УДК 517.518.87

ОБ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА

К. А. Кириллов[1]

На пространствах S_p и H_α найдены оценки нормы функционала погрешности квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара.

Ключевые слова: d-свойство Хаара, функционал погрешности квадратурной формулы, пространства функций S_p и H_α.

1. Введение. Задача построения и исследования кубатурных (квадратурных) формул, точных на некотором конечномерном классе функций, характеризует одно из важных направлений теории приближенного интегрирования. Ранее эта задача в основном решалась для вычисления интегралов, точных на алгебраических и тригонометрических многочленах. Кубатурные формулы, точные для конечных сумм Хаара, можно найти в монографии И. М. Соболя [1]. Описание всех минимальных весовых квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара (формул, точных для полиномов Хаара степеней, не превосходящих заданного числа d), было проведено в [2, 3]. В [4] были получены оценки нормы функционала погрешности некоторых из весовых квадратурных формул, построенных в [2].

Представленная работа посвящена исследованию квадратурных формул с весовой функцией $g(x) \equiv 1$, точных для полиномов Хаара. На пространствах S_p найдена нижняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул, точных на константах, и верхняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара; на пространствах H_α получена верхняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара.

Установлено, что для рассмотренных в данной работе квадратурных формул величина $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ при $N = 2^{d-1}$ имеет наилучший порядок сходимости к нулю при $N \to \infty$, равный $N^{-1/p}$; величина $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*}$ при $N = 2^{d-1}$, так же, как и для формул с узлами на Π_τ-сетках, исследованных И. М. Соболем [1], ограничена по сравнению с $N^{-\alpha}$, $N \to \infty$. В то же время исследованные автором настоящей статьи квадратурные формулы, будучи минимальными формулами приближенного интегрирования при указанных ограничениях на число узлов, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$.

2. Основные определения. В настоящей работе используется оригинальное определение функций $\chi_{m,j}(x)$, введенное А. Хааром [5], отличное от определения этих функций из [1] в точках разрыва.

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $\dfrac{j-1}{2^{m-1}}$ и $\dfrac{j}{2^{m-1}}$ при значениях $m = 1, 2, \ldots$ и $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Если левый конец двоичного промежутка совпадает с нулем, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1 — замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать через $l_{m,j}^-$ и $l_{m,j}^+$ соответственно.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} \;\;2^{(m-1)/2} & \text{при } x \in l_{m,j}^-, \\ -2^{(m-1)/2} & \text{при } x \in l_{m,j}^+, \\ \;\;0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m,j}}\,, \\ \;\;\dfrac{1}{2}\bigl[\chi_{m,j}(x-0) + \chi_{m,j}(x+0)\bigr], & \text{если } x \text{ — внутренняя точка разрыва,} \end{cases}$$

$\overline{l_{m,j}} = \left[\dfrac{j-1}{2^{m-1}}\,, \dfrac{j}{2^{m-1}}\right]$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_{0,0}(x) \equiv 1$, которая остается вне групп.

[1] Сибирский Федеральный университет, кафедра "Прикладная математика и компьютерная безопасность", ул. Киренского, 26, 660074, Красноярск; доцент, e-mail: kkirillov@rambler.ru

Полиномами Хаара степени d назовем линейные комбинации с вещественными коэффициентами функций $\chi_{0,0}(x)$, $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1, 2, \dots, d$, $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$, причем хотя бы один из коэффициентов при функциях Хаара $\chi_{d,j}(x)$ группы номер d отличен от нуля.

Будем рассматривать квадратурные формулы

$$I[f] = \int\limits_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f\bigl(x^{(i)}\bigr) = Q[f], \tag{1}$$

где $f(x)$ — функция, определенная и суммируемая на $[0,1]$, $x^{(i)} \in [0,1]$ — узлы формулы, C_i — коэффициенты формулы при узлах (вещественные числа), $i = 1, 2, \dots, N$.

