УДК 517.98

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНОМЕРНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МЕТОДА НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА

М. Ю. Кокурин[1], О. В. Карабанова[1]

Представлен общий подход к построению итерационных процессов для решения нелинейных некорректных операторных уравнений в банаховом пространстве. В его основе лежит линеаризация исходного уравнения с последующей регуляризацией и конечномерной аппроксимацией по схеме Петрова–Галеркина. Исследуются различные способы практической реализации получаемых процессов.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, банахово пространство, методы итеративной регуляризации, проекционные методы, истокообразное представление.

1. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x) = 0, \quad x \in X, \tag{1.1}$$

где $F(x)$ — оператор, действующий из банахова пространства X в X. Предполагаем, что оператор $F(x)$ дважды дифференцируем по Гато, причем

$$\big\|F'(x)\big\| \leqslant N_1, \quad \big\|F''(x)\big\| \leqslant N_2 \quad \forall x \in \Omega_R, \tag{1.2}$$

где $\Omega_R = \big\{x \in X : \|x - x^*\| \leqslant R\big\}$, x^* — некоторое решение исходного уравнения, единственность которого не предполагается. Здесь и далее в работе через $\|\cdot\|$ обозначается норма соответствующего пространства. Считаем, что линейный оператор $F'(x^*)$ вполне непрерывен. Таким образом, $F'(x^*)$ не является непрерывно обратимым оператором, поэтому задача (1.1) относится в общем случае к классу некорректных [1, с. 16]. К уравнениям этого типа сводятся, например, обратные задачи математической физики, возникающие в различных областях естествознания (см., например, [1 – 3]). Как правило, отыскание решений этих задач осложняется наличием погрешностей в их исходных данных.

Пусть вместо точного оператора $F(x)$ в (1.1) известно лишь его приближение $\tilde F(x)$, которое обладает двумя производными Гато, удовлетворяет неравенствам (1.2) и условиям

$$\big\|\tilde F(x^*)\big\| \leqslant \delta, \quad \big\|\tilde F'(x^*) - F'(x^*)\big\| \leqslant \delta, \tag{1.3}$$

характеризующим уровень погрешности в исходных данных. Обозначим через $X^*(F)$ множество решений уравнения (1.1). В контексте теории некорректных задач разработка методов приближенного решения уравнения (1.1) в условиях погрешностей сводится к построению регуляризующих алгоритмов для задачи (1.1). Регуляризующим алгоритмом для уравнения (1.1) с погрешностями, подчиненными (1.3), называется зависящее от параметра $\delta \geqslant 0$ отображение R_δ, ставящее в соответствие приближенному оператору $\tilde F(x)$ элемент $R_\delta(\tilde F) \in X$ так, что

$$\exists x^* \in X^*(F) : \lim_{\delta \to 0} \sup_{\tilde F} \big\|R_\delta(\tilde F) - x^*\big\| = 0 \tag{1.4}$$

(см. [1, 2, 4]). Верхняя грань в (1.4) вычисляется по всем приближенным операторам $\tilde F(x)$, удовлетворяющим указанным выше условиям гладкости и условиям (1.3). Согласно (1.4), элемент $x_\delta = R_\delta(\tilde F)$ может быть взят в качестве приближенного решения уравнения (1.1), отвечающего приближенному оператору $\tilde F(x)$ с заданной погрешностью δ.

В [5] (см. также [2, 6]) введен и исследован класс методов аппроксимации решения уравнения (1.1)

$$x_0 \in X, \quad x_{n+1} = \xi - \Theta\big(\tilde F'(x_n), \alpha_n\big)\big(\tilde F(x_n) - \tilde F'(x_n)(x_n - \xi)\big), \tag{1.5}$$

[1] Марийский государственный университет, физико-математический факультет, пр. Ленина, 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kokurin@marsu.ru

где $\alpha_n > 0$ — параметр регуляризации, элемент $\xi \in X$ играет роль начального приближения к искомому решению $x^* \in X^*(F)$. К группе методов (1.5) приходим, регуляризуя согласно общей схеме (см. [6]) уравнение

$$F'(x_n)(x - x_n) + F(x_n) = 0, \quad x \in X, \tag{1.6}$$

являющееся линеаризацией уравнения (1.1) в окрестности текущей итерационной точки x_n по схеме метода Ньютона–Канторовича ([7, гл. 18; 8, с. 401]). Обоснование методов (1.5) проводится в предположениях, обеспечивающих аналитичность порождающей функции $\Theta(\lambda, \alpha)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$, в открытой окрестности $D \subset \mathbf{C}$ спектра $\sigma\big(F'(x_n)\big)$. Через $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ и $\rho(A) = \mathbf{C}\backslash\sigma(A)$ здесь и далее обозначаются резольвента и резольвентное множество оператора $A \in L(X)$ соответственно. Пусть функция $\varphi(\lambda)$ аналитична по λ в области D, Γ — положительно ориентированный замкнутый контур, лежащий в D и содержащий внутри спектр $\sigma(A)$. Напомним, что функция $\varphi(A)$ оператора $A \in L(X)$ в банаховом пространстве X определяется формулой Рисса–Данфорда [9]

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \varphi(\lambda) R(\lambda, A)\, d\lambda. \tag{1.7}$$

Потребности практической реализации регуляризующих алгоритмов, получаемых по схеме (1.5), диктуют необходимость разработки их аналогов, оперирующих с конечномерными аппроксимациями пространства X и оператора $\tilde{F}(x_n)$.

