УДК 519.622

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДОВ ЧЕБЫШЁВА

С. К. Татевян[1], Н. А. Сорокин[1], С. Ф. Залёткин[2]

Рассматриваются численно-аналитические методы приближенного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков, основанные на ортогональных разложениях решения и его производной на шаге интегрирования в смещенные ряды Чебышёва по многочленам Чебышёва первого рода. Получены соотношения, связывающие коэффициенты Чебышёва решения задачи Коши с коэффициентами Чебышёва правой части системы. Изучается также представление решения в виде функционального ряда с использованием интегралов многочленов Чебышёва. Выводятся уравнения для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части системы, описывается итерационный процесс их решения, даются оценки погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва и решения относительно величины шага интегрирования.

Ключевые слова: многочлены Чебышёва, численный анализ, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, ортогональные разложения, численно-аналитические методы, сходимость.

Введение. Настоящая статья посвящена теоретической разработке метода численного решения задачи Коши для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \tag{I}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{II}$$

и задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \tag{Ia}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{IIa}$$

Метод основан на аппроксимации правой части дифференциальных уравнений на шаге интегрирования алгебраическим многочленом и последующем его интегрировании.

Многочленное приближение для правой части, взятой на решении дифференциального уравнения, можно выбирать разными способами. Одним из приемов получения многочленных приближений является интерполирование. Такая схема численного решения задачи Коши была исследована в [1, 2].

В данной работе рассматривается другой способ построения многочленного приближения. Этот метод опирается на разложение правой части, взятой на решении дифференциального уравнения, на шаге интегрирования $[x_0, x_0 + h]$, $h < X$, в ряд Фурье

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i[f] \cdot T_i(x)$$

по ортогональным многочленам Чебышёва первого рода $T_i(x)$. Частичная сумма

$$S_k(x, f) = \sum_{i=0}^{k} a_i[f] \cdot T_i(x)$$

[1] Институт астрономии РАН, ул. Пятницкая, 48, 109017, Москва; e-mail: nsorokin@inasan.rssi.ru
[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

этого ряда используется в качестве многочлена, аппроксимирующего правую часть $f(x, y(x), y'(x))$ уравнения (I) (соответственно $f(x, y(x))$ для уравнения первого порядка (Ia)).

Приведем несколько цитат из книги Л. А. Люстерника, О. А.Червоненкиса, А. Р. Янпольского [3] и из книги С. Пашковского [4], свидетельствующих о целесообразности данного способа аппроксимации исходного дифференциального уравнения. Как пишут Л. А. Люстерник, О. А. Червоненкис, А. Р. Янпольский на стр. 19, конечные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ по ортогональным многочленам "... дают в ряде случаев хорошее приближение к $f(x)$ и в смысле равномерной нормы. Особенно это относится к разложениям по многочленам Чебышёва, ортогональным многочленам с весом $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, 1)$. Они являются важным источником многочленных приближений ...". Когда речь идет о представлении функции $f(x)$ в виде многочлена наилучшего равномерного приближения $P_n(x)$, авторы на стр. 21 замечают, "что в качестве хорошего приближения к $P_n(x)$ можно взять ... конечную сумму ряда Фурье по этим многочленам". В предисловии к русскому изданию книги [4] В. И. Лебедев и С. Н. Киро отмечают, "... что ценным способом представления и вычисления функций являются их разложения в тригонометрические ряды и ряды по различным системам ортогональных многочленов .... Особое положение занимают разложения функций в ряды по многочленам Чебышёва, наименее отклоняющимся от нуля, — многочленам Чебышёва первого рода". В [4] на стр. 109 С. Пашковский, приводя теорему 8.5 об оценке погрешности равномерного приближения функции $f(x)$ с помощью n-й частичной суммы $S_n(x, f)$ ряда Чебышёва, говорит, "что если коэффициенты $a_{n+2}[f]$, $a_{n+3}[f], \ldots$ достаточно малы по сравнению с $a_{n+1}[f]$ (а такое положение имеет место для многих функций) ..., тогда частичная сумма ... ряда Чебышёва почти совпадает с многочленом наилучшего равномерного приближения степени n и на практике может его заменить".

Мы будем использовать систему смещенных многочленов Чебышёва первого рода $T_i^*(x)$ на отрезке $[0, 1]$ и смещенный ряд Чебышёва

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[\varphi] \cdot T_i^*(x) \tag{III}$$

функции

$$\varphi(x) \in L_2\Big(0, 1;\ \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\Big).$$

Коэффициенты Чебышёва функции $\varphi(x)$ определяются по формуле

$$a_i^*[\varphi] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, \varphi(x) T_i^*(x)\, dx, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{IV}$$

(см. § 8, формулы (8), (9) в [4]).

Настоящая работа основана на результатах, полученных в [5]. В частности, интеграл (IV) будет вычисляться с помощью выведенной в [5] формулы численного интегрирования Маркова, и это приведет к приближенным значениям коэффициентов Чебышёва, вычислив которые, можно построить приближенное решение задачи Коши (I), (II) и (Ia), (IIa).

Работа включает девять разделов. В разделах 1 – 4 приводятся разложения решения задачи Коши (I), (II), его производной и решения нормальной системы (Ia), (IIa) в ряды Чебышёва на шаге интегрирования. Устанавливается связь между коэффициентами Чебышёва решения, производной и коэффициентами Чебышёва правой части системы. Изучается также представление решения и производной в виде другого функционального ряда, построенного с использованием первообразных (интегралов) многочленов Чебышёва. В разделах 5, 6 выводятся уравнения для приближенных коэффициентов Чебышёва правой части и даются оценки погрешности коэффициентов. Описание итерационного метода решения этих уравнений и достаточные условия его сходимости составляют содержание седьмого и восьмого разделов. В девятом разделе показано, как по найденным коэффициентам Чебышёва вычисляются решение и производная на каждом шаге численного интегрирования.

Мы будем предполагать, что правые части дифференциальных уравнений (I), (Ia) имеют столько непрерывных частных производных, сколько это необходимо для того, чтобы были справедливы приводимые в работе оценки для погрешности рассматриваемого метода.

В данной статье часто встречается обозначение $\sum'$. Сумма со штрихом означает, что первое слагаемое суммы умножается на дополнительный множитель 1/2:

$$\sum_{j=l}^{m}{}' a_j = \frac{1}{2}\,a_l + a_{l+1} + \cdots + a_m, \quad m \geqslant l. \tag{V}$$

В каждом разделе используется своя последовательная нумерация формул. Для ссылки на формулы других разделов применяется двойная нумерация (i_1, i_2), где i_1 — номер раздела, i_2 — номер формулы в разделе i_1. Для ссылки из других разделов на формулы введения используется нумерация, принятая во введении, т.е. римскими цифрами.

1. Разложение решения задачи Коши для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и его производной в смещенный ряд Чебышёва. Зададим некоторое число $h < X$ и рассмотрим на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ задачу Коши (I), (II). Представим независимую переменную x в виде

$$x = x_0 + \alpha h. \tag{1}$$

Выражение для новой переменной

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h}. \tag{2}$$

На отрезке $[x_0, x_0 + h]$ переменная α изменяется от 0 до 1. Рассмотрим решение $y(x)$ как функцию переменной α:

$$y(x) = y(x_0 + \alpha h) = z(\alpha). \tag{3}$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$z'(\alpha) = y'(x_0 + \alpha h)\,h, \qquad y'(x_0 + \alpha h) = \frac{z'(\alpha)}{h}, \tag{4}$$

$$z''(\alpha) = y''(x_0 + \alpha h)\,h^2, \qquad y''(x_0 + \alpha h) = \frac{z''(\alpha)}{h^2}. \tag{5}$$

Уравнение (I) на $[x_0, x_0 + h]$ для функции новой переменной $z(\alpha)$ принимает вид

$$z''(\alpha) = h^2 f\Big(x_0 + \alpha h, z(\alpha), \frac{z'(\alpha)}{h}\Big), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{6}$$

Начальные условия (II) преобразуются в следующие начальные условия для функции $z(\alpha)$:

$$z(0) = y_0, \tag{7}$$

$$z'(0) = y_0' h. \tag{8}$$

Из (4), (5) следуют очевидные формулы для коэффициентов Чебышёва первой и второй производных решения $y(x_0 + \alpha h)$, рассматриваемых как функции переменной α:

$$a_i^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{1}{h}\,a_i^*[z'], \tag{9}$$

$$a_i^*\big[y''(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{1}{h^2}\,a_i^*[z'']. \tag{10}$$

Из нашего предположения о том, что правая часть $f(x, y, y')$ дифференциального уравнения (I) обладает непрерывными ограниченными частными производными по аргументам x, y, y' всех нужных порядков, и из теоремы о гладкости решений дифференциальных уравнений (см., например, § 29, стр. 129 в [6]) вытекает существование непрерывной на $[0, 1]$ производной у каждой из функций $z(\alpha)$, $z'(\alpha)$ и $z''(\alpha)$. Тем самым выполнены достаточные условия равномерной сходимости на $[0, 1]$ смещенных рядов Чебышёва для рассматриваемых функций $z(\alpha)$, $z'(\alpha)$, $z''(\alpha)$. Эти условия сформулированы в следствии из теорем 1 и 2 в разделе 1 в [5]. Таким образом, имеют место следующие равенства:

$$z(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[z] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{11}$$

$$z'(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[z'] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{12}$$

$$z''(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z''] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{13}$$

Уравнение (6) для $z(\alpha)$ можно представить в виде

$$z''(\alpha) = h^2 \Phi(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{14}$$

где $\Phi(\alpha)$ — правая часть дифференциального уравнения (I), взятая на решении задачи Коши (I), (II):

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\big). \tag{15}$$

Отсюда

$$a_i^*[z''] = h^2 a_i^*[\Phi]. \tag{16}$$

Установим связь коэффициентов Чебышёва первой производной $y'(x_0 + \alpha h)$ и решения $y(x_0 + \alpha h)$, рассматриваемых как функции переменной α, с коэффициентами Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$.

1.1. Формулы, связывающие коэффициенты Чебышёва первой производной решения задачи Коши с коэффициентами Чебышёва правой части канонической системы. Воспользуемся формулой (9.29) из теоремы 9.2 в [4], которая связывает коэффициенты Чебышёва функции $\varphi(x)$ с коэффициентами Чебышёва ее производной $\varphi'(x)$:

$$a_i^*[\varphi] = \frac{1}{4i}\Big(a_{i-1}^*[\varphi'] - a_{i+1}^*[\varphi']\Big), \qquad i \neq 0. \tag{17}$$

Заменим в (17) функцию φ на $z'(\alpha)$ и применим (16):

$$a_i^*[z'] = \frac{1}{4i}\Big(a_{i-1}^*[z''] - a_{i+1}^*[z'']\Big) = \frac{h^2}{4i}\Big(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\Big), \qquad i \neq 0. \tag{18}$$

Учитывая (9), получаем ненулевые коэффициенты Чебышёва производной $y'(x_0 + \alpha h)$

$$a_i^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\Big(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\Big), \qquad i \neq 0. \tag{19}$$

Чтобы найти выражение для нулевого коэффициента Чебышёва a_0^* первой производной, необходимо вернуться к начальному условию (8). Подставим в разложение (12) для $z'(\alpha)$ значение $\alpha = 0$ и потребуем, чтобы выполнялось начальное условие (8):

$$y_0' h = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z'] \cdot T_i^*(0) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' (-1)^i a_i^*[z'] = \frac{1}{2} a_0^*[z'] - \frac{1}{4}\Big(a_0^*[z''] - a_2^*[z'']\Big) + \frac{1}{4 \cdot 2}\Big(a_1^*[z''] - a_3^*[z'']\Big) +$$
$$+ \sum_{i=3}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{4i}\Big(a_{i-1}^*[z''] - a_{i+1}^*[z'']\Big) = \frac{1}{2} a_0^*[z'] - \frac{1}{4} a_0^*[z''] + \frac{1}{4 \cdot 2} a_1^*[z''] + \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big) a_j^*[z''].$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{2}\, a_0^*[z'] = y_0' h + \frac{1}{4}\, a_0^*[z''] - \frac{1}{4 \cdot 2}\, a_1^*[z''] + \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big) a_j^*[z''].$$