Функционал погрешности квадратурной формулы (1) обозначим через $\delta_N[f]$:

$$\delta_N[f] = I[f] - Q[f] = \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{N} C_i f\bigl(x^{(i)}\bigr). \tag{2}$$

Будем говорить, что квадратурная формула (1) обладает d-свойством Хаара, или просто — d-свойством, если она точна для любого полинома Хаара $P(x)$ степени, не превосходящей d, т.е. $Q[P] = I[P]$.

3. Оценки нормы функционала погрешности квадратурных формул на пространствах S_p. В настоящем разделе будем считать, что коэффициенты при узлах квадратурной формулы (1) положительны: $C_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Сформулируем определение классов функций S_p, введенное в [1]. Пусть $p > 1$ — фиксированный параметр, $q > 1$ — сопряженное с ним значение: $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Множество функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0,1]$ и представимых в виде ряда Фурье–Хаара

$$f(x) = c_{0,0} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{m,j}\chi_{m,j}(x) \tag{3}$$

с вещественными коэффициентами $c_{0,0}$, $c_{m,j}$ ($m = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$), удовлетворяющими условию

$$A_p(f) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p\right]^{1/p} \leqslant A, \tag{4}$$

определяется как класс $S_p(A)$ (A — вещественная константа). Доказано [1], что множество функций $f(x)$, принадлежащих всем классам $S_p(A)$ (со всевозможными A), является линейным пространством, на котором норма вводится по формуле $||f||_{S_p} = A_p(f)$. Указанное линейное нормированное пространство обозначается через S_p, при этом все функции $f(x)$, отличающиеся постоянными слагаемыми, считаются одной функцией.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. *Если функция $f(x) \in S_p$, то для модуля функционала погрешности квадратурной формулы* (1) *имеет место неравенство*

$$\bigl|\delta_N[f]\bigr| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \bigl|Q[\chi_{m,j}]\bigr|^q\right]^{1/q}. \tag{5}$$

Доказательство. В [1] доказано, что если $f(x) \in S_p$, то ряд (3) сходится равномерно. Подставим его в выражение (2) для $\delta_N[f]$. В соответствии с определением коэффициентов Фурье–Хаара [1] имеем

$$c_{0,0} = \int\limits_0^1 f(x)\,dx. \tag{6}$$

Учитывая (6), получим

$$\bigl|\delta_N[f]\bigr| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{m,j} Q[\chi_{m,j}]\right|. \tag{7}$$

Применяя к выражению (7) для $\left|\delta_N[f]\right|$ неравенства треугольника и Гельдера, получаем (5). Лемма доказана.

Лемма 2 [2]. *Функции*

$$\kappa_{m,j}(x)=\begin{cases}2^m & \text{при}\quad x\in l_{m+1,j},\\ 2^{m-1} & \text{при}\quad x\in \overline{l_{m+1,j}}\setminus l_{m+1,j},\\ 0 & \text{при}\quad x\in[0,1]\setminus\overline{l_{m+1,j}},\end{cases}\tag{8}$$

где $j=1,2,\ldots,2^m$, являются полиномами Хаара степени m и образуют базис в линейном пространстве полиномов Хаара степеней, не превосходящих m, $m=1,2,\ldots$.

Лемма 3. *Имеют место равенства*

$$\chi_{m,j}(x)=2^{-(m+1)/2}\big[\kappa_{m,2j-1}(x)-\kappa_{m,2j}(x)\big],\quad m=1,2,\ldots,\quad j=1,2,\ldots,2^{m-1},\tag{9}$$

$$\kappa_{m,2j-1}(x)+\kappa_{m,2j}(x)=2\kappa_{m-1,j}(x),\quad m=2,3,\ldots,\quad j=1,2,\ldots,2^{m-1}.\tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) непосредственно следуют из определения функций Хаара и равенства (8).

