

УДК 532.546

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ
УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ
МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ**

Д. Н. Никольский¹, В. И. Дорофеева¹

Построена новая математическая модель двумерного процесса оседания бугра грунтовых вод. Модель протестирована на известных решениях плоских задач. Приведен пример процесса оседания бугра грунтовых вод в слое, проницаемость которого изменяется по степенному закону.

Ключевые слова: эволюция свободной поверхности, метод интегральных уравнений, метод дискретных особенностей.

Введение. При поливе, дожде, разливе водоемов и таянии снега образуются бугры грунтовых вод, которые растекаются с течением времени. В результате этого процесса в областях, смежных с бугром грунтовых вод, происходит изменение уровня грунтовых вод. Последнее может приводить к негативным последствиям, связанным с затоплением или заболачиванием территорий, и требует построения математических моделей процесса изменения уровня грунтовых вод для оценки и предотвращения нежелательного влияния.

Ранее П. Я. Кочина предложила свести моделирование процесса изменения уровня грунтовых вод к решению задачи об эволюции резкой границы L_t , отделяющей область сухого грунта от области, насыщенной водой. Было показано, что давление p в сухом грунте, а значит и на подвижной границе L_t , должно быть приблизительно постоянным. Кроме того, было установлено, что при описании движения жидкости в грунте можно пренебрегать инерционными членами и использовать линейный закон фильтрации (вектор скорости имеет потенциал).

Впоследствии П. Я. Кочина, Л. А. Галин и Э. Г. Кучеренко, а затем и другие исследователи методами теории функции комплексного переменного предложили точные и приближенные (в виде рядов) решения конкретных практических задач. Авторами данной статьи эти точные и приближенные решения используются для тестирования более общей модели процесса изменения уровня грунтовых вод.

В настоящей статье анализируется задача о совместном движении двух жидкостей в постановке Лейбензона–Маскета (модель “поршневого” вытеснения), причем внешняя жидкость рассматривается как фиктивная; после построения основной системы интегрального и дифференциального уравнений выбирается предельный случай, в котором вязкость и плотность внешней жидкости стремятся к нулю. Для численного решения основной системы интегрального и дифференциального уравнений применяется метод дискретных особенностей.

1. Основная система интегрального и дифференциального уравнений. В неоднородном изотропном слое проводимости $P = KH$ рассмотрим область, занятую одной жидкостью с вязкостью $\mu_2 = 1$ и плотностью $\rho_2 = 1$, окруженную другой жидкостью с вязкостью μ_1 и плотностью ρ_1 . Жидкости разделены гладкой кривой L_t . Область D совместной фильтрации жидкостей может быть ограничена непроницаемой прямой L_I , разделяющей грунт или непроницаемые породы, или прямой L_P , разделяющей грунт и свободную жидкость.

Фильтрацию жидкостей описывает квазипотенциал φ , удовлетворяющий эллиптическому уравнению

$$\nabla(P\nabla\varphi) = 0 \quad \text{в } D, \quad \varphi = \frac{1}{\mu_\nu} (\rho_\nu\Pi - p), \quad \nu = 1, 2, \tag{1}$$

и граничным условиям [1, с. 266–267]

$$\mu_1\varphi^+ - \varphi^- = (\rho_1 - 1)\Pi, \quad v_n^+ = v_n^- \quad \text{на } L_t, \tag{2}$$

$$v_n^+ = 0 \quad \text{на } L_I, \tag{3}$$

$$\varphi^+ = \Pi - \xi \quad \text{на } L_P. \tag{4}$$

¹ Орловский государственный университет, физико-математический факультет, ул. Комсомольская, 95, 302026, г. Орел; Д. Н. Никольский, доцент, e-mail: nikolskydn@mail.ru; В. И. Дорофеева, зав. кафедрой, e-mail: vdorofey@mail.ru