С учетом (16) имеем

$$\frac{1}{2}\, a_0^*[z'] = y_0' h + \frac{h^2}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2} a_1^*[\Phi]\Big) + \frac{h^2}{4} \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big) a_j^*[\Phi].$$

Учитывая (9), окончательно получаем выражение для нулевого коэффициента Чебышёва $a_0^*[y'(x_0 + \alpha h)]$:

$$\frac{1}{2}\, a_0^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] = y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2} a_1^*[\Phi]\Big) + \frac{h}{4} \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big) a_j^*[\Phi]. \tag{20}$$

1.2. Формулы, связывающие коэффициенты Чебышёва решения задачи Коши с коэффициентами Чебышёва правой части канонической системы. Теперь установим связь коэффициентов Чебышёва решения $y(x_0 + \alpha h)$, рассматриваемого как функция переменной α, с коэффициентами

Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$. Для этого воспользуемся формулой (9.28) из теоремы 9.2 в [4], которая связывает коэффициенты Чебышёва функции $\varphi(x)$ с коэффициентами Чебышёва ее производной $\varphi^{(m)}(x)$ порядка m:

$$a_i^*[\varphi] = 2^{-2m} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq m-j}}^{m} (i+j-l)^{-1} a_{i-m+2j}^*[\varphi^{(m)}], \qquad i > m. \tag{21}$$

Положим в (21) $m = 2$, заменим функцию φ на $z(\alpha)$ и применим (16):

$$a_i^*[z] = \frac{1}{2^4}\Big(\frac{a_{i-2}^*[z'']}{i(i-1)} - 2\,\frac{a_i^*[z'']}{(i-1)(i+1)} + \frac{a_{i+2}^*[z'']}{i(i+1)}\Big) = \frac{h^2}{2^4}\Big(\frac{a_{i-2}^*[\Phi]}{i(i-1)} - 2\,\frac{a_i^*[\Phi]}{(i-1)(i+1)} + \frac{a_{i+2}^*[\Phi]}{i(i+1)}\Big), \quad i > 2.$$

Учитывая, что $a_i^*[y(x_0 + \alpha h)] = a_i^*[z(\alpha)]$, получаем коэффициенты Чебышёва решения $y(x_0 + \alpha h)$:

$$a_i^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h^2}{16}\,\frac{(i+1)a_{i-2}^*[\Phi] - 2i a_i^*[\Phi] + (i-1)a_{i+2}^*[\Phi]}{i(i^2-1)}, \qquad i > 2. \tag{22}$$

Найдем выражения для остальных коэффициентов Чебышёва: $a_2^*[y(x_0+\alpha h)]$, $a_1^*[y(x_0+\alpha h)]$ и $a_0^*[y(x_o+\alpha h)]$. Для этого используем формулу (17) для $\varphi = z(\alpha)$.

Положим в (17) $i = 2$, а затем воспользуемся (18):

$$a_2^*[z] = \frac{1}{4\cdot 2}\Big(a_1^*[z'] - a_3^*[z']\Big) = \frac{h^2}{4\cdot 2}\Big(\frac{a_0^*[\Phi] - a_2^*[\Phi]}{4} - \frac{a_2^*[\Phi] - a_4^*[\Phi]}{4\cdot 3}\Big).$$

Приводя подобные члены, имеем

$$a_2^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h^2}{96}\Big(3a_0^*[\Phi] - 4a_2^*[\Phi] + a_4^*[\Phi]\Big). \tag{23}$$

Положим в (17) $i = 1$. Тогда с учетом (9) имеем

$$a_1^*[z] = \frac{1}{4}\Big(a_0^*[z'] - a_2^*[z']\Big) = \frac{h}{4}\Big(a_0^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] - a_2^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big]\Big).$$

Далее воспользуемся выражением (20) для нулевого коэффициента Чебышёва производной и значением правой части равенства (19) при $i = 2$ для второго коэффициента Чебышёва производной. В результате получим выражение для первого коэффициента Чебышёва решения:

$$a_1^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{2}\Big[y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}a_1^*[\Phi]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[\Phi] - \frac{h}{2\cdot 8}\Big(a_1^*[\Phi] - a_3^*[\Phi]\Big)\Big].$$

Приводя подобные члены, имеем

$$a_1^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{2}\Big[y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{3}{4}\,a_1^*[\Phi] + \frac{1}{4}\,a_3^*[\Phi]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[\Phi]\Big]. \tag{24}$$

Теперь перейдем к выводу выражения для нулевого коэффициента Чебышёва решения $y(x_0 + \alpha h)$. Для этого вернемся к начальному условию (7). Подставим в разложение (11) для $z(\alpha)$ значение $\alpha = 0$ и полученную сумму ряда приравняем значению y_0 из условия (7):

$$y_0 = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z]\cdot T_i^*(0) = \frac{1}{2}\,a_0^*[z] + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i^*[z].$$

Преобразуем правую часть полученного равенства. Для этого воспользуемся, как и раньше, соотношением (17) для $\varphi = z(\alpha)$ между коэффициентами Чебышёва функции и ее производной:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2}\,a_0^*[z] + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{4i}\Big(a_{i-1}^*[z'] - a_{i+1}^*[z']\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\,a_0^*[z] - \frac{1}{4}\,a_0^*[z'] - \Big(-\frac{1}{4\cdot 1}\,a_2^*[z']\Big) + \sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{4i}\Big(a_{i-1}^*[z'] - a_{i+1}^*[z']\Big). \end{aligned}$$

Теперь применим еще раз соотношение (17), полагая в нем $\varphi = z'(\alpha)$:

$$y_0 = \frac{1}{2}\,a_0^*[z] - \frac{1}{4}\,a_0^*[z'] - \Big[-\frac{1}{4\cdot 1}\cdot\frac{1}{4\cdot 2}\Big(a_1^*[z''] - a_3^*[z'']\Big)\Big] + \\ + \sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{4i}\Big[\frac{1}{4(i-1)}\Big(a_{i-2}^*[z''] - a_i^*[z'']\Big) - \frac{1}{4(i+1)}\Big(a_i^*[z''] - a_{i+2}^*[z'']\Big)\Big].$$

Выражение в квадратных скобках перед знаком суммы $\sum$ совпадает с взятым со знаком минус вычитаемым, которое стоит под знаком суммы и соответствует значению индекса $i = 1$. Каждая разность вида

$$\frac{1}{4(j+1)}\Big(a_j^*[z''] - a_{j+2}^*[z'']\Big), \qquad j = 1, 2, \ldots$$

входит в правую часть полученного равенства два раза: один раз с коэффициентом $-\dfrac{(-1)^j}{4j}$, второй раз с коэффициентом $\dfrac{(-1)^{j+2}}{4(j+2)}$. Разность

$$\frac{1}{4}\Big(a_0^*[z''] - a_2^*[z'']\Big)$$

войдет только один раз с коэффициентом $\dfrac{1}{4\cdot 2}$. Поэтому предыдущее равенство может быть приведено к виду

$$y_0 = \frac{1}{2}\,a_0^*[z] - \frac{1}{4}\,a_0^*[z'] + \frac{1}{4\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}\Big(a_0^*[z''] - a_2^*[z'']\Big) + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{4(j+2)} - \frac{1}{4j}\Big)\frac{1}{4(j+1)}\Big(a_j^*[z''] - a_{j+2}^*[z'']\Big).$$

Отсюда с учетом (9) и (16) имеем

$$\frac{1}{2}\,a_0^*[z] = y_0 + \frac{h}{4}\,a_0^*[y'(x_0+\alpha h)] - \frac{h^2}{32}\Big(a_0^*[\Phi] - a_2^*[\Phi]\Big) - \frac{h^2}{16}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j}\Big)\frac{a_j^*[\Phi] - a_{j+2}^*[\Phi]}{j+1}.$$

Используя (20) и приводя подобные члены, окончательно получаем выражение для нулевого коэффициента Чебышёва решения

$$\frac{1}{2}\,a_0^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{2}\,y_0' + \frac{h^2}{32}\Big(3a_0^*[\Phi] - 2a_1^*[\Phi] + a_2^*[\Phi]\Big) + \frac{h^2}{8}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[\Phi] - \\ - \frac{h^2}{16}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j}\Big)\frac{a_j^*[\Phi] - a_{j+2}^*[\Phi]}{j+1}. \tag{25}$$

Замечание. Если коэффициенты Чебышёва функции

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h), y'(x_0+\alpha h)\big) \tag{15}$$

удовлетворяют условию

$$a_i^*[\Phi] = 0, \qquad i \geqslant k+1, \tag{26}$$

то для коэффициентов Чебышёва решения задачи Коши (I), (II) и его производной выполняются следующие соотношения:

$$a_i^*[y'] = 0, \qquad i \geqslant k+2, \tag{27}$$

$$a_i^*[y] = 0, \qquad i \geqslant k+3. \tag{28}$$

Соотношение (27) следует из формулы (19), а соотношение (28) — из (22).

2. Представление решения задачи Коши для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и его производной в виде функционального ряда с использованием первообразных (интегралов) смещенных многочленов Чебышёва. Перейдем к описанию многочленных разложений решения задачи Коши (I), (II) и его производной, основанных на интегрировании рядов Чебышёва.

2.1. Первообразные смещенных многочленов Чебышёва. Рассмотрим для произвольного $x \in [0,1]$ первообразную смещенного многочлена Чебышёва первого рода $T_i^*(x)$:

$$\Psi_{i+1}(x) = \int\limits_0^x T_i^*(\omega)\,d\omega = \int\limits_0^x T_i(2\omega-1)\,d\omega = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2x-1} T_i(t)\,dt. \tag{1}$$

Воспользуемся теоремой 2.13 в [4], в которой приведены формулы для интегралов с переменным верхним пределом от обычных многочленов Чебышёва:

$$\int\limits_{-1}^{w} T_i(t)\,dt = \begin{cases} T_1(w)+1, & i=0,\\ \frac{1}{4}\Big(T_2(w)-1\Big), & i=1,\\ \frac{1}{2}\Big(\frac{T_{i+1}(w)}{i+1} - \frac{T_{i-1}(w)}{i-1}\Big) + \frac{(-1)^{i+1}}{i^2-1}, & i>1. \end{cases} \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем для первообразных смещенных многочленов Чебышёва первого рода простые выражения через линейные комбинации этих многочленов:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{2}\Big[T_1^*(x)+1\Big], \tag{3}$$

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{4}\Big(T_2^*(x)-1\Big)\Big], \tag{4}$$

$$\Psi_{i+1}(x) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{T_{i+1}^*(x)}{i+1} - \frac{T_{i-1}^*(x)}{i-1}\Big) + \frac{(-1)^{i+1}}{i^2-1}\Big], \quad i>1. \tag{5}$$

2.2. Представление первой производной решения задачи Коши. Теперь рассмотрим задачу Коши (I), (II). Уравнение (I) на отрезке $[x_0, x_0+h]$ принимает вид

$$y''(x) = y''(x_0+\alpha h) = \Phi(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{6}$$

где

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h), y'(x_0+\alpha h)\big)$$

— правая часть уравнения (I), взятая на решении задачи Коши. Разложим $\Phi(\alpha)$ в смещенный ряд Чебышёва

$$y''(x_0+\alpha h) = \Phi(\alpha) = \frac{1}{2}\,a_0^*[\Phi] + a_1^*[\Phi]\cdot T_1^*(\alpha) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^*[\Phi]\cdot T_i^*(\alpha). \tag{7}$$