Пусть

$$\Sigma_q(m)=2^{-(m-1)/2}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\big|Q[\chi_{m,j}]\big|^q\right]^{1/q},\quad m=1,2,\ldots,\quad q>1.\tag{11}$$

Лемма 4. *Для любой квадратурной формулы* (1) *существует хотя бы одно значение m_0, такое, что*

$$\Sigma_q(m_0)=\sup_{m\geqslant 1}\Sigma_q(m).\tag{12}$$

Доказательство. Очевидно, можно выбрать число m настолько большим, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) каждый замкнутый двоичный промежуток $\overline{l_{m+1,j}}$ содержит не более одного узла квадратурной формулы (1), $j=1,2,\ldots,2^m$;

2) узлы формулы (1) не являются точками вида $\dfrac{2j-1}{2^m}$, $j=1,2,\ldots,2^{m-1}$.

Обозначим через m' любое из чисел, удовлетворяющих этим условиям (легко видеть, что для всех $m>m'$ указанные два условия также будут выполняться). В соответствии с (11) и (9) имеем

$$\Sigma_q(m')=2^{-m'}\left[\sum_{j=1}^{2^{m'-1}}\left|\sum_{i=1}^{N}C_i\Big(\kappa_{m',2j-1}\big(x^{(i)}\big)-\kappa_{m',2j}\big(x^{(i)}\big)\Big)\right|^q\right]^{1/q}.\tag{13}$$

Обозначим через N_1 число узлов квадратурной формулы (1), отличных от 0 и 1 и лежащих на границах отрезков $\overline{l_{m'+1,j}}=\operatorname{supp}\{\kappa_{m',j}\}$, т.е. в точках $j/2^{m'}$ $(j=1,2,\ldots,2^{m'}-1)$. Для определенности будем считать, что это узлы $x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(N_1)}$ формулы. По определению числа m' узлы квадратурной формулы (1) не являются точками вида

$$\left\{\frac{2j-1}{2^{m'}}\right\}=\operatorname{supp}\{\kappa_{m',2j-1}\}\cap\operatorname{supp}\{\kappa_{m',2j}\}$$

и каждый отрезок $\overline{l_{m'+1,j}}$ содержит не более одного узла формулы. Тогда равенство (13) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Sigma_q(m')&=2^{-m'}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{2^{m'}}\Big(C_i\kappa_{m',j}\big(x^{(i)}\big)\Big)^q\right]^{1/q}=2^{-m'}\left[2\sum_{i=1}^{N_1}(2^{m'-1}C_i)^q+\sum_{i=N_1+1}^{N}(2^{m'}C_i)^q\right]^{1/q}=\\&=\left[2\sum_{i=1}^{N_1}(0.5\,C_i)^q+\sum_{i=N_1+1}^{N}{C_i}^q\right]^{1/q}.\end{aligned}\tag{14}$$

Заметим, что $\Sigma_q(m)$ есть величина, не зависящая от m для всех $m \geqslant m'$, так как проведенные рассуждения имеют место не только для $m = m'$, но и для любого $m > m'$. Следовательно, $\sup\limits_{m\geqslant 1}$ в равенстве (12) фактически сводится к $\max\limits_{1\leqslant m\leqslant m'}$, откуда получаем утверждение леммы.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Какова бы ни была квадратурная формула* (1), *для функционала погрешности этой формулы имеют место следующие соотношения:*

$$\bigl|\delta_N[f]\bigr| \leqslant A \sup_{m\geqslant 1} \Sigma_q(m), \quad \text{где} \quad f(x) \in S_p(A), \tag{15}$$

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = \sup_{m\geqslant 1} \Sigma_q(m). \tag{16}$$

Доказательство. Неравенство (15) следует из неравенства (5) с учетом (4) и (11). Из (15) получаем

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant \sup_{m\geqslant 1} \Sigma_q(m).$$

Требуется доказать, что эта оценка точная.