Здесь Π — потенциал массовых сил, ξ — функция, определяющая давление на L_P , и $\mathbf{v} = K \text{grad } \varphi$ — скорость фильтрации. Полагаем, что подвижная граница L_t в любой момент времени $t \geq 0$ задана параметрически $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau, t)$, где τ — параметр. Тогда перемещение контура L_t с течением времени t описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-}{2} \quad \text{на } L_t, \quad (5)$$

а начальное положение известно:

$$\mathbf{r}(M, 0) = \mathbf{r}_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (6)$$

Отметим, что система (1), (2) и (5) при $\mu_1 \rightarrow 0$ и $\rho_1 \rightarrow 0$ и $P = 1$ совпадает с математической постановкой Кочкиной для задачи об опускании бугра грунтовых вод [2, с. 547–548]. Все выражения (1)–(6) записаны в безразмерных величинах. Связь между характерными величинами имеет вид $P_0 = \rho_2 \Pi_0$, $\mu_2 V_0 L_0 = K_0 P_0$, $\sigma L_0 = V_0 T_0$ и $\Pi_0 = g L_0$.

Систему (1)–(5) решаем методом нанесения на границу L_t квазипотенциала двойного слоя [3, 4]. В результате с учетом того, что $\mu_1 \rightarrow 0$ и $\rho_1 \rightarrow 0$, получаем систему интегрального и дифференциального уравнений:

$$g - 2G[g, L_t] = -2\Pi, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{V}[g, L_t] \quad \text{на } L_t, \quad (7)$$

$G[g, L_t](M) = \int_{L_t} g(N) \Omega(M, N) dl_N$ — оператор квазипотенциала двойного слоя; $\Omega = P(N) \frac{\partial \Phi_1(M, N)}{\partial \mathbf{n}_N}$ —

ядро; Φ_1 — квазипотенциал стока с полным расходом, равным -1 ; $\Pi = y$ — потенциал силы тяжести; оператор

$$\mathbf{V}[g, L_t](M) = \text{grad } G[g, L_t](M) = \int_{L_t} \frac{\partial g(N)}{\partial \mathbf{l}_N} \mathbf{V}_2(M, N) dl_N,$$

$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{H(M)} \left(\frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial y_M} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \Psi_2(M, N)}{\partial x_M} \mathbf{e}_y \right)$ — скорость вихря с полной циркуляцией, равной -1 ; Ψ_2 — функция тока этого вихря; \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — единичные орты. Граничные условия (3) на L_I или (4) на L_P учитываются подбором функций Φ_1 и Ψ_2 .

2. Дискретная схема для основной системы. Построим дискретный аналог основной системы интегрального и дифференциального уравнений (7). Для этого в каждый момент времени t_j , $j = \overline{0, J}$, границу L_{t_j} представим в виде $n - 1$ приблизительно равных отрезков. В результате получим множество точек $\{(x_m, y_m) | m = \overline{0, n-1}\}$. Считаем, что на каждом из отрезков плотность квазипотенциала двойного слоя постоянна.

Следуя [3, 4], построим дискретный аналог основной системы интегрального и дифференциального уравнений (7). Получим систему линейных алгебраических уравнений размерности $n \times n$ и n выражений для вычисления элементарных смещений $\Delta \mathbf{r}_m^j$ подвижной границы в каждый момент времени t_j :

$$g_m^j - 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} g_k^j \Omega_{mk}^j \Delta l_k^j = -2\Pi_m^j, \quad \frac{\Delta \mathbf{r}_m^j}{\Delta t} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} \mathbf{V}_{2mk}^j \Delta g_k^j, \quad m = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, J}. \quad (8)$$

Отметим, что система (8) построена в предположении, что в каждый момент времени t_j отрезки, образующие подвижную границу L_{t_j} , имеют одинаковую длину, поэтому в процессе численных расчетов после каждого элементарного смещения границы производилось ее переразбиение на равные по длине части.