Положим $\alpha = 0$; используя формулу для значений смещенных многочленов Чебышёва в нуле

$$T_i^*(0) = T_i(-1) = (-1)^i, \qquad i = 0,1,\ldots, \tag{8}$$

имеем:

$$y''(x_0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}\,a_0^*[\Phi] + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^*[\Phi]\cdot(-1)^i. \tag{9}$$

Вычтем (9) из (7):

$$y''(x) - y''(x_0) = \Phi(\alpha) - \Phi(0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^*[\Phi]\big(T_i^*(\alpha) - (-1)^i\big). \tag{10}$$

Проинтегрируем левую часть равенства (10) по x на $[x_0, x]$, $x \leqslant x_0+h$, а правую часть этого же равенства — по α на $[0,\alpha]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, т.е. интегрируем (10) с использованием формулы замены переменной $x = x_0+\alpha h$:

$$y'(x) = y'(x_0) + y''(x_0)\alpha h + a_1^*[\Phi]\int\limits_0^{\alpha}\big(T_1^*(\xi)+1\big)h\,d\xi + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^*[\Phi]\int\limits_0^{\alpha}\big(T_i^*(\xi)-(-1)^i\big)h\,d\xi. \tag{11}$$

Интегралы с переменным верхним пределом от многочленов Чебышёва являются первообразными многочленов Чебышёва. Используя принятое для них в (1) обозначение, последнее равенство перепишем следующим образом:

$$y'(x) = y'(x_0) + y''(x_0)\alpha h + a_1^*[\Phi]h\big[\Psi_2(\alpha) + \alpha\big] + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^*[\Phi]h\big[\Psi_{i+1}(\alpha) - (-1)^i\alpha\big]. \tag{12}$$

Воспользуемся выражениями для первообразных смещенных многочленов Чебышёва через линейные комбинации смещенных многочленов Чебышёва. Эти выражения для $\Psi_2(\alpha)$ и $\Psi_{i+1}(\alpha)$, $i \geqslant 2$, получаются из формул (4) и (5) заменой буквы x на букву α. Подставляя их в (12), имеем:

$$\begin{gathered} y'(x) = y'(x_0) + y''(x_0)\alpha h + a_1^*[\Phi]h\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\Big(T_2^*(\alpha) - 1\Big) + \alpha\right] + \\ + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^*[\Phi]h\left[\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{T_{i+1}^*(\alpha)}{i+1} - \frac{T_{i-1}^*(\alpha)}{i-1}\Big) + \frac{(-1)^{i+1}}{i^2-1}\Big] - (-1)^i\alpha\right]. \end{gathered} \tag{13}$$

Итак, мы представили производную $y'(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, решения задачи Коши (I), (II) в виде еще одного функционального ряда (12) или (13), отличного от ряда Чебышёва функции $y'(x_0+\alpha h)$. Докажем, что этот ряд сходится к производной $y'(x_0+\alpha h)$, рассматриваемой как функция переменной α, равномерно на отрезке $[0,1]$.

Ряд

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i^*[\Phi]h\big[\Psi_{i+1}(\alpha) - (-1)^i\alpha\big] \tag{14}$$

в (12) (или в (13)) мажорируется на $[0,1]$ числовым рядом

$$\frac{3}{2}\,h\sum_{i=2}^{\infty}\big|a_i^*[\Phi]\big|. \tag{15}$$

Напомним, что коэффициент Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ функции $\Phi(\alpha)$ совпадает с тригонометрическим коэффициентом Фурье четной функции

$$\psi(t) = \Phi\Big(\cos^2\frac{t}{2}\Big),$$

а смещенный ряд Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$ при условии $\alpha = \cos^2\dfrac{t}{2}$ одновременно является тригонометрическим рядом Фурье четной функции $\psi(t)$ (см. раздел 1 в [5]). Числовой ряд (15), составленный из модулей тригонометрических коэффициентов Фурье, сходится. Доказательство этого утверждения содержится в теореме о простейших условиях абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье (см. гл. 8, § 4, п. 2, стр. 306–308, теорема 8.9 в [8]). По признаку Вейерштрасса функциональный ряд (14), входящий в (12) и (13), сходится равномерно на $[0,1]$.

2.3. Представление решения задачи Коши. Из равномерной сходимости ряда (12) следует, что этот ряд и ряд (13) можно интегрировать почленно. Проинтегрируем левую часть равенства (12) по x на $[x_0, x]$, $x \leqslant x_0 + h$, а правую часть этого же равенства — по α на $[0,\alpha]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + y''(x_0)\frac{\alpha^2h^2}{2} + a_1^*[\Phi]h^2\Big[\chi_3(\alpha) + \frac{\alpha^2}{2}\Big] + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^*[\Phi]h^2\Big[\chi_{i+2}(\alpha) - (-1)^i\frac{\alpha^2}{2}\Big]. \tag{16}$$

Здесь функции $\chi_{i+2}(\alpha)$ являются интегралами с переменным верхним пределом от многочленов $\Psi_{i+1}(\alpha)$:

$$\chi_{i+2}(\alpha) = \int_0^{\alpha} \Psi_{i+1}(\eta)\,d\eta, \qquad i \geqslant 1. \tag{17}$$

Вид этих функций $\chi_{i+2}(\alpha)$ может быть найден, если подынтегральную функцию в (17) заменить на правую часть формул (4), (5) и выполнить интегрирование по $[0,\alpha]$. В результате такого интегрирования получаем:

$$\chi_3(\alpha) = \int_0^{\alpha} \Psi_2(\eta)\,d\eta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\Big(\Psi_3(\alpha) - \alpha\Big), \tag{18}$$

$$\chi_{i+2}(\alpha)=\int_0^\alpha \Psi_{i+1}(\eta)\,d\eta=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\Big(\frac{\Psi_{i+2}(\alpha)}{i+1}-\frac{\Psi_i(\alpha)}{i-1}\Big)+\frac{(-1)^{i+1}\alpha}{i^2-1}\right],\qquad i\geqslant 2. \tag{19}$$

Снова воспользуемся формулами (4), (5) для $\Psi_2(\alpha)$ и $\Psi_i(\alpha)$, $i>2$. Заменяя в формулах (4), (5) букву x на α и подставляя их правые части в (18), (19), окончательно находим явный вид функций $\chi_i(\alpha)$ как линейную комбинацию смещенных многочленов Чебышёва:

$$\chi_3(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{T_3^*(\alpha)}{3}-\frac{T_1^*(\alpha)}{1}\Big)+\frac{(-1)^3}{2^2-1}\Big]-\alpha\right), \tag{20}$$

$$\chi_4(\alpha)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{T_4^*(\alpha)}{4}-\frac{T_2^*(\alpha)}{2}\Big)+\frac{(-1)^4}{3^2-1}\Big]-\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{4}\Big(T_2^*(\alpha)-1\Big)\Big]\right)+\frac{(-1)^3\alpha}{2^2-1}\right], \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\chi_{i+2}(\alpha)=\frac{1}{2}\Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(&\frac{1}{i+1}\cdot\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{T_{i+2}^*(\alpha)}{i+2}-\frac{T_i^*(\alpha)}{i}\Big)+\frac{(-1)^{i+2}}{(i+1)^2-1}\Big]-\\ &-\frac{1}{i-1}\cdot\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{T_i^*(\alpha)}{i}-\frac{T_{i-2}^*(\alpha)}{i-2}\Big)+\frac{(-1)^i}{(i-1)^2-1}\Big]\Bigg)+\frac{(-1)^{i+1}\alpha}{i^2-1}\Bigg],\qquad i>2.\end{aligned} \tag{22}$$

Мы представили решение $y(x_0+\alpha h)$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, задачи Коши (I), (II) в виде функционального ряда (16), (20) – (22), отличного от ряда Чебышёва функции $y(x_0+\alpha h)$. Ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^*[\Phi]h^2\Big[\chi_{i+2}(\alpha)-(-1)^i\frac{\alpha^2}{2}\Big] \tag{23}$$

в (16) мажорируется на $[0,1]$ сходящимся числовым рядом

$$\frac{3}{4}\,h^2\sum_{i=1}^{\infty}\big|a_i^*[\Phi]\big|.$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (16) сходится к решению $y(x_0+\alpha h)$, рассматриваемому как функция переменной α, равномерно на $[0,1]$.

3. Разложение решения задачи Коши для нормальной системы в смещенный ряд Чебышёва. Система уравнений первого порядка (Ia) с начальными условиями (IIa), рассматриваемая на сегменте $[x_0,x_0+h]$, $h<X$, для функции

$$z(\alpha)=y(x_0+\alpha h),\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1, \tag{1}$$

новой переменной

$$\alpha=\frac{x-x_0}{h} \tag{2}$$

преобразуется к виду

$$z'(\alpha)=hf(x_0+\alpha h,z(\alpha)),\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1, \tag{3}$$

$$z(0)=y_0. \tag{4}$$

Мы предполагаем, что правая часть $f(x,y)$ дифференциального уравнения (Ia) обладает непрерывными ограниченными частными производными по аргументам x, y всех нужных порядков. Тогда из теоремы о гладкости решений дифференциальных уравнений (см., например, § 29, стр. 129 в [6]) вытекает существование непрерывной на $[0,1]$ производной у каждой из функций $z(\alpha)$ и

$$z'(\alpha)=y'(x_0+\alpha h)\,h. \tag{5}$$

Тем самым будут выполнены достаточные условия равномерной сходимости на $[0,1]$ смещенных рядов Чебышёва для функций $z(\alpha)$ и $z'(\alpha)$. Эти условия сформулированы в следствии их теорем 1 и 2 в разделе 1 в [5].

Таким образом, решение $y(x)$ на $[x_0, x_0+h]$, рассматриваемое как функция переменной α, т.е. $z(\alpha) = y(x_0+\alpha h)$, и его производная $z'(\alpha)$ разлагаются в смещенные ряды Чебышёва

$$z(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{6}$$

$$z'(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z'] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{7}$$

равномерно сходящиеся на $[0,1]$. Уравнение (3) для $z(\alpha)$ можно переписать в виде

$$z'(\alpha) = h\Phi(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{8}$$

где $\Phi(\alpha)$ — правая часть дифференциального уравнения (Ia), взятая на решении задачи Коши (Ia), (IIa):

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h)\big). \tag{9}$$

Следовательно,

$$a_i^*[z'] = h a_i^*[\Phi]. \tag{10}$$

Воспользуемся формулой (1.17) для $\varphi = z(\alpha)$:

$$a_i^*[z] = \frac{1}{4i}\Big(a_{i-1}^*[z'] - a_{i+1}^*[z']\Big), \qquad i \neq 0.$$

Отсюда и из (10) получаем ненулевые коэффициенты Чебышёва решения $y(x_0+\alpha h)$

$$a_i^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\Big(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\Big), \qquad i \neq 0. \tag{11}$$

Чтобы найти выражение для нулевого коэффициента Чебышёва a_0^* решения, необходимо вернуться к начальному условию (4). Подставим в разложение (6) для $z(\alpha)$ значение $\alpha = 0$ и потребуем, чтобы выполнялось начальное условие (4):

$$y_0 = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z] \cdot T_i^*(0) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' (-1)^i a_i^*[z] = \frac{1}{2}a_0^*[z] - \frac{1}{4}\Big(a_0^*[z'] - a_2^*[z']\Big) + \frac{1}{4\cdot 2}\Big(a_1^*[z'] - a_3^*[z']\Big) +$$

$$+\sum_{i=3}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{4i}\Big(a_{i-1}^*[z'] - a_{i+1}^*[z']\Big) = \frac{1}{2}a_0^*[z] - \frac{1}{4}a_0^*[z'] + \frac{1}{4\cdot 2}a_1^*[z'] + \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[z'].$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{2}\,a_0^*[z] = y_0 + \frac{1}{4}\,a_0^*[z'] - \frac{1}{4\cdot 2}\,a_1^*[z'] + \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[z'].$$

С учетом (10) имеем

$$\frac{1}{2}\,a_0^*\big[y(x_0+\alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}\,a_1^*[\Phi]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[\Phi]. \tag{12}$$

Замечание. Если коэффициенты Чебышёва функции

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h)\big)$$

удовлетворяют условию

$$a_i^*[\Phi] = 0, \qquad i \geqslant k+1,$$

то для коэффициентов Чебышёва решения задачи Коши (Ia), (IIa) выполняется следующее соотношение:

$$a_i^*[y] = 0, \qquad i \geqslant k+2. \tag{13}$$

Соотношение (13) следует из формулы (11).