Зафиксируем семейства конечномерных подпространств $\{N_l\}$ и $\{M_m\}$ из X. Пусть P_l, Q_m — проекторы (в общем случае неортогональные) на подпространства N_l, M_m соответственно. Таким образом, имеют место соотношения

$$P_l^2 = P_l, \quad Q_m^2 = Q_m, \quad N_l = \mathrm{Im}\,(P_l), \quad M_m = \mathrm{Im}(Q_m),$$

где $\mathrm{Im}\,(A)$ есть образ оператора A. Кроме того, предполагается, что семейства $\{N_l\}$, $\{M_m\}$ плотны в пространстве X, так что

$$\lim_{l\to\infty} \big\|(E - P_l)x\big\| = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \big\|(E - Q_m)x\big\| = 0 \quad \forall x \in X.$$

Ввиду теоремы Банаха–Штейнгауза [8, с. 129], проекторы P_l, Q_m равномерно ограничены по норме, т.е.

$$\sup_l \|P_l\| < \infty, \quad \sup_m \|Q_m\| < \infty. \tag{1.8}$$

Обозначим через C_1, C_2 верхние грани, стоящие в левых частях неравенств (1.8). В силу полной непрерывности оператора $F'(x^*)$ имеет место равенство $\lim\limits_{m\to\infty} \big\|(E - Q_m)F'(x^*)\big\| = 0$ (см. [10, с. 202]). Если, кроме того, исходное пространство X рефлексивно, то справедливо соотношение $\lim\limits_{l\to\infty} \big\|F'(x^*)(E - P_l)\big\| = 0$ (см. [10, с. 203]). Во многих случаях с использованием результатов теории приближений (см., например, [11, 12]) последние соотношения удается уточнить, указав такие последовательности $\{\eta_l\}$, $\{\omega_m\}$, что

$$\big\|F'(x^*)(E - P_l)\big\| \leqslant C_3\, \eta_l, \quad \big\|(E - Q_m)F'(x^*)\big\| \leqslant C_4\, \omega_m, \quad \lim_{l\to\infty} \eta_l = \lim_{m\to\infty} \omega_m = 0, \tag{1.9}$$

где постоянные C_3, C_4 не зависят от l, m. Будем предполагать, что последовательности $\{\eta_l\}$, $\{\omega_m\}$, удовлетворяющие (1.9), зафиксированы.

В настоящей работе изучается следующий класс методов конечномерной аппроксимации решения уравнения (1.1) в условиях приближенных данных:

$$x_0 \in X, \quad x_{n+1} = \xi - \Theta\big(Q_m \tilde{F}'(x_n) P_l, \alpha_n\big)\, Q_m \left(\tilde{F}(x_n) - \tilde{F}'(x_n) P_l (x_n - x^*)\right). \tag{1.10}$$

К группе методов (1.10) приходим, регуляризуя согласно (1.5) уравнение

$$Q_m \tilde{F}'(x_n) P_l x = Q_m \tilde{F}'(x_n) P_l x_n - Q_m \tilde{F}(x_n), \quad x \in N_l,$$

являющееся конечномерной аппроксимацией линеаризованного уравнения (1.6) по схеме Петрова–Галеркина ([10, с. 190; 13]).

В основе традиционного способа практической реализации итерационных процессов вида (1.5) в условиях погрешностей лежит идея останова итераций на подходящем шаге $n = N(\delta)$ при выборе последовательности $\{\alpha_n\}$ из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ (см. [3, 14]). Момент останова $N(\delta)$ здесь выбирается так, чтобы получаемое приближение $x_{N(\delta)}$ стремилось к x^*, при $\delta \to 0$, а отображение $R_\delta(\tilde{F}) = x_{N(\delta)}$ определяло регуляризующий алгоритм для уравнения (1.1). При этом проблема нахождения номера $N(\delta)$ становится самостоятельной задачей, требующей порой значительных вычислительных затрат. Другой подход к реализации итерационных процессов решения (1.1), свободный от проблемы выбора момента останова, применительно к методам градиентного типа в гильбертовом пространстве был предложен и развит в [13]. В методах этого типа специальный выбор управляющего параметра, аналогичного параметру ξ в (1.10), обеспечивает стабилизацию при $n \to \infty$ вырабатываемых итерационных точек в окрестности решения, радиус которой определяется уровнем погрешности δ. В настоящей работе исследуются алгоритмы, построенные на базе схемы (1.10) с использованием обоих этих подходов.

2. Уточним класс рассматриваемых далее порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$. Вначале покажем, что формула Рисса–Данфорда (1.7) применима к оператору $Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l$. Предположим, что оператор $F'(x^*)$ удовлетворяет следующему условию секториальности.

Условие 1. Для некоторых $\varphi_0 \in (0, \pi)$, $C_5 > 0$ выполняется включение

$$\sigma\big(F'(x^*)\big) \subset K(\varphi_0), \quad K(\varphi_0) = \big\{\lambda \in \mathbf{C}\colon |\arg\lambda| < \varphi_0\big\} \cup \{0\} \tag{2.1}$$

и оценка

$$\Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\| \leqslant \frac{C_5}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}\backslash K(\varphi_0). \tag{2.2}$$

Зафиксируем величину $R_0 > \big\|F'(x^*)\big\|$. Нетрудно видеть, что $\sigma\big(F'(x^*)\big) \subset K(R_0, \varphi_0)$, где

$$K(R_0, \varphi_0) = K(\varphi_0) \cap S(R_0), \quad S(\rho) = \big\{\lambda \in \mathbf{C}\colon |\lambda| \leqslant \rho\big\}.$$

Кроме того, оценка (2.2) с соответствующей постоянной C_5 выполняется при замене конуса $K(\varphi_0)$ на сектор $K(R_0, \varphi_0)$. Отметим, что условие 1 выполняется с некоторым $\varphi_0 \in (0, \pi)$ в каждом из следующих случаев [6]:

1) $F'(x^*)$ — аккретивный оператор в гильбертовом пространстве X, т. е.

$$\mathrm{Re}\,\big(F'(x^*)u, u\big) \geqslant 0 \quad \forall u \in X,$$

где через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в X.

2) $F'(x^*)$ есть спектральный оператор скалярного типа, для которого $\sigma\big(F'(x^*)\big) \subset K(\psi_0)$ при некотором $\psi_0 \in (0, \pi)$.

3) $F'(x^*)$ удовлетворяет условию $\sigma\big(F'(x^*)\big) \subset K(\psi_0)$, $\psi_0 \in (0, \pi)$, и для всех $t > 0$ справедлива оценка $\Big\|R\big(-t, F'(x^*)\big)\Big\| \leqslant C_6\, t^{-1}$.

В дополнение к условию 1 будем предполагать выполненным следующее

Условие 2. Для любого $\alpha \in (0, \alpha_0]$ порождающая функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ аналитична по λ на открытом множестве $D_\alpha \subset \mathbf{C}$, таком, что

$$K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0) \subset D_\alpha, \tag{2.3}$$

где $K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0) = K(R_0, \varphi_0) \cup S(d_0\alpha)$, $d_0 \in (0, 1)$ — фиксированная постоянная.