Воспользуемся техникой доказательств, примененной в [1]. Зафиксируем значение m_0, существование которого было доказано в лемме 4. В соответствии с этой леммой

$$\sup_{m\geqslant 1} \Sigma_q(m) = 2^{-(m_0-1)/2} \left[\sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} \bigl|Q[\chi_{m_0,j}]\bigr|^q \right]^{1/q}. \tag{17}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) = 2^{-(m_0-1)/2} \sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} \operatorname{sgn} Q[\chi_{m_0,j}]\, \bigl|Q[\chi_{m_0,j}]\bigr|^{q-1} \chi_{m_0,j}(x).$$

Легко видеть, что для $g(x)$ коэффициенты Фурье–Хаара имеют вид

$$c_{m_0,j} = 2^{-(m_0-1)/2} \operatorname{sgn} Q[\chi_{m_0,j}]\, \bigl|Q[\chi_{m_0,j}]\bigr|^{q-1},$$

где $j = 1, 2, \ldots, 2^{m_0-1}$, а при $m \neq m_0$ значения $c_{m,j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, $c_{0,0} = 0$. Следовательно,

$$A_p(g) = \left[\sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} \bigl|Q[\chi_{m_0,j}]\bigr|^q \right]^{1/p}, \tag{18}$$

и в соответствии с (7)

$$\delta_N[g] = -2^{-(m_0-1)/2} \sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} \bigl|Q[\chi_{m_0,j}]\bigr|^q. \tag{19}$$

Из (17)–(19) следует, что $\delta_N[g] = -A_p(g) \sup\limits_{m\geqslant 1} \Sigma_q(m)$.

Построенная функция $g(x)$ может и не принадлежать $S_p(A)$. Если положить $\widetilde{g}(x) = \left[\dfrac{A}{A_p(g)}\right] g(x)$, то очевидно, что $\widetilde{g}(x) \in S_p(A)$ (так как $A_p(\widetilde{g}) = A$) и $\bigl|\delta_N[\widetilde{g}]\bigr| = A \sup\limits_{m\geqslant 1} \Sigma_q(m)$. Отсюда получаем (16). Теорема доказана.

Установим справедливость следующих утверждений.

Лемма 5. *Для всех целых положительных l имеет место неравенство*

$$\Sigma_q(m) \leqslant 2^{-m+l} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-l}} Q^q[\kappa_{m-l,j}] \right]^{1/q}. \tag{20}$$

Доказательство. Доказательство неравенства (20) проведем индукцией по l. Из (9) и (10) получаем

$$\bigl|Q[\chi_{m,j}]\bigr| = 2^{-(m+1)/2} \bigl|Q[\kappa_{m,2j-1} - \kappa_{m,2j}]\bigr| \leqslant 2^{-(m+1)/2} Q[\kappa_{m,2j-1} + \kappa_{m,2j}] = 2^{-(m+1)/2+1} Q[\kappa_{m-1,j}],$$

откуда непосредственно следует истинность неравенства (20) при $l=1$. Исходя из индуктивного предположения о справедливости неравенства

$$\Sigma_q(m) \leqslant 2^{-m+l-1}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-l+1}} Q^q[\kappa_{m-l+1,j}]\right]^{1/q}, \tag{21}$$

докажем (20). Легко видеть, что при $a, b > 0$, $q > 1$ имеет место неравенство

$$a^q + b^q \leqslant (a+b)^q. \tag{22}$$

Принимая во внимание (10) и (22), из (21) получаем

$$\Sigma_q(m) \leqslant 2^{-m+l-1}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-l}} \left(Q^q[\kappa_{m-l+1,2j-1}] + Q^q[\kappa_{m-l+1,2j}]\right)\right]^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-m+l-1}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-l}} \left(Q[\kappa_{m-l+1,2j-1}] + Q[\kappa_{m-l+1,2j}]\right)^q\right]^{1/q} = 2^{-m+l}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-l}} Q^q[\kappa_{m-l,j}]\right]^{1/q}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если квадратурная формула* (1) *обладает* d*-свойством, то*

$$\sup_{m\geqslant 1} \Sigma_q(m) \leqslant \left(2^d\right)^{-1/p}. \tag{23}$$

Доказательство. Из леммы 2 и условия точности квадратурной формулы (1) на полиномах Хаара степеней, не превосходящих d, следует равенство

$$Q[\kappa_{m,j}] = I[\kappa_{m,j}] = 1, \quad m = 1, 2, \ldots, d, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^m. \tag{24}$$