4. Представление решения задачи Коши для нормальной системы в виде функционального ряда с использованием первообразных (интегралов) смещенных многочленов Чебышёва. Уравнение (Ia) на сегменте $[x_0, x_0+h]$, $h<X$, принимает вид

$$y'(x) = y'(x_0+\alpha h) = \Phi(\alpha) = f\big(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h)\big), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{1}$$

Разложим правую часть уравнения (1), взятую на решении задачи Коши (Ia), (IIa), в смещенный ряд Чебышёва

$$y'(x_0+\alpha h) = \Phi(\alpha) = \frac{1}{2}\, a_0^*[\Phi] + a_1^*[\Phi]\cdot T_1^*(\alpha) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^*[\Phi]\cdot T_i^*(\alpha). \tag{2}$$

Положим $\alpha=0$; используя формулу (2.8) для значений смещенных многочленов Чебышёва в нуле

$$T_i^*(0) = T_i(-1) = (-1)^i, \qquad i = 0, 1, \dots,$$

имеем:

$$y'(x_0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}\, a_0^*[\Phi] + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^*[\Phi]\cdot(-1)^i. \tag{3}$$

Вычтем (3) из (2):

$$y'(x) - y'(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^*[\Phi]\big(T_i^*(\alpha) - (-1)^i\big). \tag{4}$$

Проинтегрируем левую часть равенства (4) по x на $[x_0, x]$, $x \leqslant x_0+h$, а правую часть этого же равенства — по α на $[0,\alpha]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, т.е. интегрируем (4) с использованием формулы замены переменной $x = x_0+\alpha h$:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + a_1^*[\Phi]\int_0^{\alpha}\big(T_1^*(\xi)+1\big)h\,d\xi + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^*[\Phi]\int_0^{\alpha}\big(T_i^*(\xi) - (-1)^i\big)h\,d\xi. \tag{5}$$

Интегралы с переменным верхним пределом от многочленов Чебышёва являются первообразными многочленов Чебышёва. Используя принятое для них в (2.1) обозначение, перепишем (5) следующим образом:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + a_1^*[\Phi]h\big[\Psi_2(\alpha)+\alpha\big] + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^*[\Phi]h\big[\Psi_{i+1}(\alpha) - (-1)^i\alpha\big]. \tag{6}$$

Воспользуемся выражениями для первообразных через линейные комбинации смещенных многочленов Чебышёва. Эти выражения для $\Psi_2(\alpha)$ и $\Psi_{i+1}(\alpha)$, $i \geqslant 2$, получаются из формул (2.4), (2.5) заменой буквы x на букву α. Подставляя их в (6), имеем:

$$\begin{gathered} y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + a_1^*[\Phi]\,h\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\Big(T_2^*(\alpha)-1\Big)+\alpha\right] + \\ + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^*[\Phi]\,h\left[\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{T_{i+1}^*(\alpha)}{i+1} - \frac{T_{i-1}^*(\alpha)}{i-1}\Big) + \frac{(-1)^{i+1}}{i^2-1}\Big] - (-1)^i\alpha\right]. \end{gathered} \tag{7}$$

Итак, мы представили решение $y(x_0+\alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, задачи Коши (I$a$), (II$a$) в виде еще одного функционального ряда (6) или (7), отличного от ряда Чебышёва функции $y(x_0+\alpha h)$. Так же, как и для (2.12), (2.13), доказывается, что этот ряд сходится к решению $y(x_0+\alpha h)$, рассматриваемому как функция переменной α, равномерно на отрезке $[0,1]$.

5. Вывод уравнений для коэффициентов Чебышёва при интегрировании канонической системы второго порядка. Полученные в предыдущих разделах $1-4$ ортогональные и другие многочленные разложения решения и его производной имеют в качестве своих коэффициентов либо коэффициенты Чебышёва правой части системы (как в разложениях (2.12), (2.16), (4.6)), либо линейные комбинации этих коэффициентов (см. формулы (1.19), (1.22), (1.23), (3.11)), либо суммы содержащих их бесконечных рядов (см. формулы (1.20), (1.24), (1.25), (3.12)). Для практического применения указанных разложений необходимо иметь значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ взятой на решении задачи Коши правой части системы. Но эти коэффициенты нам не известны. Поэтому дальнейшая цель наших рассуждений состоит в том, чтобы дать способ определения коэффициентов $a_i^*[\Phi]$. Для этого мы перейдем к выводу уравнений, которым удовлетворяют приближенные значения коэффициентов Чебышёва правой части, а затем и к описанию алгоритма решения этих уравнений.

5.1. Аппроксимация правой части канонической системы частичной суммой ряда Чебышёва. Правую часть

$$\Phi(\alpha) = f(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

дифференциального уравнения (I), взятую на решении задачи Коши (I), (II), разложим в смещенный ряд Чебышёва

$$\Phi(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[\Phi] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{1}$$

где

$$a_i^*[\Phi] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\Phi(\alpha) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha. \tag{2}$$

Рассмотрим k-ю частичную сумму этого ряда:

$$S_k(\alpha, \Phi) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[\Phi] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{3}$$

Коэффициенты $a_i^*[\Phi]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, входящие в (3), вычислим по квадратурной формуле Маркова для отрезка $[0, 1]$ с одним фиксированным узлом $\alpha = 0$, числом нефиксированных узлов k и весовой функцией $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$:

$$a_i^*[\Phi] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \Phi(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j) + R(\Phi \cdot T_i^*), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{4}$$

Абсциссы α_j и остаточный член $R(\Phi \cdot T_i^*)$ данной квадратуры определяются следующим образом:

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_j = \frac{1 + \cos \dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}}{2}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{5}$$

$$R(\Phi \cdot T_i^*) = R_i = \frac{1}{2^{4k}} \frac{(\Phi \cdot T_i^*)^{(2k+1)}(\eta)}{(2k+1)!}, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \tag{6}$$

(см. п. 5 в [5]). Абсциссы α_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, являются нулями многочлена Якоби $P_k^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(2\alpha - 1)$ и совпадают с нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва второго рода $U_{2k}^*(\alpha)$ степени $2k$. Подставляя (4) в (1), получим

$$\Phi(\alpha) = J_k(\alpha) + {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi), \tag{7}$$

где

$$J_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' \Big(\frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \Phi(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j) \Big) T_i^*(\alpha), \tag{8}$$

$r_k(\alpha, \Phi)$ — k-й остаток смещенного ряда Чебышёва (1).

Формула (8) дает простое выражение для коэффициентов Чебышёва многочлена $J_k(\alpha)$:

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \Phi(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{9}$$

С учетом (9) многочлен (8) может быть записан в виде

$$J_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[J_k] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{10}$$

Тогда квадратурная формула Маркова (4) принимает следующий вид:

$$a_i[\Phi] = a_i^*[J_k] + R_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{11}$$

Аппроксимируем функцию $\Phi(\alpha)$ многочленом $J_k(\alpha)$, т.е. k-й частичной суммой смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова. Тогда величина

$$\sum_{i=0}^{k}{}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi) \tag{12}$$

будет представлять погрешность аппроксимации. Она складывается из остаточного члена ряда Чебышёва и ошибок численного интегрирования в приближенных значениях коэффициентов Чебышёва. Эта суммарная погрешность (12) имеет порядок $O(h^{k+1})$ при $h \to 0$ (см. формулы (205), (206) в [5]). Таким образом, справедливо равенство

$$y''(x) = y''(x_0 + \alpha h) = J_k(\alpha) + O(h^{k+1}), \qquad h \to 0. \tag{13}$$

5.2. Уравнения для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части канонической системы с разложением решения и производной в ряд Чебышёва. Проинтегрируем левую часть уравнения (13) по x на $[x_0, x]$, $x \leqslant x_0 + h$, а правую часть этого же уравнения — по α на $[0, \alpha]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, т.е. интегрируем (13) с использованием формулы замены переменной $x = x_0 + \alpha h$:

$$y'(x) = y'(x_0) + h \int\limits_0^\alpha J_k(\xi)\, d\xi + O(h^{k+2}), \qquad h \to 0. \tag{14}$$

Отбросим в (14) остаточный член, а оставшуюся правую часть

$$U'(x_0 + \alpha h) = y'(x_0) + h \int\limits_0^\alpha J_k(\xi)\, d\xi$$

представим в виде линейной комбинации многочленов Чебышёва. Тогда

$$y'(x) \approx U'(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[U'] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{15}$$

Проинтегрируем левую часть уравнения (14) по x на $[x_0, x]$, $x \leqslant x_0 + h$, а правую часть — по α на $[0, \alpha]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + h^2 \int\limits_0^\alpha d\xi \int\limits_0^\xi J_k(\zeta)\, d\zeta + O(h^{k+3}), \qquad h \to 0. \tag{16}$$

Отбросим в (16) остаточный член, а оставшуюся правую часть

$$U(x_0 + \alpha h) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + h^2 \int\limits_0^\alpha d\xi \int\limits_0^\xi J_k(\zeta)\, d\zeta$$

представим в виде линейной комбинации многочленов Чебышёва. Тогда

$$y(x) \approx U(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k+2}{}' a_i^*[U] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{17}$$

Заметим, что

$$U'(x_0) = y'(x_0), \qquad U(x_0) = y(x_0). \tag{18}$$

Коэффициенты Чебышёва $a_i^*[U']$ в (15) вычисляются с помощью соотношений (1.19) для $i = 1, 2, \ldots, k+1$ и (1.20) для $i = 0$, в левых частях которых надо y' заменить на U'. Коэффициенты Чебышёва $a_i^*[U]$

в (17) вычисляются с помощью соотношений (1.22) для $i = 3, 4, \ldots, k+2$, (1.23) для $i = 2$, (1.24) для $i = 1$ и (1.25) для $i = 0$, в левых частях которых надо y заменить на U. При этом в правых частях всех указанных соотношений необходимо $a_l^*[\Phi]$ поменять на $a_l^*[J_k]$.

Подставим в (1.15) $U(x_0 + \alpha h)$ и $U'(x_0 + \alpha h)$ вместо $y(x_0 + \alpha h)$ и $y'(x_0 + \alpha h)$ соответственно. Тогда

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\big) \approx f\big(x_0 + \alpha h, U(x_0 + \alpha h), U'(x_0 + \alpha h)\big) = \tilde{\Phi}(\alpha) \tag{19}$$

и

$$\Phi(\alpha) - \tilde{\Phi}(\alpha) = \begin{cases} O(h^{k+2}) & \text{для} \quad \text{y''=f(x,y,y')}, \\ O(h^{k+3}) & \text{для} \quad \text{y''=f(x,y)}, \\ 0 & \text{для} \quad \text{y''=f(x)}. \end{cases} \tag{20}$$

Определим числа $a_i^*[\tilde{J}_k]$ по формуле

$$a_i^*[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \tilde{\Phi}(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k \tag{21}$$

и с помощью этих чисел составим многочлен

$$\tilde{J}_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[\tilde{J}_k] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{22}$$

Числа $a_i^*[\tilde{J}_k]$ являются коэффициентами Чебышёва многочлена $\tilde{J}_k(\alpha)$. Значения правой части $\tilde{\Phi}(\alpha_j)$ в (21) зависят от значений $U(x_0+\alpha_j h)$, $U'(x_0+\alpha_j h)$ функций $U(x_0+\alpha h)$ и $U'(x_0+\alpha h)$, а эти последние зависят от коэффициентов Чебышёва $a_l^*[J_k]$. Поскольку точное решение $y(x_0+\alpha h)$ дифференциального уравнения (I) и его производная $y'(x_0+\alpha h)$, а следовательно, и функция $\Phi(\alpha)$ нам не известны, то коэффициенты $a_i^*[J_k]$ в (9) и (10) являются неизвестными величинами. Будем считать, что коэффициенты Чебышёва функций $U(x_0+\alpha h)$, $U'(x_0+\alpha h)$ вычисляются с помощью соотношений (1.19), (1.20), (1.22)–(1.25), в правых частях которых надо $a_l^*[\Phi]$ заменить на $a_l^*[\tilde{J}_k]$. Поэтому соотношения (21) являются уравнениями относительно коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\tilde{J}_k]$.