Условия (2.1), (2.3) позволяют определить оператор $F'(x_n)$ в (1.5) с помощью формулы Рисса–Данфорда (1.7):

$$\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \Theta(\lambda, \alpha_n) R\left(\lambda, F'(x^*)\right) d\lambda. \tag{2.4}$$

Положительно ориентированный контур $\Gamma_{\alpha_n} \subset D_{\alpha_n}$ предполагается выбранным так, что Γ_{α_n} содержит внутри границу множества $K_{\alpha_n}(R_0, d_0, \varphi_0)$ и не содержит точку $\lambda = -\,d_1\alpha_n$ с некоторым $d_1 > d_0$.

Теперь покажем, что при достаточно больших значениях l, m и достаточно малых $\|x_n - x^*\|, \delta$ функция $\Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)$ оператора $Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l$ наряду с $\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)$ может быть определена по формуле, аналогичной (2.4).

Нам потребуется следующее известное предложение (см., например, [17], [18]).

Лемма 1. *Пусть* $A \in L(X)$, $B \in L(X)$ *и* $\lambda \in \rho(A)$.

1) *Если* $\big\|BR(\lambda, A)\big\| < 1$, *то* $\lambda \in \rho(A + B)$. *Кроме того, справедливо представление*

$$R(\lambda, A + B) = R(\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} \big(BR(\lambda, A)\big)^k. \tag{2.5}$$

2) *Если* $\|R(\lambda,A)B\| < 1$, *то* $\lambda \in \rho(A+B)$ *и*

$$R(\lambda, A+B) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(R(\lambda,A)B\big)^k R(\lambda,A). \tag{2.6}$$

Ряды в (2.5), (2.6) *сходятся абсолютно в норме* $L(X)$.

Лемма 2. *Пусть выполняются неравенства*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{\nu_0 d_0 \alpha_n}{2N_2 C_7} \leqslant R, \quad 2C_8(\delta + \eta_l + \omega_m) \leqslant \nu_0 d_0 \alpha_n, \tag{2.7}$$

где $C_7 = C_1C_2C_5$, $C_8 = C_5 \max\{C_1C_2, C_2, 1\}$; $\nu_0 \in (0,1)$ *— фиксированная постоянная. Тогда построенный указанным выше способом контур* Γ_{α_n} *охватывает спектр* $\sigma\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\big)$, *так что для оператора* $\Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)$ *справедливо представление* (2.4) *с заменой* $F'(x^*)$ *на* $Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l$.

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \operatorname{int} K_{\alpha_n}(R_0, d_0, \varphi_0)$ по построению множества $K_{\alpha_n}(R_0,d_0,\varphi_0)$ имеем $|\lambda| \geqslant d_0\alpha_n$. Заметим, что в силу (2.7) $x_n \in \Omega_R$. Используя (1.2), (1.3), (1.8), (1.9) и полагая в (2.5) $A = F'(x^*)$, $B = Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l - F'(x^*)$, получаем

$$\begin{aligned} \big\|BR(\lambda,A)\big\| &\leqslant \frac{C_5}{|\lambda|}\Big(C_1C_2\big\|\tilde{F}'(x_n) - \tilde{F}'(x^*)\big\| + C_1C_2\big\|\tilde{F}'(x^*) - F'(x^*)\big\| + \\ &+ C_2\big\|(E-Q_m)F'(x^*)\big\| + \big\|F'(x^*)(E-P_l)\big\|\Big) \leqslant \\ &\leqslant (d_0\alpha)^{-1}\big(C_7\|x_n - x^*\| + C_8(\delta+\eta_l+\omega_m)\big) \leqslant \nu_0 < 1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из (2.8) и леммы 1 следует, что $\lambda \in \rho\left(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\right)$. Таким образом, контур Γ_{α_n} содержит внутри все точки спектра $\sigma\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\big)$. Лемма доказана.

Сходимость приближений (1.10) будем исследовать в предположении приближенной истокопредставимости начальной невязки

$$x^* - \xi = F'(x^*)^p v + w, \quad v, w \in X, \quad p > 1, \quad \|w\|_X \leqslant \Delta. \tag{2.9}$$

Здесь для оператора $A \in L(X)$, удовлетворяющего условию 1 (при замене $F'(x^*)$ на A), и натурального показателя p степень A^p определяется стандартным образом, т. е. $A^p = A \times \ldots \times A$ (p раз). В случае $p \in (0,1)$, следуя [19, с. 156; 20], полагаем

$$A^p = \frac{\sin \pi p}{\pi} \int\limits_0^{\infty} t^{p-1}(tE + A)^{-1} A\, dt. \tag{2.10}$$

В силу оценки (2.2) интеграл в правой части (2.10) сходится абсолютно и представляет собой оператор $A^p \in L(X)$. Наконец, для произвольного $p \in (n, n+1)$ и натурального n принимаем

$$A^p = A^{p-n}A^n \equiv A^nA^{p-n}. \tag{2.11}$$

Ниже нам понадобится

Лемма 3 [19, с. 155]). *Пусть оператор* A *удовлетворяет условию* 1. *Тогда для любого* $\mu \in (0,1)$ *имеет место оценка*

$$\|A_\varepsilon^\mu - A^\mu\|_{L(X)} \leqslant C_9\varepsilon^\mu \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где $A_\varepsilon = A + \varepsilon E$ *и постоянная* $C_9 = C_9(\mu)$ *не зависит от* ε.

3. Перейдем к исследованию сходимости приближений (1.10). Предполагая выполненными условия (2.7), из (1.10) и (2.9) получаем