3. Тестирование на плоских задачах. В [2] приводится исследование плоской задачи о растекании бугра грунтовых вод методом решения нелинейного уравнения на границе. Так, для бугра, в начальный момент времени представленного параметрическими уравнениями [2, с. 554]

$$x = \xi + \frac{\alpha \xi}{1 + \xi^2}, \quad y = \frac{\alpha}{1 + \xi^2} \quad \text{при } t = 0 \quad (9)$$

и расположенного в безграничном однородном грунте, закон опускания частицы контура, находящейся на вершине бугра, имеет вид

$$h(0, t) = \frac{2}{3} \left(-t - 1 + \frac{1}{2} \alpha + \sqrt{t^2 + t(2 - \alpha) + (1 + \alpha)^2} \right). \quad (10)$$

Для численного решения задачи используем систему (8). В этой системе плоскому случаю однородного грунта соответствуют значение проводимости P , равное 1, и функции $\Phi_1 = -(2\pi)^{-1} \ln r_{NM}$ и $\Psi_2 = (2\pi)^{-1} \ln r_{NM}$.

Проведено сопоставление результатов численного решения задачи об оседании бугра (9) с точным решением (10). Результаты представлены в табл. 1. В этой таблице погрешность $\eta = \left| 1 - \frac{T}{T_1} \right| \times 100\%$, где T — время опускания бугра на 1/5 от первоначальной высоты, полученное в ходе численного решения задачи, и T_1 — время опускания на такую же высоту, полученное из (10).

Анализируя таблицу, видим, что с уменьшением шага по времени и длины отрезков, образующих подвижную границу, погрешность численного решения уменьшается, т.е. численное решение сходится к точному.

Таблица 1
Влияние числа n на погрешность η

n	51	101	201	401	801	1601
$\eta_{\Delta t}, \%$	48.89	10.41	2.08	—	—	—
$\eta_{\Delta t/2}, \%$	47.91	11.45	3.12	1.04	1.04	—
$\eta_{\Delta t/4}, \%$	47.91	11.45	3.12	1.56	0.77	0.52

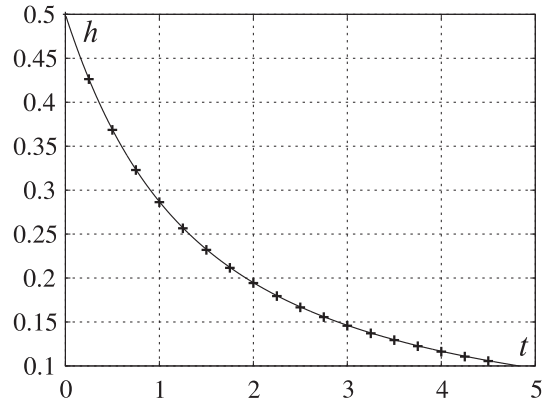


Рис. 1. Изменение высоты бугра с течением времени

На рис. 1 приводится зависимость высоты бугра h от времени. На этом рисунке сплошная кривая получена в ходе численных расчетов (решалась основная система уравнений (8)), крестиками обозначены точки, вычисленные по точной формуле (10).

Решение (10) позволяет протестировать процесс изменения положения границы раздела воды и воздуха L_t . Однако при исследовании практических задач возникает необходимость вычисления значений векторов скоростей (картины течения) в области протекания процесса. Для тестирования результатов вычисления поля скоростей по схеме (8) воспользуемся приближенным решением Кочкиной [2, с. 559]:

$$w(z, t) = \frac{ikH}{\pi} \ln \frac{x + R - ict}{z - R - ict}, \quad t \geq t_0. \tag{11}$$

Решение (11) описывает эволюцию бугра грунтовых вод, подчиняющуюся следующему закону:

$$y = \frac{H}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x + R}{ct} - \operatorname{arctg} \frac{x - R}{ct} \right), \quad t \geq t_0.$$