Рассматривая $U(x_0 + \alpha h)$ и $U'(x_0 + \alpha h)$ как функции не только аргумента $(x_0 + \alpha h)$, но и аргументов $a_0^*[\tilde{J}_k]$, $a_1^*[\tilde{J}_k]$, $\ldots$, $a_k^*[\tilde{J}_k]$, т.е. считая их функциями нескольких переменных вида

$$U\big(x_0 + \alpha h; a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big), \tag{23}$$

$$U'\big(x_0 + \alpha h; a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big), \tag{24}$$

уравнения (21) могут быть представлены таким способом:

$$\begin{aligned} a_i^*[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' f\Big(x_0 + \alpha_j h, U\big(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big), \\ U'\big(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big)\Big) T_i^*(\alpha_j), \quad i = 0, 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{25}$$

Напомним, что U и U' в (25) вычисляются с помощью формул (17) и (15).

Система уравнений (25) относительно неизвестных $a_i^*[\tilde{J}_k]$ может быть решена итерационным методом. Метод нахождения этих неизвестных будем называть *вертикальным* методом (или *вертикальным* процессом). Его описание приводится в п. 7.1.

Из построения видно, что уравнения для приближенных значений коэффициентов Чебышёва (25), (17), (15) основаны на квадратурной формуле Маркова и рядах Чебышёва.

Подставим в (25) вместо $a_i^*[\tilde{J}_k]$ точные значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ правой части $\Phi(\alpha)$ (см. (1.15)). Левая часть равенства в (25), в силу (11), примет вид

$$a_i^*[J_k] + R_i. \tag{26}$$

Значения $\tilde{\Phi}(\alpha_j)$ выразим с помощью (20) через $\Phi(\alpha_j)$ и правую часть равенства (20). Тогда правая часть в (25) будет равна

$$a_i^*[J_k] + O\big(h^{k+2}\big) \quad \text{для уравнения} \quad y'' = f(x, y, y'),$$

$$a_i^*[J_k] + O\big(h^{k+3}\big) \quad \text{для уравнения} \quad y'' = f(x,y),$$
$$a_i^*[J_k] \quad \text{для уравнения} \quad y'' = f(x).$$

Заметим, что $R_i = O(h^{2k+1-i})$ при $h \to 0$; это следует из формулы Лейбница для производной $(\Phi \cdot T_i^*)^{(2k+1)}$ произведения функций $\Phi(\alpha)$ и $T_i^*(\alpha)$ в (6). Таким образом, невязка, которая при этом получается, будет иметь порядок:

для уравнения $y'' = f(x,y,y')$ —

$$\rho_i = O\big(h^{2k+1-i}\big) + O\big(h^{k+2}\big), \quad \text{т.е.} \quad \rho_k = O\big(h^{k+1}\big), \quad \rho_i = O\big(h^{k+2}\big), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{27}$$

для уравнения $y'' = f(x,y)$ —

$$\rho_i = O\big(h^{2k+1-i}\big) + O\big(h^{k+3}\big), \quad \text{т.е.} \quad \rho_k = O\big(h^{k+1}\big), \quad \rho_{k-1} = O\big(h^{k+2}\big), \quad \rho_i = O\big(h^{k+3}\big), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2, \tag{28}$$

для уравнения $y'' = f(x)$ —

$$\rho_i = O\big(h^{2k+1-i}\big), \quad i = 0,1,\ldots,k. \tag{29}$$

Функцию $U(x) = U(x_0 + \alpha h)$ и ее производную $U'(x) = U'(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, примем за приближенное решение задачи Коши (I), (II) и приближенное значение его производной на сегменте $[x_0, x_0 + h]$.

5.3. Оценка погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва правой части системы. Подставим в (25) вместо $a_i^*[\tilde J_k]$ точные значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ правой части $\Phi(\alpha)$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} a_i^*[\Phi] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' f\Big(&x_0 + \alpha_j h, U\big(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\Phi], a_1^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big), \\ &U'\big(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\Phi], a_1^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big)\Big) T_i^*(\alpha_j) + \rho_i, \end{aligned} \tag{30}$$

где невязка ρ_i задается формулами (27)–(29). Вычтем из (30) уравнение (25) (для сокращения записи аргументы U и U' функции f указывать не будем):

$$\begin{aligned} &a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde J_k] = \\ &\frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \Bigg[\frac{\partial f(x_0 + \alpha_j h)}{\partial y} \Big[U\big(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big) - U\big(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k]\big)\Big] + \\ &+ \frac{\partial f(x_0 + \alpha_j h)}{\partial y'} \Big[U'\big(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big) - U'\big(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k]\big)\Big]\Bigg] T_i^*(\alpha_j) + \rho_i. \end{aligned}$$

Производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ вычисляются в соответствии с формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (см. теорему 12.15 при $n = 0$ и формулу (12.67) в [7]). Применим еще раз формулу Тейлора к разностям для U и U' (для сокращения записи коэффициенты Чебышёва в качестве аргументов функций U и U' указывать не будем):

$$\begin{aligned} a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde J_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \Bigg[&\frac{\partial f(x_0 + \alpha_j h)}{\partial y} \Big[\sum_{m=0}^{k} \frac{\partial U(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]} \Big(a_m^*[\Phi] - a_m^*[\tilde J_k] \Big) \Big] + \\ &+ \frac{\partial f(x_0 + \alpha_j h)}{\partial y'} \Big[\sum_{m=0}^{k} \frac{\partial U'(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]} \Big(a_m^*[\Phi] - a_m^*[\tilde J_k] \Big) \Big] \Bigg] T_i^*(\alpha_j) + \rho_i. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\delta_i = a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde J_k], \qquad i = 0,1,\ldots,k,$$

и поменяем местами порядок суммирования:

$$\begin{aligned} \delta_i = \frac{4}{2k+1} \Bigg\{ &\sum_{m=0}^{k} \Big[{\sum_{j=0}^{k}}' \frac{\partial f(x_0 + \alpha_j h)}{\partial y} \frac{\partial U(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]} T_i^*(\alpha_j) \Big] \delta_m + \\ &+ \sum_{m=0}^{k} \Big[{\sum_{j=0}^{k}}' \frac{\partial f(x_0 + \alpha_j h)}{\partial y'} \frac{\partial U'(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]} T_i^*(\alpha_j) \Big] \delta_m \Bigg\} + \rho_i. \end{aligned}$$

Скалярная матрица $\dfrac{\partial U(x_0+\alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]}$ порядка M даст множитель h^2, а скалярная матрица $\dfrac{\partial U'(x_0+\alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]}$ — множитель h (см. формулы (1.22) – (1.25) и формулы (1.19), (1.20)). Поэтому последнее равенство может быть записано в виде

$$\delta_i = \frac{4}{2k+1}\sum_{m=0}^{k}\Big(h^2 Q_{im} + hP_{im}\Big)\delta_m + \rho_i \qquad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{31}$$

где Q_{im}, P_{im} — квадратные матрицы порядка M, зависящие от i и m (напомним, что M — это число уравнений в системе (I)).

Пусть $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_k)^T$, $\rho = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k)^T$, Q — блочная матрица порядка $(k+1)$ с элементами Q_{im}, P — блочная матрица порядка $(k+1)$ с элементами P_{im}. Тогда систему уравнений (31) можно представить в виде

$$\delta = \frac{4}{2k+1}\Big(h^2 Q + hP\Big)\delta + \rho. \tag{32}$$

Из (32) вытекает, что δ имеет тот же порядок относительно h, что и невязка ρ, т.е. $\delta = O(h^{k+1})$.

Для дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$ сумма в (31) равна

$$\sum_{m=0}^{k}\Big(h^2 Q_{im} + hP_{im}\Big)\delta_m = O(h^{k+2}), \qquad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Поэтому из (31) и (27) следует, что δ_i имеет такой же порядок относительно h, что и невязка ρ_i, т.е.

$$\delta_k = O(h^{k+1}), \qquad \delta_i = O(h^{k+2}), \qquad 0 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{33}$$

Для дифференциального уравнения $y'' = f(x, y)$ сумма в (31) равна

$$\sum_{m=0}^{k} h^2 Q_{im}\delta_m = O(h^{k+3}), \qquad i = 0, 1, \ldots, k,$$

(матрицы P_{im} в этом случае являются нулевыми). Поэтому из (31) и (28) следует, что δ_i имеет такой же порядок относительно h, что и невязка ρ_i, т.е.

$$\delta_k = O(h^{k+1}), \qquad \delta_{k-1} = O(h^{k+2}), \qquad \delta_i = O(h^{k+3}), \qquad 0 \leqslant i \leqslant k-2. \tag{34}$$

Для дифференциального уравнения $y'' = f(x)$ имеем $\delta_i = \rho_i$, т.е.

$$\delta_i = O(h^{2k+1-i}), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{35}$$

5.4. Уравнения для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части канонической системы с представлением решения и производной с помощью первообразных (интегралов) многочленов Чебышёва. Обратимся теперь к представлению решения и производной в виде функционального ряда с использованием первообразных (интегралов) смещенных многочленов Чебышёва (2.12), (2.13), (2.16), (2.20) – (2.22).