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= -\Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)Q_mG_n - \Big(E - \Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l,\alpha_n\big)Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\Big)(x^* - \xi) = \\ &= -\Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)Q_mG_n - \Big(E - \Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l,\alpha_n\big)Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\Big)w - \\ &- \Big(E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big)F'(x^*)^p v - \\ &- \Big(\Theta\big(F'(x^*)\alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l,\alpha_n\big)Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\Big)F'(x^*)^p v, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $G_n = \tilde{F}(x_n) - \tilde{F}'(x_n)P_l(x_n - x^*)$. В силу (1.2), (1.3), (1.8) и (1.9) имеет место оценка

$$\begin{aligned}\|G_n\| \leqslant\ & \big\|\tilde{F}(x_n) - \tilde{F}(x^*) - \tilde{F}'(x_n)(x_n - x^*)\big\| + \big\|\tilde{F}(x^*)\big\| + \\ & + \Big(\big\|\tilde{F}'(x_n) - \tilde{F}'(x^*)\big\| + \big\|\tilde{F}'(x^*) - F'(x^*)\big\|\Big)\big\|(I - P_l)(x_n - x^*)\big\| + \\ & + \big\|F'(x^*)(I - P_l)(x_n - x^*)\big\| \leqslant C_{10}\big(N_2\|x_n - x^*\|^2 + (\delta + \eta_l)\,\|x_n - x^*\| + \delta\big).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Представление (2.4), записанное для оператора $Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l$, дает

$$\Big\|\Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)\Big\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|\Theta(\lambda, \alpha_n)\big|\,\Big\|R\big(\lambda, Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\big)\Big\|\,|d\lambda|. \tag{3.3}$$

Норму, стоящую под знаком интеграла в (3.3), оценим, используя соотношения (1.2) и (1.3), а также (1.9) и (2.2), (2.5) и (2.8), следующим образом:

$$\begin{aligned}\Big\|R\big(\lambda, Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\big)\Big\| \leqslant \Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\| \sum_{k=o}^{\infty} \Big\|\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l - F'(x^*)\big)R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\|^k \leqslant \\ \leqslant \frac{C_5}{|\lambda|(1 - \nu_0)} \quad \forall \lambda \in \Gamma_{\alpha_n}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Из (3.3), (3.4) следует

$$\Big\|\Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)\Big\| \leqslant \frac{C_5}{2\pi(1 - \nu_0)}\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \frac{\big|\Theta(\lambda, \alpha_n)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|. \tag{3.5}$$

В связи с полученной оценкой введем следующее дополнительное условие на порождающую функцию $\Theta(\lambda, \alpha)$.

Условие 3. Для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$ имеет место оценка

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha} \frac{\big|\Theta(\lambda, \alpha)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \leqslant \frac{C_{11}}{\alpha}.$$

Учитывая условие 3, из (3.5) получаем

$$\Big\|\Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)\Big\| \leqslant \frac{C_{12}}{\alpha_n}, \tag{3.6}$$

где константа C_{12} не зависит от l, m, n. Из (2.9), (3.1), (3.2) и (3.6) следует оценка

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant\ & C_{13}\alpha_n^{-1}\big(N_2\|x_n - x^*\|^2 + (\delta + \eta_l)\|x_n - x^*\| + \delta\big) + \\ & + \Big\|E - \Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)\,Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\Big\|\Delta + \\ & + \Big\|\Big(E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*)\Big)F'(x^*)^p v\Big\| + \\ & + \Big\|\Big(\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)\,Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\Big)F'(x^*)^p v\Big\|.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Оценим по отдельности каждое слагаемое в правой части неравенства (3.7). Ниже будем предполагать выполненным

Условие 4. Для всех $s \in [0, p]$ имеет место оценка

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda\big|\,|\lambda|^{s-1}|d\lambda| \leqslant C_{14}\alpha^s \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{3.8}$$

где $C_{14} = C_{14}(p)$.

Из (3.8) при $s = 0$, используя (3.4), находим

$$\Big\|E - \Theta\big(Q_m \tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)\, Q_m \tilde{F}'(x_n)P_l\Big\| \leqslant C_{15} \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \frac{\big|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda\big|}{|\lambda|}\, |d\lambda| \leqslant C_{16}. \tag{3.9}$$

Константа C_{16} в (3.9) не зависит от l, m, n. Пусть $q = [p]$, $\mu = p - q$ — целая и дробная части p соответственно. На основании (1.7), (2.2), (3.8) и леммы 3 при условии, что контур Γ_{α_n} не проходит через точку $\lambda = -d_1\alpha_n$ и не содержит её внутри, получаем

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*)\Big)F'(x^*)^p v\Big\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \Big\|\Big(E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*)\Big)F'(x^*)^q\big(F'(x^*) + d_1\alpha_n E\big)^{\mu} v\Big\| + \\
&\qquad + \Big\|\Big(E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*)\Big)F'(x^*)^q\Big(\big(F'(x^*) + d_1\alpha_n E\big)^{\mu} - F'(x^*)^{\mu}\Big)v\Big\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{\|v\|}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda\big|\, |\lambda|^q\, |\lambda + d_1\alpha_n|^{\mu} \Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\|\, |d\lambda| + \\
&\qquad + \frac{C_{16}}{2\pi}\, {\alpha_n}^{\mu}\|v\| \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda\big|\, |\lambda|^q\, \Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\|\, |d\lambda| \leqslant \\
&\qquad \leqslant C_{17}\|v\|\Big(\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda\big|\, \big(|\lambda|^{p-1} + {\alpha_n}^{\mu}|\lambda|^{q-1}\big)\, |d\lambda| + \\
&\qquad + {\alpha_n}^{\mu} \int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda\big|\, |\lambda|^{q-1}|d\lambda|\Big) \leqslant C_{18}\, \|v\|\, {\alpha_n}^{p}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Далее находим

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\Big)F'(x^*)^p v\Big\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \Big\|\Big(\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\Big)F'(x^*)^q\big(F'(x^*) + d_1\alpha_n E\big)^{\mu} v\Big\| + \\
&\quad + \Big\|\Big(\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\Big) \times \\
&\quad \times F'(x^*)^q\Big(\big(F'(x^*) + d_1\alpha_n E\big)^{\mu} - F'(x^*)^{\mu}\Big)v\Big\|.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (3.11). На основании (1.5) и леммы 2 имеем

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l, \alpha_n\big)Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\Big)F'(x^*)^q\big(F'(x^*) + d_1\alpha_n E\big)^{\mu} v\Big\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{\|v\|}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda\big|\, \Big\|\Big(R\big(\lambda, F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, Q_m\tilde{F}'(x_n)P_l\big)\Big)F'(x^*)^q\big(F'(x^*) + d_1\alpha_n E\big)^{\mu}\Big\|\, |d\lambda|.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