В силу (24) и (20) для $m - l \leqslant d$ получаем

$$\Sigma_q(m) \leqslant 2^{-m+l}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-l}} 1\right]^{1/q} = \left(2^{m-l}\right)^{-1/p}.$$

Подставляя в это неравенство $m = d + l$ ($l = 1, 2, \ldots$) и учитывая, что в силу точности квадратурной формулы (1) на функциях Хаара первых d групп величина $\Sigma_q(m) = 0$ для всех $m \leqslant d$, приходим к (23). Лемма доказана.

Лемма 7. *Для любой квадратурной формулы* (1), *точной на константах, имеет место следующее неравенство:*

$$\sup_{m\geqslant 1} \Sigma_q(m) \geqslant 2^{-1/p} N^{-1/p}. \tag{25}$$

Доказательство. Несложно показать, что при условии

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_N = 1, \quad C_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

которое следует из точности квадратурной формулы (1) на константах, функция

$$\varphi(C_1, C_2, \ldots, C_N) = 2\sum_{i=1}^{N_1} (0.5\, C_i)^q + \sum_{i=N_1+1}^{N} {C_i}^q$$

достигает своего наименьшего значения, равного $(N + N_1)^{1-q}$, когда

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{N_1} = 2(N+N_1)^{-1}, \quad C_{N_1+1} = C_{N_1+2} = \ldots = C_N = (N+N_1)^{-1}.$$

Тогда из (14) получаем

$$\Sigma_q(m') \geqslant (N+N_1)^{-1/p} \geqslant 2^{-1/p} N^{-1/p}.$$

Отсюда следует неравенство (25). Лемма доказана.

Имеет место

Теорема 2. *Для нормы функционала погрешности квадратурной формулы* (1), *точной на константах, справедлива следующая нижняя оценка:*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \geqslant 2^{-1/p} N^{-1/p}. \tag{26}$$

Если квадратурная формула (1) *обладает d-свойством, то*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant \left(2^d\right)^{-1/p}. \tag{27}$$

Доказательство. Неравенство (26) следует из теоремы 1 и леммы 7, неравенство (27) — из теоремы 1 и леммы 6.

Замечание 1. В [2] описаны все обладающие d-свойством минимальные весовые квадратурные формулы

$$\int\limits_0^1 g(x) f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^N C_i f(x^{(i)}).$$

Доказано, что в случае весовой функции $g(x) \equiv 1$ минимальная формула единственна: число ее узлов $N = 2^{d-1}$, узлы этой формулы $x^{(i)} = \dfrac{2i-1}{2^d}$, коэффициенты при узлах $C_i = 2^{-d+1}$, $i = 1, 2, \dots, 2^{d-1}$. Указанная квадратурная формула имеет вид (1); в соответствии с неравенством (27) норма ее функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2^{-1/p} N^{-1/p}$, и поскольку $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ удовлетворяет также неравенству (26), имеет место равенство

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = 2^{-1/p} N^{-1/p}. \tag{28}$$

Отсюда, в частности, следует, что константа $2^{-1/p}$ в правой части неравенства (26) не может быть увеличена, а величина $\left(2^d\right)^{-1/p}$ в (27) не может быть уменьшена. Таким образом, мы установили, что минимальная квадратурная формула (1), обладающая d-свойством, является наилучшей формулой на пространствах S_p.

4. Верхняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул на пространствах H_α. Сформулируем определение классов функций $H_\alpha(L)$, введенное в [1].

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$, $L > 0$. Множество функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих неравенству $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant L|x - y|^\alpha$ для любых $x, y \in [0, 1]$, называют классом $H_\alpha(L)$. Константу L называют определяющей постоянной этого класса.

В [1] показано, что множество функций $f(x)$, принадлежащих всем классам $H_\alpha(L)$ (со всевозможными значениями L, значение α фиксировано), является линейным пространством, на котором норма вводится по формуле

$$||f||_{H_\alpha} = \sup_{x,\, x+t \in [0,1]} \Big\{ \left|f(x+t) - f(x)\right| |t|^{-\alpha} \Big\}.$$

Указанное линейное нормированное пространство обозначается через H_α, при этом все функции $f(x)$, отличающиеся постоянными слагаемыми, считаются одной функцией.

В [1] доказаны утверждения, которые в одномерном случае принимают следующий вид (леммы 8–10).

Лемма 8. *Для коэффициентов Фурье–Хаара суммируемой функции $f(x) \in H_\alpha(L)$ имеют место неравенства*

$$|c_{m,j}| \leqslant 2^{-m(\alpha+1/2)-1/2} L, \quad m = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}. \tag{29}$$

Лемма 9. *Если $\alpha p > 1$, то $H_\alpha(L) \subset S_p(A)$ при $A = 0.5\, L \left(2^\alpha - 2^{1/p}\right)^{-1}$.*

Лемма 10. *Для функции $f(x) \in H_\alpha(L)$ норма $||f||_{H_\alpha} \leqslant L$. Если для $f(x)$ выбрать наименьшую возможную определяющую постоянную L, то $||f||_{H_\alpha} = L$.*

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Если функция $f(x) \in H_\alpha$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы* (1), *обладающей d-свойством, имеет место следующая оценка:*

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \leqslant 2^{-\alpha d-1} \left(2^\alpha - 1\right)^{-1}. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть $p > \alpha^{-1}$, L — определяющая постоянная одного из классов $H_\alpha(L)$, содержащих функцию $f(x)$. Тогда в соответствии с леммой 9 $f(x) \in S_p(A)$, где $A = 0.5\, L\,\big(2^\alpha - 2^{1/p}\big)^{-1}$.

Рассмотрим неравенство (5). Так как квадратурная формула (1) точна на функциях Хаара первых d групп, то это неравенство с учетом (11) можно переписать в следующем виде:

$$\big|\delta_N[f]\big| \leqslant \sum_{m>d}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \big|Q[\chi_{m,j}]\big|^q\right]^{1/q} \leqslant \sum_{m>d} 2^{(m-1)/2}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p\right]^{1/p} \sup_{m>d} \Sigma_q(m). \qquad (31)$$

В силу (29) имеем

$$\begin{aligned}\sum_{m>d} 2^{(m-1)/2}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p\right]^{1/p} &\leqslant \sum_{m>d} 2^{(m-1)/2}\Big[2^{m-1}\big(2^{-m(\alpha+1/2)-1/2}L\big)^p\Big]^{1/p} = \\ &= 2^{-1-1/p}L\sum_{m>d} 2^{-m(\alpha-1/p)} = 2^{-d(\alpha-1/p)}L\,\big(2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p}\big)^{-1}.\end{aligned} \qquad (32)$$

Из неравенства (31) с учетом (23) и (32) получаем

$$\big|\delta_N[f]\big| \leqslant 2^{-d(\alpha-1/p)}L\big(2^d\big)^{-1/p}\big(2^{\alpha+1} - 2^{1+1/p}\big)^{-1} = 2^{-\alpha d-1}L\,\big(2^\alpha - 2^{1/p}\big)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\big|\delta_N[f]\big| \leqslant 2^{-\alpha d-1}L\,\big(2^\alpha - 1\big)^{-1}, \qquad (33)$$

поскольку выражение в правой части (33) имеет вид $\inf\limits_{p>1/\alpha}\Big\{2^{-\alpha d-1}L\,\big(2^\alpha - 2^{1/p}\big)^{-1}\Big\}$.