Так как $J_k(\alpha)$ (см. (8), (10)) является интерполяционным многочленом функции $\Phi(\alpha)$ (см. (1.15)) с узлами интерполирования (5), включающими узел $\alpha = 0$ (см. п. 6.2 в [5]), то

$$\Phi(0) = J_k(0). \tag{36}$$

Поэтому в силу (13) имеем

$$\Phi(\alpha) - \Phi(0) = \big(\Phi(\alpha) - J_k(\alpha)\big) + J_k(\alpha) - J_k(0) = J_k(\alpha) - J_k(0) + O(h^{k+1}), \qquad h \to 0,$$

или

$$y''(x_0 + \alpha h) - y''(x_0) = J_k(\alpha) - J_k(0) + O(h^{k+1}), \qquad h \to 0. \tag{37}$$

Интегрируя левую часть равенства (37) по отрезку $[x_0, x]$, $x \leqslant x_0 + h$, а правую часть — по отрезку $[0, \alpha]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, получаем

$$y'(x_0 + \alpha h) - y'(x_0) = y''(x_0)\alpha h + h\int\limits_0^{\alpha} J_k(\xi)\,d\xi - h\alpha J_k(0) + O(h^{k+2}).$$

Так как

$$J_k(0) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[J_k] \cdot (-1)^i = \frac{1}{2}\, a_0^*[J_k] + \sum_{i=1}^{k} a_i^*[J_k] \cdot (-1)^i,$$

то производная $y'(x) = y'(x_0 + \alpha h)$ может быть представлена в виде

$$y'(x) = y'(x_0) + y''(x_0)\alpha h + a_1^*[J_k]h\big[\Psi_2(\alpha) + \alpha\big] + \sum_{i=2}^{k} a_i^*[J_k]h\big[\Psi_{i+1}(\alpha) - (-1)^i\alpha\big] + O(h^{k+2}). \tag{38}$$

Заметим, что нулевой коэффициент Чебышёва $a_0^*[J_k]$ в правую часть (38) не входит. Снова интегрируем (38):

$$y(x) = y(x_0)+y'(x_0)\alpha h+y''(x_0)\frac{\alpha^2h^2}{2}+a_1^*[J_k]h^2\Big[\chi_3(\alpha)+\frac{\alpha^2}{2}\Big]+\sum_{i=2}^{k} a_i^*[J_k]h^2\Big[\chi_{i+2}(\alpha)-(-1)^i\frac{\alpha^2}{2}\Big]+O(h^{k+3}). \tag{39}$$

Здесь многочлены $\Psi_2(\alpha)$, $\Psi_{i+1}(\alpha)$ задаются формулами (2.4), (2.5), а многочлены $\chi_3(\alpha)$, $\chi_{i+2}(\alpha)$ — формулами (2.20)–(2.22). Отбросим в (38), (39) остаточный член, получим:

$$y'(x) \approx V'(x_0 + \alpha h) = y'(x_0) + y''(x_0)\alpha h + a_1^*[J_k]h\big[\Psi_2(\alpha) + \alpha\big] + \sum_{i=2}^{k} a_i^*[J_k]h\big[\Psi_{i+1}(\alpha) - (-1)^i\alpha\big], \tag{40}$$

$$\begin{aligned} y(x) \approx V(x_0 + \alpha h) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + y''(x_0)\frac{\alpha^2h^2}{2} + a_1^*[J_k]h^2\Big[\chi_3(\alpha) + \frac{\alpha^2}{2}\Big] +\\ + \sum_{i=2}^{k} a_i^*[J_k]h^2\Big[\chi_{i+2}(\alpha) - (-1)^i\frac{\alpha^2}{2}\Big]. \end{aligned} \tag{41}$$

Заметим, что правые части (40) и (41) равны U' и U (см. (15) и (17) соответственно).

Далее определяем функцию $\tilde\Phi(\alpha)$, числа $a_i^*[\tilde J_k]$ и многочлен $\tilde J_k(\alpha)$ по формулам (19), (21) и (22), а именно:

$$\tilde\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, V(x_0 + \alpha h), V'(x_0 + \alpha h)\big), \tag{42}$$

$$a_i^*[\tilde J_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \tilde\Phi(\alpha_j)T_i^*(\alpha_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{43}$$

$$\tilde J_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[\tilde J_k] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{44}$$

Значения $\tilde\Phi(\alpha_j)$ в (43) зависят от значений $V(x_0+\alpha_j h)$ и $V'(x_0+\alpha_j h)$ функций $V(x_0+\alpha h)$ и $V'(x_0+\alpha h)$, а эти последние зависят от коэффициентов Чебышёва $a_l^*[J_k]$ (см. формулы (40) и (41)). Поскольку точное решение $y(x_0 + \alpha h)$ дифференциального уравнения (I) и его производная $y'(x_0 + \alpha h)$, а следовательно, и функция $\Phi(\alpha)$ нам не известны, то коэффициенты $a_i^*[J_k]$ в формулах (9), (40) и (41) также являются неизвестными величинами. По этой причине в формулах (40) и (41) коэффициенты $a_l^*[J_k]$ заменим на $a_l^*[\tilde J_k]$. Поэтому соотношения (43) являются уравнениями относительно коэффициентов $a_i^*[\tilde J_k]$.

Рассматривая $V(x_0 + \alpha h)$ и $V'(x_0 + \alpha h)$ как функции не только аргумента $x_0 + \alpha h$, но и аргументов $a_1^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k]$, т.е. считая их функциями нескольких переменных вида

$$V\big(x_0 + \alpha h; a_1^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k]\big), \tag{45}$$

$$V'\big(x_0 + \alpha h; a_1^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k]\big), \tag{46}$$

уравнения (43) могут быть представлены таким способом:

$$\begin{aligned} a_i^*[\tilde J_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' f\Big(x_0 + \alpha_j h, V\big(x_0 + \alpha_j h; a_1^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k]\big),\\ V'\big(x_0 + \alpha_j h; a_1^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k]\big)\Big)T_i^*(\alpha_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{47}$$

Напомним, что V и V' в (47) вычисляются с помощью формул (41) и (40).

Система уравнений (47) относительно неизвестных $a_i^*[\tilde{J}_k]$ может быть решена итерационным методом. Метод нахождения этих неизвестных будем называть *вертикальным* методом или *вертикальным* процессом. Его описание приводится в п. 7.2.

Из построения видно, что уравнения для приближенных значений коэффициентов Чебышёва (47), (41), (40) основаны на квадратурной формуле Маркова и функциональных рядах, получающихся при интегрировании рядов Чебышёва.

Заметим, что так как нулевой коэффициент $a_0^*[\tilde{J}_k]$ не входит в выражения (40), (41) для V' и V, то систему уравнений (47) достаточно рассматривать только для $i = 1, 2, \ldots, k$. После нахождения $a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots,$ $a_k^*[\tilde{J}_k]$ нулевой коэффициент может быть определен по (47) при $i = 0$ явным образом.

6. Вывод уравнений для коэффициентов Чебышёва при интегрировании нормальной системы. Теперь перейдем к составлению уравнений, которым удовлетворяют приближенные значения неизвестных нам коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ правой части нормальной системы, взятой на решении задачи Коши (Ia), (IIa).

6.1. Аппроксимация правой части нормальной системы частичной суммой ряда Чебышёва. Уравнение (Ia) на отрезке $[x_0, x_0 + h]$, $h < X$, принимает вид

$$y'(x) = y'(x_0 + \alpha h) = \Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\big). \tag{1}$$

Аппроксимируем функцию $\Phi(\alpha)$ k-й частичной суммой смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова. Тогда

$$y'(x) = J_k(\alpha) + {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi). \tag{2}$$

Здесь $J_k(\alpha), R_i$ определяются формулами (5.10), (5.9), (5.5) и (5.6), $r_k(\alpha, \Phi)$ — остаток смещенного ряда Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$. Величина

$$ {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi) \tag{3}$$

будет представлять погрешность аппроксимации. Она складывается из остаточного члена ряда Чебышёва и ошибок R_i численного интегрирования в приближенных значениях коэффициентов Чебышёва. Так же, как и для уравнений второго порядка (см. п. 5.1), доказывается, что погрешность (3) имеет порядок $O(h^{k+1})$ при $h \to 0$ и справедливо аналогичное соотношению (5.13) равенство

$$y'(x) = y'(x_0 + \alpha h) = J_k(\alpha) + O(h^{k+1}), \qquad h \to 0. \tag{4}$$

6.2. Уравнения для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части нормальной системы с разложением решения в ряд Чебышёва. Проинтегрируем левую часть уравнения (4) по x на $[x_0, x]$, $x \leqslant x_0 + h$, а правую часть этого же уравнения — по α на $[0, \alpha]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, т.е. интегрируем (4) с использованием формулы замены переменной $x = x_0 + \alpha h$:

$$y(x) = y(x_0) + h \int\limits_0^\alpha J_k(\xi)\, d\xi + O(h^{k+2}), \qquad h \to 0. \tag{5}$$

Отбросим в (5) остаточный член и оставшуюся правую часть

$$U(x) = U(x_0 + \alpha h) = y(x_0) + h \int\limits_0^\alpha J_k(\xi)\, d\xi$$

разложим по системе смещенных многочленов Чебышёва. Тогда

$$y(x) \approx U(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[U] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{6}$$

Заметим, что

$$U(x_0) = y(x_0). \tag{7}$$

Коэффициенты Чебышёва $a_i^*[U]$ в (6) вычисляются с помощью соотношений (3.11) для $i = 1, 2, \ldots, k+1$ и (3.12) для $i = 0$, в левых частях которых надо y заменить на U, а в правых частях надо $a_l^*[\Phi]$ заменить на $a_l^*[J_k]$.

Подставим в $f(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h))$ полином $U(x_0 + \alpha h)$ вместо $y(x_0 + \alpha h)$. Тогда

$$\Phi(\alpha) = f\bigl(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\bigr) \approx f\bigl(x_0 + \alpha h, U(x_0 + \alpha h)\bigr) = \tilde{\Phi}(\alpha) \tag{8}$$

и разность

$$\Phi(\alpha) - \tilde{\Phi}(\alpha) = \begin{cases} O(h^{k+2}) & \text{для} \quad y' = f(x, y), \\ 0 & \text{для} \quad y' = f(x). \end{cases} \tag{9}$$

Определим числа

$$a_i^*[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \, \tilde{\Phi}(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k \tag{10}$$

и составим многочлен

$$\tilde{J}_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' \, a_i^*[\tilde{J}_k] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{11}$$

Числа $a_i^*[\tilde{J}_k]$ являются коэффициентами Чебышёва многочлена $\tilde{J}_k(\alpha)$. Значения $\tilde{\Phi}(\alpha_j)$ в (10) зависят от значений $U(x_0 + \alpha_j h)$ функции $U(x_0 + \alpha h)$, а эта последняя зависит от коэффициентов Чебышёва $a_l^*[J_k]$. Поскольку точное решение $y(x_0 + \alpha h)$ дифференциального уравнения (Ia), а следовательно, и функция $\Phi(\alpha)$ нам не известны, то коэффициенты $a_i^*[J_k]$ в (5.9), (5.10) также являются неизвестными величинами. Будем считать, что коэффициенты Чебышёва функции $U(x_0 + \alpha h)$ вычисляются с помощью соотношений (3.11), (3.12), в правых частях которых надо $a_l^*[\Phi]$ заменить на $a_l^*[\tilde{J}_k]$. Поэтому соотношения (10) являются уравнениями относительно коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\tilde{J}_k]$.

Рассматривая $U(x_0 + \alpha h)$ как функцию не только аргумента $x_0 + \alpha h$, но и аргументов $a_0^*[\tilde{J}_k]$, $a_1^*[\tilde{J}_k]$, $\ldots$, $a_k^*[\tilde{J}_k]$, т.е. считая ее функцией нескольких переменных вида

$$U\bigl(x_0 + \alpha h; a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\bigr), \tag{12}$$

уравнения (10) могут быть представлены таким способом:

$$a_i^*[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \, f\bigl(x_0 + \alpha_j h, U(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k])\bigr) T_i^*(\alpha_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{13}$$

Напомним, что U в (13) вычисляется с помощью формулы (6).

Система уравнений (13) относительно неизвестных $a_i^*[\tilde{J}_k]$ может быть решена итерационным методом. Метод нахождения этих неизвестных будем называть *вертикальным* методом или *вертикальным* процессом. Его описание приводится в п. 7.3.

Из построения видно, что уравнения для приближенных значений коэффициентов Чебышёва (13), (6) основаны на квадратурной формуле Маркова и рядах Чебышёва.

Подставим в (13) вместо $a_i^*[\tilde{J}_k]$ точные значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ правой части $\Phi(\alpha)$ (см. (1)). Слева в (13), в силу равенства (5.11), будем иметь

$$a_i^*[J_k] + R_i. \tag{14}$$

Значения $\tilde{\Phi}(\alpha_j)$ выразим с помощью (9) через $\Phi(\alpha_j)$ и правую часть равенства (9). Тогда правая часть в (13) будет равна: для уравнения $y' = f(x, y)$ — $a_i^*[J_k] + O\bigl(h^{k+2}\bigr)$, а для уравнения $y' = f(x)$ — $a_i^*[J_k]$. Заметим, что $R_i = O\bigl(h^{2k+1-i}\bigr)$ при $h \to 0$; это следует из формулы Лейбница для производной $(\Phi \cdot T_i^*)^{(2k+1)}$ произведения функций $\Phi(\alpha)$ и $T_i^*(\alpha)$ в (5.6). Таким образом, невязка, которая при этом получается, будет иметь порядок: для уравнения $y' = f(x, y)$ —

$$\rho_i = O\bigl(h^{2k+1-i}\bigr) + O\bigl(h^{k+2}\bigr), \quad \text{т.е.} \quad \rho_k = O\bigl(h^{k+1}\bigr), \quad \rho_i = O\bigl(h^{k+2}\bigr), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{15}$$

для уравнения $y' = f(x)$ —

$$\rho_i = O\bigl(h^{2k+1-i}\bigr), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{16}$$

Функцию $U(x) = U(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, примем за приближенное решение задачи (Ia), (IIa).