С использованием (1.2), (1.8), (1.9), (2.2), (2.7), (2.8) получаем

$$\begin{aligned}&\left\|\Big(R\big(\lambda,F'(x^*)\big)-R\big(\lambda,Q_m\tilde F'(x_n)P_l\big)F'(x^*)^q\big(F'(x^*)+d_1\alpha_nE\big)^{\mu}\right\|\leqslant\\ &\leqslant\frac{\left\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\big(Q_m\tilde F'(x_n)P_l-F'(x^*)\big)\right\|}{1-\left\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\big(Q_m\tilde F'(x_n)P_l-F'(x^*)\big)\right\|}\left\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)^q\right\|\leqslant\\ &\leqslant\frac{C_{19}{\alpha_n}^p}{(1-\nu_0)|\lambda|}\left\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)^q\right\|.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Поскольку $q\geqslant 1$ (см. (2.9)), неравенство

$$R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)=-E+\lambda R\big(\lambda,F'(x^*)\big)$$

и оценка (2.2) дают

$$\left\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)^q\right\|\leqslant(1+C_5)\big\|F'(x^*)\big\|^{q-1}.\tag{3.14}$$

Из леммы 3 следует, что

$$\left\|\big(F'(x^*)+d_1\alpha_nE\big)^{\mu}\right\|\leqslant\big\|F'(x^*)^{\mu}\big\|+C_{20}(d_1\alpha_0)^{\mu}.\tag{3.15}$$

Из (3.12), используя (3.13) – (3.15) и условие 4 (при $s=0$), получаем

$$\begin{aligned}&\left\|\Big(\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(Q_m\tilde F'(x_n)P_l,\alpha_n\big)Q_m\tilde F'(x_n)P_l\Big)F'(x^*)^q\big(F'(x^*)+d_1\alpha_nE\big)^{\mu}v\right\|\leqslant\\ &\leqslant\frac{C_{21}(1+C_5)\big\|F'(x^*)\big\|^{q-1}\|v\|}{2\pi(1-\nu_0)}\Big(\big\|F'(x^*)\big\|^{\mu}+C_{22}(d_1\alpha_0)^{\mu}\Big)\int\limits_{\Gamma_{\alpha_n}}\frac{\big|1-\Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\leqslant\\ &\leqslant C_{21}\|v\|\alpha_n^p.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Аналогично оценивается второе слагаемое в правой части (3.11):

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(Q_m\tilde F'(x_n)P_l,\alpha_n\big)Q_m\tilde F'(x_n)P_l\Big)\times\\ &\times F'(x^*)^q\Big(\big(F'(x^*)+d_1\alpha_nE\big)^{\mu}-F'(x^*)^{\mu}\Big)v\Big\|_{L(X)}\leqslant C_{22}\|v\|{\alpha_n}^p.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Объединяя (3.7), (3.9), (3.10), (3.16), (3.17), окончательно приходим к следующей промежуточной оценке

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\frac{C_{14}}{\alpha_n}\big(N_2\|x_n-x^*\|^2+(\delta+\eta_l)\|x_n-x^*\|+\delta\big)+C_{16}\Delta+C_{23}\|v\|{\alpha_n}^p.\tag{3.18}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1 – 4, *неравенства* (1.2), (1.3), (1.8), (1.9) *и для некоторого решения* $x^*\in X^*(F)$ *начальная невязка* $x^*-\xi$ *обладает истокообразным представлением* (2.9). *Предположим, что параметр регуляризации* α_n *и номера* l, m, n *согласованы с погрешностями* δ, Δ *так, что выполняются соотношения* (2.7). *Тогда для указанного* x^* *имеет место оценка* (3.18).

Отметим, что в процессе доказательства теоремы конечномерность подпространств N_l и M_m фактически не использовалась, поэтому ее результат остается в силе и в случаях $P_l=E$ либо $Q_m=E$, которые формально соответствуют выбору $l=l(\delta,\Delta)=\infty$ либо $m=m(\delta,\Delta)=\infty$. В этих случаях оценки (1.9) автоматически выполняются с $\eta_l=0$ и $\omega_m=0$ соответственно.

Перейдем к исследованию вариантов практической реализации схемы (1.10), приводящих к качественно различным итерационным процессам аппроксимации решения уравнения (1.1) в условиях погрешностей. Анализ сходимости этих процессов предполагает получение на основе (3.18) степенных либо показательных оценок скорости убывания величины $\|x_n-x^*\|$ при $n\to\infty$.

4. В соответствии с общей концепцией методов итеративной регуляризации [2], в качестве аппроксимации решения x^* может быть выбрана итерационная точка

$$x_{\delta,\Delta} = x_N^{(L,M)}, \tag{4.1}$$

полученная на N-м шаге процесса (1.10) с некоторыми фиксированными значениями $l = L, m = M$. При этом номер итерации $N = N(\delta,\Delta)$, на котором происходит останов, а также номера используемых подпространств $L = L(\delta,\Delta)$, $M = M(\delta,\Delta)$ следует подходящим образом согласовать с погрешностями δ и Δ.

Будем считать, что последовательность параметров регуляризации $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям

$$0 < \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n, \quad \sup_{n=0,1,\dots} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = r < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \tag{4.2}$$

$$\alpha_0 \leqslant 2RN_2C_7(\nu_0 d_0)^{-1}. \tag{4.3}$$

Предположим, что для некоторого β_1, такого, что

$$0 < \beta_1 \leqslant \frac{\nu_0 d_0}{2N_2C_7\alpha_0^{p-1}} \tag{4.4}$$

и $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{N} = \{1,2,\dots\}$, справедливы неравенства

$$\|x_0 - x^*\| \leqslant \beta_1\alpha_0^p, \tag{4.5}$$

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \beta_1\alpha_n^p. \tag{4.6}$$

Покажем, что тогда при выполнении ряда дополнительных условий

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \beta_1\alpha_{n+1}^p. \tag{4.7}$$

Введем обозначение

$$\gamma_n = \|x_n - x^*\|\alpha_n^{-p}. \tag{4.8}$$

Зафиксируем произвольные постоянные $k_1,\dots,k_4 > 0$, $k_4 < (4C_{14})^{-1}$, $\mu \in (0,1)$ и положим

$$N(\delta,\Delta) = \max\{n \in \mathbf{N} : \delta^{1-\mu}r^p \leqslant k_1\alpha_{n-1}, \delta^{1-\mu} \leqslant k_2\alpha_{n-1}\alpha_n^p,\ \Delta^{1-\mu} \leqslant k_3\alpha_n^p,\ 6\,C_8\delta \leqslant \nu_0\alpha_n\}, \tag{4.9}$$

$$L(\delta,\Delta) = \min\{l \in \mathbf{N} : \eta_l r^p \leqslant k_4\alpha_{N(\delta,\Delta)-1},\ 6\,C_8\eta_l \leqslant \nu_0\alpha_{N(\delta,\Delta)}\}, \tag{4.10}$$

$$M(\delta,\Delta) = \min\{m \in \mathbf{N} : 6\,C_8\omega_m \leqslant \nu_0\alpha_{N(\delta,\Delta)}\}. \tag{4.11}$$

