характеризуется двумя значениями коэффициента фильтрации K_{xyk}^{tr} и K_{zk}^{tr} . Значения коэффициента фильтрации K_{xyk}^{tr} задавались из промежутка от 0.1 м/сут до 100 м/сут, значения K_{zk}^{tr} — из промежутка от 0.0001 м/сут до 0.02 м/сут.

При построении модельных задач из решения уравнения фильтрации (1) с соответствующими граничными условиями при заданных значениях коэффициента фильтрации K_{xyi}^{tr} и K_{zi}^{tr} ($i = 1, \dots, 71$) определялись значения напора в наблюдательных точках h_j^{tr} , $j = 1, \dots, M$. Затем по значениям напора h_j^{tr} восстанавливались значения коэффициента фильтрации K_{xyi} и K_{zi} в зонах однородности. Для дискретизации уравнения (1) использовался метод конечных элементов. Полученная в результате дискретизации система линейных алгебраических уравнений решалась методом сопряженных градиентов с предобуславливающей матрицей в виде неполного разложения Холесского [10]. Начальные значения коэффициента

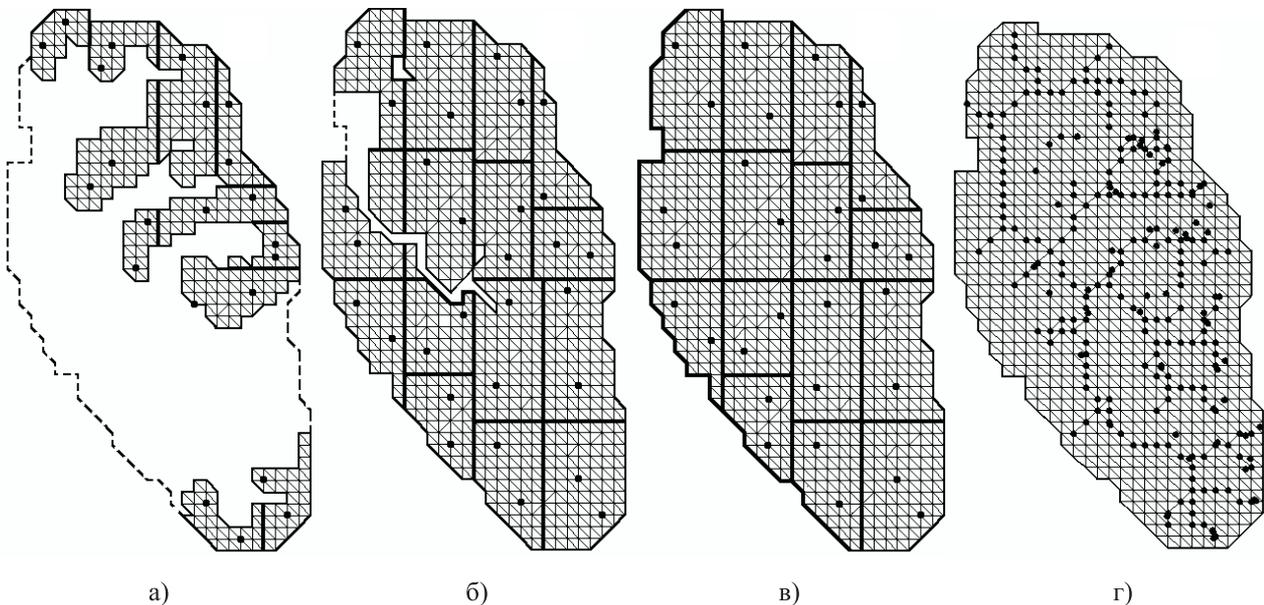
фильтрации $K_{xy}^0 = K_{xy}^0$, $K_{zi}^0 = K_z^0$ ($i = 1, \dots, 71$) определялись из минимума функции невязки (2) (пласт считался однородным с двумя неизвестными значениями коэффициента фильтрации K_{xy}^0 , K_z^0).

Модельная задача 1. В каждой зоне однородности выбрано по две наблюдательные точки (всего 142 наблюдательные точки, рисунки а, б и в). На боковой поверхности пятого слоя задан один участок с граничным условием первого рода: $h = 80$ м. Начальными значениями коэффициента фильтрации являются: $K_{xy}^0 = 24.2$ м/сут и $K_z^0 = 2.32 \times 10^{-3}$ м/сут.

Модельная задача 2. Эта задача отличается от модельной задачи 1 тем, что к 142 наблюдательным точкам добавлены еще 247 наблюдательных точек с наибольшими значениями граничных условий второго рода, расположенные на кровле пласта (рисунок г). Начальные значения коэффициента фильтрации: $K_{xy}^0 = 24.9$ м/сут и $K_z^0 = 2.23 \times 10^{-3}$ м/сут.