6.3. Оценка погрешности приближенных коэффициентов Чебышёва правой части системы. В уравнении (13) вместо $a_i^*[\tilde{J}_k]$ подставим точные значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$. Тогда будем иметь

$$a_i^*[\Phi] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' f\big(x_0 + \alpha_j h, U(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\Phi], a_1^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi])\big) T_i^*(\alpha_j) + \rho_i, \tag{17}$$

невязка ρ_i задается формулами (15), (16). Вычтем из (17) уравнение (13) (для сокращения записи аргумент U функции f указывать не будем):

$$a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f(x_0 + \alpha_j h)}{\partial y} \Big[U\big(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\big) - U\big(x_0 + \alpha_j h; a_0^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big)\Big] \times$$
$$\times\, T_i^*(\alpha_j) + \rho_i.$$

Производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ вычисляется в соответствии с формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (см. теорему 12.15 при $n = 0$ и формулу (12.67) в [7]). Применим еще раз формулу Тейлора к разности для U (для сокращения записи коэффициенты Чебышёва в качестве аргументов функции U указывать не будем):

$$a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f(x_0 + \alpha_j h)}{\partial y} \Big[\sum_{m=0}^{k} \frac{\partial U(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]} \big(a_m^*[\Phi] - a_m^*[\tilde{J}_k]\big)\Big] T_i^*(\alpha_j) + \rho_i.$$

Обозначим
$$\delta_i = a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde{J}_k], \qquad i = 0, 1, \ldots, k,$$
и поменяем местами порядок суммирования:

$$\delta_i = \frac{4}{2k+1} \sum_{m=0}^{k} \Big[\sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f(x_0 + \alpha_j h)}{\partial y} \frac{\partial U(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]} T_i^*(\alpha_j)\Big] \delta_m + \rho_i.$$

Скалярная матрица $\dfrac{\partial U(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_m^*[\Phi]}$ порядка M даст множитель h (см. формулы (3.11), (3.12)). Поэтому последнее равенство может быть записано в виде

$$\delta_i = \frac{4}{2k+1} \sum_{m=0}^{k} hQ_{im}\delta_m + \rho_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{18}$$

где Q_{im} — квадратные матрицы порядка M, зависящие от i и m (напомним, что M — это число уравнений в системе (Ia)).

Пусть $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_k)^T$, $\rho = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k)^T$, Q — блочная матрица порядка $(k+1)$ с элементами Q_{im}. Тогда систему уравнений (18) можно представить в виде

$$\delta = \frac{4}{2k+1} hQ\delta + \rho. \tag{19}$$

Из (19) вытекает, что δ имеет тот же порядок относительно h, что и невязка ρ, т.е. $\delta = O\big(h^{k+1}\big)$.

Для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ сумма в (18) равна

$$\sum_{m=0}^{k} hQ_{im}\delta_m = O\big(h^{k+2}\big), \qquad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Поэтому из (18) и (15) следует, что δ_i имеет такой же порядок относительно h, что и невязка ρ_i, т.е.

$$\delta_k = O\big(h^{k+1}\big), \quad \delta_i = O\big(h^{k+2}\big), \qquad 0 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{20}$$

Для дифференциального уравнения $y' = f(x)$ имеем $\delta_i = \rho_i$, т.е.

$$\delta_i = O\big(h^{2k+1-i}\big), \qquad i = 0, 1, \dots, k. \tag{21}$$

6.4. Уравнения для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части нормальной системы с представлением решения с помощью первообразных (интегралов) многочленов Чебышёва. Обратимся теперь к представлению решения задачи Коши (Ia), (IIa) в виде функционального ряда с использованием первообразных (интегралов) смещенных многочленов Чебышёва (4.6), (4.7).

Так как $J_k(\alpha)$ (см. (5.10), (5.9)) является интерполяционным многочленом для функции $\Phi(\alpha)$ (см. (1)) с узлами интерполирования (5.5), включающими узел $\alpha = 0$ (см. п. 6.2 в [5]), то

$$\Phi(0) = J_k(0). \tag{22}$$

Поэтому в силу (4) имеем

$$\Phi(\alpha) - \Phi(0) = \big[\Phi(\alpha) - J_k(\alpha)\big] + J_k(\alpha) - J_k(0) = J_k(\alpha) - J_k(0) + O\big(h^{k+1}\big), \quad h \to 0,$$

или

$$y'(x_0 + \alpha h) - y'(x_0) = J_k(\alpha) - J_k(0) + O\big(h^{k+1}\big), \quad h \to 0. \tag{23}$$

Интегрируя левую часть равенства (23) по x на отрезке $[x_0, x]$, $x \leqslant x_0 + h$, а правую часть — по α на отрезке $[0, \alpha]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, получаем:

$$y(x_0 + \alpha h) - y(x_0) = y'(x_0)\alpha h + h \int\limits_0^\alpha J_k(\xi)\, d\xi - h\alpha J_k(0) + O\big(h^{k+2}\big).$$

Так как

$$J_k(0) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[J_k] \cdot (-1)^i = \frac{1}{2}\, a_0^*[J_k] + \sum_{i=1}^{k} a_i^*[J_k] \cdot (-1)^i,$$

то решение $y(x_0 + \alpha h)$ может быть представлено в виде

$$y(x) = y(x_0 + \alpha h) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + a_1^*[J_k] h\big[\Psi_2(\alpha) + \alpha\big] + \sum_{i=2}^{k} a_i^*[J_k] h\big[\Psi_{i+1}(\alpha) - (-1)^i\alpha\big] + O\big(h^{k+2}\big). \tag{24}$$

Здесь многочлены $\Psi_2(\alpha)$, $\Psi_{i+1}(\alpha)$ задаются формулами (2.4), (2.5). Заметим, что нулевой коэффициент Чебышёва $a_0^*[J_k]$ в правую часть (24) не входит. Отбросим в (24) остаточный член и получим:

$$y(x) \approx V(x_0 + \alpha h) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + a_1^*[J_k] h\big[\Psi_2(\alpha) + \alpha\big] + \sum_{i=2}^{k} a_i^*[J_k] h\big[\Psi_{i+1}(\alpha) - (-1)^i\alpha\big]. \tag{25}$$

Правая часть (25) равна $U(x_0 + \alpha h)$ (см. (6)).

Далее определяем функцию $\tilde\Phi(\alpha)$, числа $a_i^*[\tilde J_k]$ и многочлен $\tilde J_k(\alpha)$ по формулам (8), (10) и (11), а именно:

$$\tilde\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, V(x_0 + \alpha h)\big), \tag{26}$$

$$a_i^*[\tilde J_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \tilde\Phi(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j), \qquad i = 0, 1, \dots, k, \tag{27}$$

$$\tilde J_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[\tilde J_k] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{28}$$

Значения $\tilde\Phi(\alpha_j)$ в (27) зависят от значений $V(x_0 + \alpha_j h)$ функции $V(x_0 + \alpha h)$, а эта последняя зависит от коэффициентов Чебышёва $a_l^*[J_k]$ (см. формулу (25)). Поскольку точное решение $y(x_0 + \alpha h)$ дифференциального уравнения (Ia), а следовательно, и функция $\Phi(\alpha)$ (см. (1)) нам не известны, то коэффициенты $a_i^*[J_k]$ в формулах (5.9), (25) также являются неизвестными величинами. По этой причине в формуле (25) коэффициенты $a_l^*[J_k]$ заменим на $a_l^*[\tilde J_k]$. Поэтому соотношения (27) являются уравнениями относительно коэффициентов $a_i^*[\tilde J_k]$.

Рассматривая $V(x_0+\alpha h)$ как функцию не только аргумента $x_0+\alpha h$, но и аргументов $a_1^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k]$, т.е. считая ее функцией нескольких переменных вида

$$V\big(x_0+\alpha h; a_1^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k]\big), \tag{29}$$

уравнения (27) могут быть представлены таким способом:

$$a_i^*[\tilde J_k] = \frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' f\big(x_0+\alpha_j h, V(x_0+\alpha_j h; a_1^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k])\big)T_i^*(\alpha_j), \qquad i=0,1,\ldots,k. \tag{30}$$

Напомним, V в (30) вычисляется с помощью формулы (25).

Система уравнений (30) относительно неизвестных $a_i^*[\tilde J_k]$ может быть решена итерационным методом. Метод нахождения этих неизвестных будем называть *вертикальным* методом или *вертикальным* процессом. Его описание приводится в п. 7.4.

Из построения видно, что уравнения для приближенных значений коэффициентов Чебышёва (30), (25) основаны на квадратурной формуле Маркова и функциональных рядах, получающихся при интегрировании рядов Чебышёва.

Заметим, что так как нулевой коэффициент $a_0^*[\tilde J_k]$ не входит в выражение (25) для V, то систему уравнений (30) достаточно рассматривать только для $i=1,2,\ldots,k$. После нахождения $a_1^*[\tilde J_k], \ldots, a_k^*[\tilde J_k]$ нулевой коэффициент может быть определен по (30) при $i=0$ явным образом.

7. Описание вертикального итерационного процесса определения коэффициентов Чебышёва. Уравнения для коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\tilde J_k]$, выведенные в пп. 5, 6, будем решать методом итераций. Метод нахождения неизвестных $a_i^*[\tilde J_k]$ будем называть *вертикальным* методом или *вертикальным* процессом. Рассмотрим этот метод для дифференциальных уравнений второго и первого порядков.

7.1. Итерационный процесс для канонической системы второго порядка с разложением решения и производной в ряд Чебышёва. Начнем изложение метода последовательных приближений с решения уравнений (5.25), (5.17), (5.15).

Допустим, что мы имеем некоторые приближенные значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$, $i=0,1,\ldots,k$. Примем эти значения в качестве нулевого приближения неизвестных $a_i^*[\tilde J_k]$. Обозначим это приближение через $a_i^{*(\nu)}[\tilde J_k]$, полагая здесь $\nu=0$, $i=0,1,\ldots,k$.