Заметим, что в силу (4.2) выполняется

$$\lim_{\delta,\Delta\to 0} N(\delta,\Delta) = \lim_{\delta,\Delta\to 0} L(\delta,\Delta) = \lim_{\delta,\Delta\to 0} M(\delta,\Delta) = \infty.$$

Пусть номер $n \leqslant N(\delta,\Delta) - 1$, тогда при указанном в (4.10), (4.11) выборе $l = L(\delta,\Delta)$, $m = M(\delta,\Delta)$ и выборе α_0, β_1 из условий (4.3), (4.4) выполняются все три неравенства в (2.7). Из (3.18), используя (4.2), а также (4.9)–(4.11), для $l = L(\delta,\Delta)$, $m = M(\delta,\Delta)$ и всех $n = 0,\dots,N(\delta,\Delta)-1$ получаем оценку

$$\gamma_{n+1} \leqslant C_{14}N_2r^p\alpha_0^{p-1}\gamma_n^2 + C_{14}(k_1\delta^\mu + k_4)\gamma_n + C_{23}r^p\|v\| + C_{14}\delta^\mu k_2 + C_{16}\Delta^\mu k_3. \tag{4.12}$$

Согласно (4.5), (4.6), имеем $\gamma_0 \leqslant \beta_1$, $\gamma_n \leqslant \beta_1$; для доказательства оценки (4.7) достаточно установить, что $\gamma_{n+1} \leqslant \beta_1$. Из (4.12) следует

$$\gamma_{n+1} \leqslant C_{14}N_2r^p\alpha_0^{p-1}\beta_1^2 + C_{14}(k_1\delta^\mu + k_4)\beta_1 + \bigl(C_{23}r^p\|v\| + C_{14}\delta^\mu k_2 + C_{16}\Delta^\mu k_3\bigr).$$

Потребуем, чтобы выражение в круглых скобках в правой части последнего неравенства не превосходило β_1. Последнее выполняется, например, если

$$C_{14}N_2r^p\alpha_0^{p-1}\beta_1 + C_{14}(k_1\delta^\mu + k_4) \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4.13}$$

$$C_{14}\delta^\mu k_2 + C_{16}\Delta^\mu k_3 + C_{23} r^p \|v\| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{4.14}$$

В дальнейшем примем

$$\beta_1 = \frac{1}{2N_2\alpha_0^{p-1}} \min\left\{\frac{1}{2\,C_{14}r^{2p}}, \frac{\nu_0 d_0}{C_7}\right\} \tag{4.15}$$

и предположим, что элемент v в истокообразном представлении (2.9) удовлетворяет условию

$$\|v\| \leqslant \frac{1}{16\,C_{14}C_{23}N_2 r^{2p}\alpha_0^{p-1}}. \tag{4.16}$$

Соотношения (4.15), (4.16) гарантируют выполнение неравенств (4.4), (4.13), (4.14), если на погрешности δ и Δ наложить дополнительные ограничения

$$\delta^\mu \leqslant \min\left\{\frac{1}{4\,C_{14}k_1}, \frac{1}{32\,C_{14}^2 N_2 r^p \alpha_0^{p-1} k_2}\right\}, \quad \Delta^\mu \leqslant \frac{1}{32\,C_{14}C_{16}N_2 r^p \alpha_0^{p-1} k_3}. \tag{4.17}$$

Таким образом, оценка (4.6) справедлива для всех номеров $n = 0, \ldots, N(\delta, \Delta)$. Тем самым доказана

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1–4, *неравенства* (1.2), (1.3), (1.8), (2.9) *и соотношения* (4.2), (4.3), (4.9)–(4.11), (4.16), (4.17). *Предположим, что начальное приближение x_0 достаточно близко к x^*, так что выполняется условие* (4.5), *где величина β_1 взята из* (4.15). *Тогда справедлива оценка*

$$\|x_{\delta,\Delta} - x^*\| \leqslant \beta_1 \alpha^p_{N(\delta,\Delta)}, \tag{4.18}$$

где приближение $x_{\delta,\Delta}$ определено в (4.1).

В условиях теоремы 2, используя выражения (4.9)–(4.11), из (4.18) получаем оценку

$$\|x_{\delta,\Delta} - x^*\| \leqslant C_{25}\big(\delta^{\frac{(1-\mu)p}{p+1}} + \Delta^{1-\mu}\big). \tag{4.19}$$

Согласно (4.19), имеет место предельное соотношение

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\, \|x_{\delta,\Delta} - x^*\| \leqslant C_{25}\Delta^{1-\mu}. \tag{4.20}$$

Из (4.20) следует, что если истокообразное представление (2.9) выполняется с $\Delta = 0$, то отображение

$$R_\delta(\tilde F) = x^{(L(\delta,0),M(\delta,0))}_{N(\delta,0)}$$

определяет регуляризующий алгоритм для уравнения (1) (см. (1.4)). В общем случае, когда $\Delta \geqslant 0$, соотношение (4.20) означает устойчивость отображения R_δ к малым погрешностям в истокообразном представлении $x^* - \xi \in R\big(F'(x^*)^p\big)$.