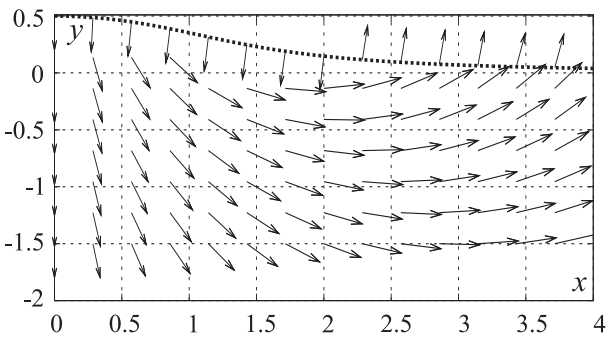


Рис. 2. Поле направлений в случае численного решения основной системы (8)

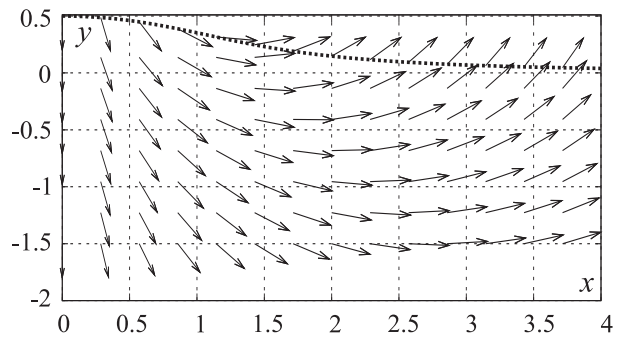


Рис. 3. Поле направлений в случае приближенного решения (11)

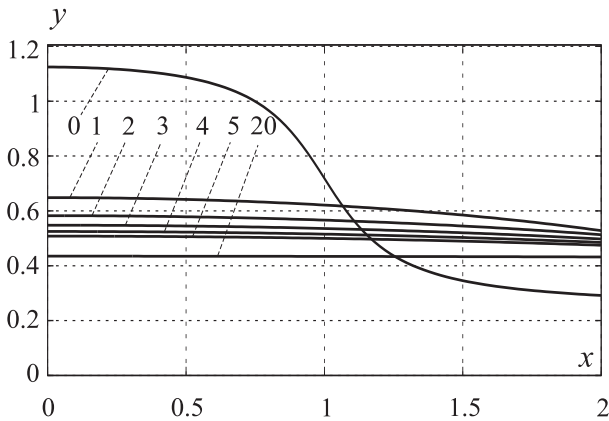


Рис. 4. Процесс оседания бугра грунтовых вод в степенном слое

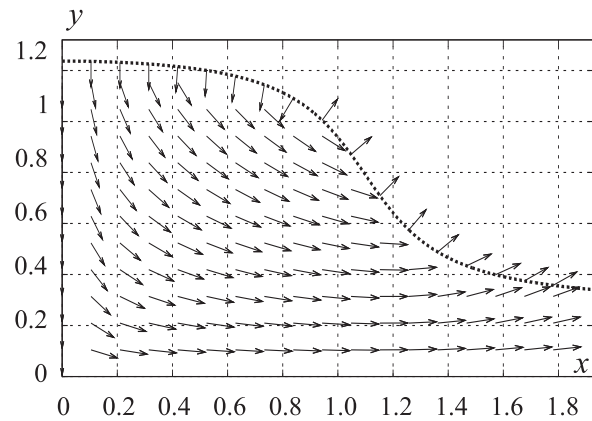


Рис. 5. Поле направления в момент времени $t = 0$

На рис. 2 построено поле направлений, полученное в ходе численного решения системы (8), на рис. 3 — по формуле (11). Анализируя рис. 2 и 3, видим, что поле направлений на рис. 2 более соответствует физической картине течения. Действительно, на границе L_t давление постоянно, а значит вектора скорости должны быть направлены под углом 90° к подвижной границе.