Модельная задача 3. В этой задаче, в отличие от модельной задачи 1, выбрано 247 наблюдательных точек, расположенных на кровле пласта. Начальные значения коэффициента фильтрации: $K_{xy}^0 = 25.2$ м/сут и $K_z^0 = 2.2 \times 10^{-3}$ м/сут.

Модельная задача 4. Отличие этой задачи от модельной задачи 1 состоит в том, что на боковой поверхности пятого слоя имеются два участка с граничными условиями первого рода: $h = 80$ м и $h = 90$ м. Начальные значения коэффициента фильтрации: $K_{xy}^0 = 25$ м/сут, $K_z^0 = 2.22 \times 10^{-3}$ м/сут.



Зоны однородности и положение наблюдательных точек: а) слой 1, б) слой 2, в) слои 3–5, г) наблюдательные точки на кровле пласта

Модельная задача 5. Эта задача отличается от модельной задачи 4 тем, что к 142 наблюдательным точкам добавлены еще 247 наблюдательных точек, расположенных на кровле пласта. Начальные значения коэффициента фильтрации: $K_{xy}^0 = 28.8$ м/сут и $K_z^0 = 2.13 \times 10^{-3}$ м/сут.

Модельная задача 6. В этой задаче, в отличие от модельной задачи 4, выбраны 247 наблюдательных точек, расположенных на кровле пласта. Начальные значения коэффициента фильтрации: $K_{xy}^0 = 29.5$ м/сут и $K_z^0 = 2.1 \times 10^{-3}$ м/сут.

Двухшаговый метод Левенберга–Марквардта минимизации функции невязки, учитывающий сравнительную информацию. Предположим, что известна априорная сравнительная информация о значениях идентифицируемых параметров (3). В [11] предложены методы, учитывающие эту информацию и основанные на методе Гаусса–Ньютона с поиском величины шага по направлению убывания. В настоящей статье за основу берутся метод Левенберга–Марквардта (ЛМ) и двухшаговый метод Левенберга–Марквардта (ДЛМ), в которых параметр Марквардта на каждой итерации определяется методом золотого сечения из условия $\min_{\mu_n} J_{\mu_n}$, где J_{μ_n} — значение функции невязки [7]. В методе ЛМ значение функции невязки J_{μ_n} вычисляется по формуле: $J_{\mu_n} = J(K^{n-1} - (H^n + \mu_n E)^{-1} g^n)$. В двухшаговом методе ДЛМ значение функции невязки вычисляется по следующему алгоритму:

1) вычисляется значение $J_{\mu_n}^1 = J(K^{n-1} + d^1)$, где $d^1 = -(H + \mu_n E)^{-1} g$;

2) вычисляется значение $J_{\mu_n}^2 = J(K^{n-1} + d^1 + d^2)$, где $d^2 = V\tilde{d}_V$, \tilde{d}_V — вектор с компонентами $\tilde{d}_{V_i} = -\frac{\tilde{g}_{V_i}}{\sigma_i + \mu_n}$ при $i = 1, \dots, q$, $\tilde{d}_{V_i} = 0$ при $i = q + 1, \dots, n$, \tilde{g}_{V_i} — компоненты вектора $\tilde{g}_V = V^T \tilde{g}$, $\tilde{g} = A^T \tilde{R}$, \tilde{R} — вектор невязок в точке $K^{n-1} + d^1$, номер оси q выбирается из условия $\sigma_q > \mu_n > \sigma_{q+1}$;

3) определяется $J_{\mu_n} = \min \{ J_{\mu_n}^1, J_{\mu_n}^2 \}$.

Предлагаемые методы ЛМА и ДЛМА, учитывающие априорную сравнительную информацию, отличаются от методов ЛМ и ДЛМ, соответственно, тем, что смещение переменных для каждого значения параметра Марквардта проводится с сохранением упорядоченности параметров по следующему алгоритму.