5. Отметим, что практическая реализация правила останова, которое определяется соотношениями (4.9)–(4.11), требует задания априори неизвестных констант N_1, N_2; от их выбора существенно зависит качество получаемого приближения $x_{\delta,\Delta}$. Рассмотрим другой способ реализации схемы (1.10), свободный от проблемы выбора момента останова. С этой целью в (1.10) положим $\alpha_n = \alpha_0, n \in \mathbf{N}$, где величина α_0 удовлетворяет условию (4.3). Будем предполагать также, что

$$2\,C_8(\delta + \eta_l + \omega_m) \leqslant \nu_0 d_0 \alpha_0. \tag{5.1}$$

Выберем произвольно $0 \leqslant q < \min\big\{1, (2\,C_7)^{-1}\nu_0 d_0 C_{14}\big\}$ и предположим, что для некоторых $\beta_2, \varepsilon > 0$, таких, что

$$\beta_2 < \frac{\nu_0 d_0}{2N_2C_7}, \quad \varepsilon \leqslant \Big(\frac{\nu_0 d_0}{2N_2C_7} - \beta_2\Big)\alpha_0, \tag{5.2}$$

выполняются соотношения

$$\|x_0 - x^*\| \leqslant \beta_2\alpha_0 + \varepsilon, \tag{5.3}$$

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \beta_2\alpha_0 q^n + \varepsilon \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{5.4}$$

Покажем, что при сделанных предположениях справедливо неравенство

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \beta_2\alpha_0 q^{n+1} + \varepsilon. \tag{5.5}$$

Заметим, что при выполнении указанных выше условий на α_0, β_2, ε имеют место все три неравенства в (2.7). Из (3.18) с учетом (5.4) получаем

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant C_{14}N_2\alpha_0\beta_2^2q^{2n}+C_{14}(2N_2\varepsilon+\delta+\eta_l)\beta_2q^n+C_{14}N_2\alpha_0^{-1}(\varepsilon^2+(\delta+\eta_l)\varepsilon+\delta)+C_{23}\alpha_0^p\|v\|+C_{16}\Delta. \quad (5.6)$$

Из (5.6) следует, что соотношение (5.5) справедливо при выполнении неравенств

$$C_{14}N_2\alpha_0^{-1}\big(\varepsilon^2+(\delta+\eta_l)\varepsilon+\delta\big)+C_{23}\alpha_0^p\|v\|+C_{16}\Delta \leqslant \varepsilon, \quad (5.7)$$

$$C_{14}N_2\alpha_0\beta_2q^n+C_{14}(2N_2\varepsilon+\delta+\eta_l) \leqslant q. \quad (5.8)$$

Выберем

$$\varepsilon = 2\big(C_{23}\alpha_0^p\|v\|+C_{14}\delta\alpha_0^{-1}+C_{16}\Delta\big) \quad (5.9)$$

и положим

$$\beta_2 = \frac{q}{2C_{14}N_2}. \quad (5.10)$$

Равенства (5.9), (5.10) гарантируют выполнение (5.2), а условия (5.7), (5.8) выполняются, если

$$4C_{14}(\delta+\eta_l) \leqslant q\alpha_0, \quad (5.11)$$

$$\varepsilon \leqslant \frac{q\alpha_0}{8C_{14}N_2}. \quad (5.12)$$

В свою очередь, неравенства (5.11), (5.12) справедливы при выполнении условий

$$32C_{14}N_2(C_{14}\delta+C_{16}\alpha_0\Delta) \leqslant \alpha_0^2q, \quad (5.13)$$

$$\|v\| \leqslant \frac{q}{32\,C_{14}C_{23}N_2\alpha_0^{p-1}}. \quad (5.14)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* 1 – 4 *и соотношения* (1.2), (1.3), (1.8), (1.9), (2.9), (4.3), *а также* (4.3), (5.1), (5.3), (5.11), (5.13), (5.14). *Тогда справедлива оценка* (5.4), *в которой константы* ε *и* β_2 *определяются равенствами* (5.9) *и* (5.10). *Кроме того, имеет место предельное соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-x^*\| \leqslant C_{26}(\alpha_0^p+\delta\alpha_0^{-1}+\Delta) = O(\alpha_0^{-1}), \quad (5.15)$$

где постоянная C_{26} *не зависит от* α_0^p, δ, Δ.

Переходя к обсуждению полученного результата, обратим внимание на различный характер оценок (4.6) и (5.4), являющийся следствием различных способов организации основного итерационного процесса (1.10). Предположим, что погрешности δ и Δ имеют порядок $O(\alpha_0^{p+1})$ и $O(\alpha_0^p)$ соответственно, где $p>1$. Тогда, согласно (5.9), найдется постоянная C_{27}, такая, что

$$C_{27}\alpha_0 \leqslant \beta_2\alpha_0+\varepsilon.$$

Поэтому неравенство в (5.3) автоматически выполняется, если начальное приближение x_0 выбрано так, что

$$\|x_0-x^*\| \leqslant C_{27}\alpha_0. \quad (5.16)$$

В силу (5.15), для некоторой постоянной C_{28} выполняется

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-x^*\| \leqslant C_{28}\alpha_0^p. \quad (5.17)$$

Подчеркнем, что в случае $p>1$ правая часть оценки (5.16) имеет больший порядок по α_0 при $\alpha_0\to 0$ по сравнению с выражением в правой части (5.17). Таким образом, теорема 3 гарантирует стабилизацию при $n\to\infty$ приближений x_n в окрестности решения x^* уравнения (1.1) радиуса $O(\alpha_0^p)$ при выборе начального приближения в окрестности большего радиуса $O(\alpha_0), \alpha_0\to 0$.

6. Обсудим детали обоснования и реализации метода (1.10) в случае порождающей функции

$$\Theta(\lambda,\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(1-\Big(\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\Big)^N\right), \quad N=1,2,\dots,$$

известной в теории линейных некорректных задач в качестве порождающей функции итерированного метода М. М. Лаврентьева [21, с. 19]. Непосредственно проверяется, что эта функция удовлетворяет условиям 2 – 4, если в качестве Γ_α выбрать контур $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^{(1)} \cup \Gamma_\alpha^{(2)}$, где

$$\Gamma_\alpha^{(1)} = \left\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda + \alpha| = \frac{1}{2}\right\}, \quad \Gamma_\alpha^{(2)} = \big\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = R_0\big\}; \quad \alpha \in (0, \alpha_0], \quad R_0 > N_1^2.$$

При этом условие 4 выполняется для всех $p \in (0, N]$. Аналогично [21, с. 21] устанавливается, что процесс (1.10) в данном случае может быть реализован следующим образом: $x_\alpha = x^{(N)}$, где

$$x^{(0)} = \xi, \quad \big(\alpha E + Q_m \tilde{F}'(x_n) P_l\big)(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = Q_m\big(\tilde{F}'(x_n) P_l (x_n - x^*) - \tilde{F}(x_n)\big), \quad k = 1, \dots, N. \tag{6.1}$$