Выберем в качестве L наименьшую возможную определяющую постоянную для $f(x)$. В соответствии с леммой 10 из (33) получим

$$\big|\delta_N[f]\big| \leqslant 2^{-\alpha d-1}\big(2^\alpha - 1\big)^{-1}||f||_{H_\alpha},$$

откуда следует неравенство (30). Теорема доказана.

Замечание 2. В случае минимальных квадратурных формул (1), которые обладают d-свойством, с $N = 2^{d-1}$ узлами $x^{(i)} = \dfrac{2i-1}{2^d}$ и коэффициентами при узлах $C_i = 2^{-d+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{d-1}$ (замечание 1) оценка (30) может быть записана в виде

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \leqslant 2^{-\alpha-1}\big(2^\alpha - 1\big)^{-1}N^{-\alpha}.$$

Следовательно, для указанных квадратурных формул $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} = O\big(N^{-\alpha}\big)$ при $N \to \infty$.

5. Заключение. В [1] рассмотрены формулы приближенного интегрирования

$$\int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2\, \ldots dx_n \approx N^{-1}\sum_{i=1}^{N} f\big(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\big) \qquad (34)$$

с 2^d узлами $\big(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\big) \in [0,1]^n$, образующими Π_τ-сетки ($0 \leqslant \tau < d$), и доказано, что они точны на полиномах Хаара степеней $s \leqslant d - \tau$. Для нормы функционала погрешности таких формул на пространствах H_α доказано [1] асимптотическое равенство $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} = O\big(N^{-\alpha}\ln^{n-1}N\big)$, $N \to \infty$, а на пространствах S_p — двусторонняя оценка

$$N^{-1/p} \leqslant \|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2^{(n-1+\tau)/p}N^{-1/p}. \qquad (35)$$

Кроме того, установлено [1], что при $n = 1, 2, 3$ Π_τ-сетки со сколь угодно большим числом $N = 2^d$ узлов существуют для любых значений $\tau = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, в одномерном случае константа-множитель в правой части неравенств (35) принимает наименьшее значение при $\tau = 0$ и соотношения (35) записываются в виде равенства

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = N^{-1/p}. \qquad (36)$$

Очевидно, что для квадратурных формул, исследованных автором данной работы, норма функционала погрешности $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*}$ при $N = 2^{d-1}$ тоже ограничена по сравнению с $N^{-\alpha}$, $N \to \infty$. Норма функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ при $N = 2^{d-1}$ так же, как и для формул (34), рассмотренных в [1] (в случае $n = 1$), имеет порядок $N^{-1/p}$, причем константа в равенстве (28) меньше, чем в (36).

В частности, условию $N = 2^{d-1}$ удовлетворяют квадратурные формулы, построенные в [2]. Указанные формулы можно рассматривать как обобщение формул (34), исследованных в [1] (при $n = 1$), — квадратурные формулы (34) с 2^d узлами, образующими Π_0-сетки, представляют собой частный случай формул, обладающих d-свойством. При этом квадратурные формулы, рассмотренные в [2], будучи минимальными формулами приближенного интегрирования, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.
2. *Кириллов К.А., Носков М.В.* Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2002. **42**, № 6. 791–799.
3. *Noskov M.V., Kirillov K.A.* Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials // J. of Approximation Theory. 2010. **162**, N 3. 615–627.
4. *Кириллов К.А.* Об оценке погрешности минимальных весовых квадратурных формул, точных для функций Хаара // Вычислительные технологии. 2006. **11** (спец. выпуск). 44–50.
5. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. **69**. 331–371.

Поступила в редакцию
05.08.2011