Для каждого значения μ_n формируются переменные минимизации x_j . Переменная минимизации x_j объединяет параметры с одинаковыми значениями $K_{j_1} = \dots = K_{j_2}$, где j_1 и j_2 — первый и последний номер параметров с одинаковыми значениями. Значение переменной x_j совпадает со значением параметров в соответствующей ей группе $(K_{j_1}, \dots, K_{j_2})$. Производные по переменным x_j вычисляются через производные по параметрам K_i по формулам $\frac{\partial J}{\partial x_j} = \sum_{i=j_1}^{j_2} \frac{\partial J}{\partial K_i}$, $\frac{\partial h_l}{\partial x_j} = \sum_{i=j_1}^{j_2} \frac{\partial h_l}{\partial K_i}$. После формирования

переменных x_j последовательно перебираются разбиения каждого набора $(K_{j_1}, \dots, K_{j_2})$ на две части $(K_{j_1}, \dots, K_{j_c})$ и $(K_{j_{c+1}}, \dots, K_{j_2})$, где $j_1 \leq j_c < j_2$. Каждому такому разбиению соответствует множество переменных \tilde{x}_j , число которых на единицу больше числа переменных x_j . Разбиение считается недопустимым, если любое смещение новых переменных минимизации \tilde{x}_j по вычисленному для них направлению спуска $d^\mu = (d_1^\mu, \dots, d_{n_x}^\mu)^T = -(H + \mu_n E)^{-1} g$ ведет к нарушению упорядоченности параметров (n_x — число переменных минимизации \tilde{x}_j). Из всех допустимых разбиений выбирается разбиение с максимальным запасом чувствительности функции невязки \tilde{P}_{\max} . Если \tilde{P}_{\max} больше запаса чувствительности функции невязки для переменных x_j , то делается переход к переменным минимизации \tilde{x}_j с максимальным запасом чувствительности \tilde{P}_{\max} (число переменных минимизации увеличивается на единицу). Процедура увеличения числа переменных минимизации повторяется до тех пор, пока возрастает запас чувствительности функции невязки.

Для каждого значения μ_n значение функции невязки вычисляется следующим образом:

1) суммарный шаг ρ_s полагается равным нулю;

2) определяется шаг $\rho^* = \min \{ \tilde{\rho}, 1 - \rho_s \}$, где $\tilde{\rho} = \min_j \frac{x_{j+1} - x_j}{d_j^\mu - d_{j+1}^\mu}$ для $d_j^\mu - d_{j+1}^\mu > 0$, $\tilde{\rho}$ — максимальное значение шага ρ , при котором выполняется условие сохранения упорядоченности параметров:

$$x_j + \rho d_j^\mu \leq x_{j+1} + \rho d_{j+1}^\mu; \tag{6}$$

3) определяются новые значения переменных $x_j = x_j + \rho^* d_j^\mu$, вычисляется суммарный шаг $\rho_s = \rho_s + \rho^*$ и проверяется условие $\rho_s = 1$. При выполнении этого условия смещение переменных заканчивается и вычисляется значение функции невязки. В противном случае переходим к пункту 4;

4) переменные, удовлетворяющие условию

$$x_j = x_{j+1}, \quad d_j^\mu > d_{j+1}^\mu, \tag{7}$$

объединяются и проводится пересчет отклонений. Объединение переменных и пересчет отклонений для новых переменных повторяется до тех пор, пока остаются переменные, удовлетворяющие условию (7). После этого процедура повторяется, начиная с шага 2.

Для остановки процесса минимизации во всех методах использовались два критерия:

— медленная сходимость итерационного процесса $J(K^{n-1}) - J(K^n) < 0.01 J(K^{n-1})$ в течение трех итераций,

— достижение заданной точности по невязкам $r_{\max} = \max_j |h_j - h_j^{\text{tr}}| < 10^{-6}$.

Основные вычислительные затраты при минимизации функции невязки приходятся на вычисление значений функции невязки и элементов матрицы чувствительности. Для оценки этих затрат введено число $n_c = n_{c1} + n_{c2}$, где n_{c1} — число решений уравнения фильтрации и n_{c2} — число решений уравнений, полученных прямым дифференцированием уравнения фильтрации для вычисления элементов матрицы чувствительности.

В таблице приведены значения максимальной невязки r_{\max} и среднеквадратического отклонения ито-

говых значений коэффициента фильтрации от истинных:

$$\Delta \ln K_{xyz} = \left[\frac{1}{142} \sum_{k=1}^{71} \left((\ln K_{xyk}^{\text{tr}} - \ln K_{xyk})^2 + (\ln K_{zk}^{\text{tr}} - \ln K_{zk})^2 \right) \right]^{1/2},$$

а также n_{it} — число выполненных итераций и n_c — число, характеризующее вычислительные затраты. Эти значения получены при решении модельных задач идентификации коэффициента фильтрации. В таблице приняты следующие обозначения: ЛМ — метод Левенберга–Марквардта; ДЛМ — двухшаговый метод Левенберга–Марквардта; ЛМА — метод Левенберга–Марквардта с учетом априорной сравнительной информации; ДЛМА — двухшаговый метод Левенберга–Марквардта с учетом априорной сравнительной информации. Приведенные результаты показывают, что двухшаговый метод ДЛМА по вычислительным затратам более эффективен по сравнению с методами ЛМ, ДЛМ и ЛМА.