4. Процесс оседания в степенном слое. В качестве примера рассмотрим процесс оседания бугра грунтовых вод в степенном слое, проводимость которого $P = y^s$. Для определенности полагаем, что коэффициент проницаемости грунта $K = y^s$, а толщина слоя $H = 1$. В основной системе (8) функции Φ_1 и Φ_2 выбираем в виде $\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} (y_M y_N)^{-s/2} Q_{s/2-1}(\zeta)$ и $\Phi_2 = -\frac{1}{2\pi} (y_M y_N)^{s/2} Q_{s/2}(\zeta)$ [5], где $\zeta = \frac{(x_M - x_N)^2 + y_M^2 + y_N^2}{2y_M y_N}$ и $Q_\nu(\zeta)$ — функция Лежандра второго рода аргумента ζ . В выбранном слое на оси Ox проводимость слоя P равна нулю, поэтому ее называют сингулярной линией.

На рис. 4 построены последовательные положения подвижной границы L_{t_j} в моменты времени $t_j = j/20 T$ для $j = \overline{0, 5}$ и $t_j = T$ для $j = 20$. Положения подвижной границы L_{t_j} для $j = \overline{6, 19}$ практически сливаются на рисунке и поэтому не приведены. Время T содержит значение момента времени, по истечении которого высота бугра уменьшается в пять раз.

В табл. 2 представлена зависимость времени T от числа точек разбиения n границы L_t в каждый момент времени. Анализируя эту таблицу, видим, что с ростом n величина η уменьшается, а значит имеет место “практическая сходимость”.

Здесь $\eta = \left| 1 - \frac{T}{T_p} \right| \times 100\%$, где T — время из текущего столбца и T_p — из предыдущего.

На рис. 5 представлено поле направлений в области протекания процесса в фиксированный момент времени $t = 0$. Из этого рисунка следует, что поле направлений имеет физический смысл. Действительно, на границе раздела воды и воздуха векторы скоростей ориентированы под углом 90° к границе L_0 . Отклонение от прямого угла по краям кривой объясняется тем, что скорости на краях границы L_t малы и их модули становятся сопоставимы с погрешностью вычислений. Следует отметить, что в процессе оседания бугра грунтовых вод точки с малыми скоростями практически не смещаются и, следовательно, не влияют на характер протекания процесса. Кроме того, при $y = 0$ проницаемость грунта $K = 0$, т.е. ось абсцисс представляет собой непроницаемую линию, и поэтому на рис. 5 наблюдается обтекание оси абсцисс.

Таким образом, математическая модель двумерной эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в предельном случае, когда вязкость и плотность внешней жидкости стремятся к нулю, применима к описанию процесса изменения уровня грунтовых вод под действием силы тяжести.

Таблица 2
“Практическая сходимость” основной системы (8)

n	101	201	301	401	501
$T_{\Delta t}$	272.82	324.9	349.9	—	—
$\eta_{\Delta t}$	—	19.1	7.69	—	—
$T_{\Delta t/2}$	273.24	325.65	366.11	376.55	—
$\eta_{\Delta t/2}$	—	19.2	12.4	2.9	—
$T_{\Delta t/4}$	273.455	326.02	366.695	403.47	421.095
$\eta_{\Delta t/4}$	—	19.2	12.5	10.0	4.4

Дальнейшее направление исследований может быть связано с исследованием процесса изменения уровня грунтовых вод под действием силы тяжести и дренажных устройств, а также обобщением полученного результата на трехмерный случай [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
3. Никольский Д.Н. Вычисление скорости перемещения границы раздела различных жидкостей в неоднородном слое методом дискретных вихревых пар // Матем. моделирование. 2009. **21**, № 12. 122–128.
4. Никольский Д.Н. Эволюция границы раздела различных жидкостей в неоднородных слоях // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. **50**, № 7. 1269–1275.
5. Пивень В.Ф. Теория двумерных процессов в неоднородных слоях со степенным законом изменения их проводимости // Прикл. матем. и механ. 1997. **61**, вып. 4. 595–605.
6. Никольский Д.Н. Математическое моделирование трехмерной задачи эволюции поверхности раздела жидкостей различной вязкости и плотности в неоднородном грунте // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2007. **47**, № 8. 1401–1414.

Поступила в редакцию
25.01.2011