Из (6.1) следует, что $x^{(k)} - \xi \in M_m$, $k = 0, 1, \dots, N$. Для определенности примем $\dim M_m = m$ и пусть $\{e_i\}_{i=1}^m$ — базис подпространства M_m, так что

$$x^{(k)} = \xi + \sum_{i=1}^m c_i^{(k)} e_i, \quad k = 1, \dots, N. \tag{6.2}$$

Таким образом, нахождение $x^{(k)}$ сводится к вычислению коэффициентов $c_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, m$, в (6.2). Обозначим через I единичную $m \times m$ -матрицу и положим $c^{(k)} = \big(c_i^{(k)}\big)_{i=1}^m$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$, $b = (b_i)_{i=1}^m$, где

$$Q_m \tilde{F}'(x_n) P_l e_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} e_j, \quad Q_m\big(\tilde{F}'(x_n) P_l (\xi - x^*) - \tilde{F}(x_n)\big) = \sum_{i=1}^m b_i e_i. \tag{6.3}$$

Используя введенные обозначения, из (6.1), (6.2) приходим к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, m$: $(\alpha I + A) c^{(k)} = A c^{(k-1)} + b$, $k = 1, \dots, N$, причем $c^{(0)} = 0$.

В заключение конкретизируем вид последовательностей $\{\eta_l\}$, $\{\omega_m\}$ из условия (1.9) применительно к интегральному уравнению

$$\big[F(x)\big](t) \equiv \int_0^1 K\big(t, s, x(s)\big)\, ds - f(t) = 0, \quad t \in [0, 1] \tag{6.4}$$

с оператором $F : L_r(0,1) \to L_r(0,1)$, $r \in (2, \infty)$. Предполагается, что ядро $K(t, s, \sigma)$, $t, s \in [0, 1]$, $\sigma \in \mathbf{R}$, удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\big(1 + |\sigma|^r\big)^{-1} \big|K(t, s, \sigma)\big| + \big(1 + |\sigma|^{r-1}\big)^{-1} \Big(\big|K'_\sigma(t, s, \sigma)\big| + \big|K''_{t\sigma}(t, s, \sigma)\big| + \big|K''_{s\sigma}(t, s, \sigma)\big|\Big) + \\ + \big(1 + |\sigma|^{r-2}\big)^{-1} \big|K''_{\sigma\sigma}(t, s, \sigma)\big| \leqslant C_{29}.\end{gathered} \tag{6.5}$$

Пусть $c_k(x)$ — коэффициенты разложения функции $x = x(t) \in L_r(0,1)$ в ряд Фурье по системе $\big\{e^{2\pi i k t}\big\}_{|k|=0}^\infty$:

$$c_k(x) = \int_0^1 x(t) e^{-2\pi i k t}\, dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Выберем в качестве P_l и Q_m проекторы Фурье:

$$(Q_m x)(t) = (P_m x)(t) = \sum_{|k| \leqslant m} c_k(x) e^{2\pi i k t}, \quad t \in [0, 1], \quad m = 0, 1, \dots \, .$$

Используя следствие 2 из [11, с. 137] и неравенство (6.5), получаем

$$\begin{aligned}&\big\|(E - Q_m) F'(x^*)\big\|_{L(L_r(0,1))} \leqslant \\ &\qquad \leqslant C_{30} \sup_{\|u\|_{L_r(0,1)} \leqslant 1} \left\{ \sup_{0 < h \leqslant m^{-1}} \int_0^1 \left| \int_0^1 \Big(K'_\sigma\big(t + h, s, x^*(s)\big) - K'_\sigma\big(t, s, x^*(s)\big)\Big) u(s)\, ds \right|^r dt \right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant \\ &\qquad \leqslant C_{31} (m + 1)^{-1}.\end{aligned}$$

Предположим далее, что $x^* \in C^1[0,1]$. В силу леммы 2 из [22, с. 164] с учетом соотношения (6.5) имеем

$$\big\|F'(x^*)(E-P_l)\big\|_{L(L_r(0,1))} =$$

$$= \sup_{\|u\|_{L_r(0,1)}\leqslant 1}\bigg\|\int\limits_0^1 K'_\sigma\big(t,s,x^*(s)\big)u(s)\,ds - \sum_{|k|\leqslant l} c_k(u)c_{-k}\Big(K'_\sigma\big(t,\cdot,x^*(\cdot)\big)\Big)\bigg\|_{L_r(0,1)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{32}\bigg\{\int_0^1\bigg(\sup_{|h|\leqslant(l+1)^{-1}}\Big\|K'_\sigma\big(t,s+h,x^*(s+h)\big)-K'_\sigma\big(t,s,x^*(s)\big)\Big\|_{L_q(0,1)}\bigg)^r dt\bigg\}^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{33}(l+1)^{-1},$$

где $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{q}=1$. Таким образом, в (1.9) в данном случае можно положить $\eta_l=(l+1)^{-1}, \quad \omega_m=(m+1)^{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
3. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
4. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
5. *Бакушинский А.Б.* Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для решения линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // ЖВМ и МФ. 1967. **7**, № 3. 672–677.
6. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Условия истокопредставимости и скорость сходимости методов решения некорректных операторных уравнений. Часть I // Вычислительные методы и программирование. 2000. **1**. 64–84.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
8. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
9. *Рисс Ф., Секенфальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
10. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
11. *Кашин В.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
12. *Даугавет Н.К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.
13. *Габдулхаев Б.Г.* Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Казань: Изд-во КГУ, 1995.
14. *Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* О невырожденных оценках скорости сходимости итерационных методов решения некорректных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 6. 832–837.
15. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы градиентного типа для нерегулярных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 1998. **38**, № 6. 1962–1966.
16. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы градиентного типа с проектированием на фиксированное подпространство для решения нерегулярных операторных уравнений // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 10. 1447–1450.
17. *Кокурин М.Ю.* Условие истокопредставимости и оценка скорости сходимости методов регуляризации линейных уравнений в банаховом пространстве. Часть I // Известия вузов. Математика. 2001. № 8. 51–59.
18. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.
19. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
20. *Balakrshnan A.V.* Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them // Pacif. J. Math. 1960. **10**, N 2. 419–437.
21. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итеративные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
22. *Жук В.В., Кузютин В.Ф.* Аппроксимации функций и численное интегрирование. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995.

Поступила в редакцию
15.12.2001