Модельные задачи идентификации коэффициента фильтрации

задача	метод	начальное состояние		конечное состояние			
		r_{max}	$\Delta \ln K_{xyz}$	r_{max}	$\Delta \ln K_{xyz}$	n_{it}	n_c
1	ЛМ	7.18	1.70	1×10^{-6}	0.24	332	50700
	ДЛМ			8×10^{-7}	0.26	82	13368
	ЛМА			9×10^{-7}	0.01	41	6251
	ДЛМА			8×10^{-7}	0.01	21	3420
2	ЛМ	9.41	1.70	5×10^{-7}	1×10^{-3}	93	14194
	ДЛМ			1×10^{-11}	8×10^{-10}	33	5393
	ЛМА			3×10^{-7}	7×10^{-4}	41	6246
	ДЛМА			5×10^{-7}	5×10^{-5}	16	2611
3	ЛМ	9.27	1.70	3×10^{-5}	0.71	290	44313
	ДЛМ			1×10^{-6}	0.19	95	15496
	ЛМА			1×10^{-6}	0.05	178	27196
	ДЛМА			8×10^{-7}	0.05	25	4075
4	ЛМ	7.46	1.70	1×10^{-6}	0.02	109	16646
	ДЛМ			7×10^{-7}	0.02	35	5697
	ЛМА			8×10^{-7}	7×10^{-3}	32	4881
	ДЛМА			7×10^{-7}	7×10^{-3}	12	1954
5	ЛМ	9.3	1.73	2×10^{-7}	5×10^{-4}	50	7629
	ДЛМ			8×10^{-12}	8×10^{-10}	27	4415
	ЛМА			9×10^{-7}	1×10^{-3}	21	3197
	ДЛМА			6×10^{-7}	8×10^{-6}	12	1936
6	ЛМ	9.18	1.73	1×10^{-6}	0.25	592	90471
	ДЛМ			9×10^{-7}	0.25	76	12417
	ЛМА			1×10^{-6}	0.05	75	11448
	ДЛМА			1×10^{-6}	0.06	24	3920

Заключение. На основе методов Левенберга–Марквардта построены методы минимизации функции невязки, учитывающие сравнительную априорную информацию о значениях идентифицируемых параметров. Особенностью этих методов является то, что упорядоченность параметров сохраняется в течение всего процесса минимизации.

Методы минимизации функции невязки, учитывающие сравнительную априорную информацию о значениях идентифицируемых параметров, протестированы на модельных задачах идентификации коэффициента фильтрации. Учет априорной сравнительной информации о значениях идентифицируемых

параметров позволил сократить вычислительные затраты. Из методов, учитывающих априорную сравнительную информацию, наиболее эффективным по вычислительным затратам показал себя двухшаговый метод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироненко В.А.* Динамика подземных вод. М.: Изд-во Моск. горного гос. ун-та, 1996.
2. *Sun N.-Z.* Inverse problems in groundwater modeling. Dordrecht: Kluwer Acad., 1994.
3. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.
4. *Летова Т.А., Пантелеев А.В.* Экстремум функций в примерах и задачах. М.: Изд-во МАИ, 1998.
5. *Hill M.C.* Methods and guidelines for effective model calibration. U.S. geological survey water-resources investigations report 98-4005. Denver, Colorado, 1998.
6. *Гилл Ф., Мюррей М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
7. *Мазуров П.А., Елесин А.В., Кадырова А.Ш.* Квазиньютоновский двухшаговый метод минимизации функции невязки // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, № 1. 64–71.
8. *Елесин А.В., Кадырова А.Ш., Мазуров П.А.* Двухшаговые методы Левенберга–Марквардта в задаче идентификации коэффициента фильтрации // Георесурсы. 2009. **4**. 40–42.
9. *Мазуров П.А., Габидуллина А.Н., Елесин А.В., Кадырова А.Ш.* Запасы чувствительности в задачах идентификации коэффициента фильтрации трехмерных пластов // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 1. 50–61.
10. *Hill M.C.* Solving groundwater flow problems by conjugate-gradient methods and the strongly implicit procedure // Water Resour. Res. 1990. **26**, N 9. 1961–1969.
11. *Елесин А.В., Кадырова А.Ш.* Учет априорной сравнительной информации в задачах идентификации коэффициента фильтрации // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 1. 14–19.

Поступила в редакцию
29.11.2010