Определим ν-е приближение коэффициентов Чебышёва $a_i^*[U']$ производной U' по формулам (1.19) для $i=1,2,\ldots,k+1$ и (1.20) для $i=0$, а именно:

$$a_i^{*(\nu)}[U'] = \frac{h}{4i}\Big(a_{i-1}^{*(\nu)}[\tilde J_k] - a_{i+1}^{*(\nu)}[\tilde J_k]\Big), \qquad i=1,2,\ldots,k+1, \tag{1}$$

$$\frac12\, a_0^{*(\nu)}[U'] = y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^{*(\nu)}[\tilde J_k] - \frac12\, a_1^{*(\nu)}[\tilde J_k]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{k}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j-1}\Big)a_j^{*(\nu)}[\tilde J_k]. \tag{2}$$

Далее определяем ν-е приближение коэффициентов Чебышёва $a_i^*[U]$ решения U по формулам (1.22) для $i=3,4,\ldots,k+2$, (1.23) для $i=2$, (1.24) для $i=1$ и (1.25) для $i=0$, а именно:

$$a_i^{*(\nu)}[U] = \frac{h^2}{16}\,\frac{(i+1)a_{i-2}^{*(\nu)}[\tilde J_k] - 2i a_i^{*(\nu)}[\tilde J_k] + (i-1)a_{i+2}^{*(\nu)}[\tilde J_k]}{i(i-1)(i+1)}, \qquad i=3,4,\ldots,k+2, \tag{3}$$

$$a_2^{*(\nu)}[U] = \frac{h^2}{96}\Big(3a_0^{*(\nu)}[\tilde J_k] - 4a_2^{*(\nu)}[\tilde J_k] + a_4^{*(\nu)}[\tilde J_k]\Big), \tag{4}$$

$$a_1^{*(\nu)}[U] = \frac{h}{2}\Big[y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^{*(\nu)}[\tilde J_k] - \frac34\, a_1^{*(\nu)}[\tilde J_k] + \frac14\, a_3^{*(\nu)}[\tilde J_k]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{k}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j-1}\Big)a_j^{*(\nu)}[\tilde J_k]\Big], \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac12\, a_0^{*(\nu)}[U] &= y_0 + \frac{h}{2}\, y_0' + \frac{h^2}{32}\Big(3a_0^{*(\nu)}[\tilde J_k] - 2a_1^{*(\nu)}[\tilde J_k] + a_2^{*(\nu)}[\tilde J_k]\Big) + \\ &+ \frac{h^2}{8}\sum_{j=2}^{k}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1}-\frac{1}{j-1}\Big)a_j^{*(\nu)}[\tilde J_k] - \frac{h^2}{16}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+2}-\frac{1}{j}\Big)\frac{1}{j+1}\Big(a_j^{*(\nu)}[\tilde J_k] - a_{j+2}^{*(\nu)}[\tilde J_k]\Big).\end{aligned} \tag{6}$$

Входящие в формулы (1), (3), (6) коэффициенты Чебышёва $a_l^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ при $l \geqslant k+1$ полагаются равными нулю.

По найденным значениям коэффициентов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U']$, $i = 0, 1, \dots, k+1$ и $a_i^{*(\nu)}[U]$, $i = 0, 1, \dots, k+2$ вычисляем ν-е приближение для значений $U'(x_0 + \alpha_j h)$, $U(x_0 + \alpha_j h)$ по формулам (5.15) и (5.17), а именно:

$$U'^{(\nu)}(x_j^0) = U'^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^{*(\nu)}[U'] \cdot T_i^*(\alpha_j), \qquad j = 1, 2, \dots, k, \tag{7}$$

$$U^{(\nu)}(x_j^0) = U^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h) = \sum_{i=0}^{k+2}{}' a_i^{*(\nu)}[U] \cdot T_i^*(\alpha_j), \qquad j = 1, 2, \dots, k, \tag{8}$$

и значения правой части дифференциального уравнения (I)

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j) = f\bigl(x_j^0, U^{(\nu)}(x_j^0), U'^{(\nu)}(x_j^0)\bigr). \tag{9}$$

Здесь

$$x_j^0 = x_0 + \alpha_j h, \qquad j = 1, 2, \dots, k; \tag{10}$$

напомним, что α_j определяются по формуле (5.5). Теперь по формуле (5.25) или, что то же самое, (5.21) находим следующее, $(\nu+1)$-е, приближение коэффициентов Чебышёва правой части дифференциального уравнения (I), а именно:

$$a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \tilde{\Phi}(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j) = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' f\bigl(x_j^0, U^{(\nu)}(x_j^0), U'^{(\nu)}(x_j^0)\bigr) T_i^*(\alpha_j), \quad i = 0, 1, \dots, k. \tag{11}$$

Дальнейшие приближения для коэффициентов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U']$, $a_i^{*(\nu)}[U]$, $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k]$, $\nu = 1, 2, \dots$, строятся по такой же схеме с использованием формул (1) – (11) для $\nu = 1, 2, \dots$. Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно h очередного приближения $a_i^{*(\nu)}[U']$, $a_i^{*(\nu)}[U]$, $U'^{(\nu)}(x_j^0)$, $U^{(\nu)}(x_j^0)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ на единицу. В случае, когда правая часть дифференциального уравнения (I) не зависит от производной, т.е. для уравнения $y'' = f(x, y)$, каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно h очередного приближения $U'^{(\nu)}(x_j^0)$, $U^{(\nu)}(x_j^0)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ на два. При этом порядок точности данных приближений, т.е. порядок разностей между точными и приближенными значениями соответствующих величин, а именно:

$$y(x_j^0) - U^{(\nu)}(x_j^0), \quad y'(x_j^0) - U'^{(\nu)}(x_j^0), \quad a_i^*[\Phi] - a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k],$$

увеличивается до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения и производной, равный порядку точности формул (5.15), (5.17). Итерации продолжаются или до достижения максимального порядка точности решения и производной, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

В качестве значений коэффициентов Чебышёва $a_i^*[y]$, $a_i^*[y']$, $a_i^*[\Phi]$ решения задачи Коши (I), (II) $y(x_0 + \alpha h)$, производной решения $y'(x_0 + \alpha h)$ и правой части дифференциального уравнения (I)

$$\Phi(\alpha) = f\bigl(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\bigr), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

принимаются значения, полученные на последней выполненной итерации $\nu + 1$, а именно:

$$\begin{aligned} a_i^*[y] &= a_i^{*(\nu+1)}[U], \qquad i = 0, 1, \dots, k+2; \\ a_i^*[y'] &= a_i^{*(\nu+1)}[U'], \qquad i = 0, 1, \dots, k+1; \\ a_i^*[\Phi] &= a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k], \qquad i = 0, 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{12}$$

7.2. Итерационный процесс для канонической системы второго порядка с представлением решения и производной с помощью первообразных (интегралов) многочленов Чебышёва. Перейдем теперь к решению уравнений (5.47), (5.41), (5.40). Допустим, что мы имеем некоторые приближенные значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$, $i = 1, 2, \dots, k$. Примем эти значения в качестве нулевого приближения неизвестных $a_i^*[\tilde{J}_k]$. Обозначим это приближение через $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, полагая здесь $\nu = 0$,

$i = 1, 2, \ldots, k$. Пользуясь формулами (5.40), (5.41), найдем ν-е приближение для значений $V'(x_0 + \alpha_j h)$, $V(x_0 + \alpha_j h)$:

$$V'^{(\nu)}(x_j^0) = V'^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h) = y'(x_0) + y''(x_0)\alpha_j h + a_1^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] h \big[\Psi_2(\alpha_j) + \alpha_j\big] + \\ + \sum_{i=2}^{k} a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] h \big[\Psi_{i+1}(\alpha_j) - (-1)^i \alpha_j\big], \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{13}$$

$$V^{(\nu)}(x_j^0) = V^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha_j h + y''(x_0)\frac{\alpha_j^2 h^2}{2} + a_1^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] h^2 \Big[\chi_3(\alpha_j) + \frac{\alpha_j^2}{2}\Big] + \\ + \sum_{i=2}^{k} a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] h^2 \Big[\chi_{i+2}(\alpha_j) - (-1)^i \frac{\alpha_j^2}{2}\Big], \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{14}$$

и значения правой части дифференциального уравнения

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j) = f\big(x_j^0, V^{(\nu)}(x_j^0), V'^{(\nu)}(x_j^0)\big). \tag{15}$$

Здесь

$$x_j^0 = x_0 + \alpha_j h, \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{10}$$

где α_j определяются по формуле (5.5). Теперь по формуле (5.47) или, что то же самое, (5.43) находим следующее, $(\nu+1)$-е, приближение коэффициентов Чебышёва правой части дифференциального уравнения (I), а именно:

$$a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \tilde{\Phi}(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j) = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' f\big(x_j^0, V^{(\nu)}(x_j^0), V'^{(\nu)}(x_j^0)\big) T_i^*(\alpha_j), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{16}$$

Дальнейшие приближения для коэффициентов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, $\nu = 2, 3, \ldots$, строятся по такой же схеме с использованием формул (13) – (16) для $\nu = 1, 2, \ldots$. Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно h очередного приближения $V'^{(\nu)}(x_j^0)$, $V^{(\nu)}(x_j^0)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ на единицу. В случае, когда правая часть дифференциального уравнения (I) не зависит от производной, т.е. для уравнения $y'' = f(x, y)$, каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно h очередного приближения $V'^{(\nu)}(x_j^0)$, $V^{(\nu)}(x_j^0)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ на два. При этом порядок точности данных приближений, т.е. порядок разностей между точными и приближенными значениями соответствующих величин, а именно:

$$y(x_j^0) - V^{(\nu)}(x_j^0), \quad y'(x_j^0) - V'^{(\nu)}(x_j^0), \quad a_i^*[\Phi] - a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k],$$

увеличивается до тех пор, пока для $V^{(\nu)}$ и $V'^{(\nu)}$ не будет достигнут максимальный порядок точности решения и производной, равный порядку точности формул (5.41), (5.40). Итерации продолжаются или до достижения максимального порядка точности решения и производной, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

В качестве значений коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ правой части дифференциального уравнения (I)

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\big), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

принимаются значения, полученные на последней выполненной итерации $\nu + 1$, а именно:

$$a_i^*[\Phi] = a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k], \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{17}$$

7.3. Итерационный процесс для нормальной системы с разложением решения в ряд Чебышёва. Описание метода последовательных приближений для нормальной системы (Ia), (IIa) начнем с решения уравнений (6.13), (6.6).

Допустим, что мы имеем некоторые приближенные значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Примем эти значения в качестве нулевого приближения неизвестных $a_i^*[\tilde{J}_k]$. Обозначим это приближение через $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, полагая здесь $\nu = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Определим ν-е приближение коэффициентов Чебышёва $a_i^*[U]$ решения U по формулам (3.11) для $i = 1, 2, \ldots, k+1$ и (3.12) для $i = 0$, а именно:

$$a_i^{*(\nu)}[U] = \frac{h}{4i}\Big(a_{i-1}^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - a_{i+1}^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\Big), \qquad i = 1, 2, \ldots, k+1, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}a_0^{*(\nu)}[U] = y_0 + \frac{h}{4}\Big(a_0^{*(\nu)}[\tilde{J}_k] - \frac{1}{2}a_1^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{k}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]. \tag{19}$$

Входящие в формулу (18) коэффициенты Чебышёва $a_l^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ при $l \geqslant k+1$ полагаются равными нулю.

По найденным значениям коэффициентов Чебышёва вычисляем ν-е приближение для значений $U(x_0+\alpha_j h)$ по формуле (6.6), а именно:

$$U^{(\nu)}(x_j^0) = U^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^{*(\nu)}[U] \cdot T_i^*(\alpha_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{20}$$

и значения правой части дифференциального уравнения (Ia)

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j) = f\big(x_j^0, U^{(\nu)}(x_j^0)\big). \tag{21}$$

Здесь x_j^0 определяются по формуле (10). Теперь по формуле (6.13) или, что то же самое, (6.10) находим следующее, $(\nu+1)$-е, приближение коэффициентов Чебышёва правой части дифференциального уравнения (Ia), а именно:

$$a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}' \tilde{\Phi}(\alpha_j)T_i^*(\alpha_j) = \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}' f\big(x_j^0, U^{(\nu)}(x_j^0)\big)T_i^*(\alpha_j), \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{22}$$

Дальнейшие приближения для коэффициентов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U]$, $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k]$, $\nu = 1, 2, \ldots$, вычисляются по такой же схеме с использованием формул (18)–(22) для $\nu = 1, 2, \ldots$. Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно h очередного приближения $a_i^{*(\nu)}[U]$, $U^{(\nu)}(x_j^0)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ на единицу. При этом порядок точности данных приближений, т.е. порядок разностей между точными и приближенными значениями соответствующих величин, а именно:

$$y(x_j^0) - U^{(\nu)}(x_j^0), \qquad a_i^*[\Phi] - a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k],$$

увеличивается до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения, равный порядку точности формулы (6.6). Итерации продолжаются или до достижения максимального порядка точности решения $U(x_j^0)$, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

В качестве значений коэффициентов Чебышёва $a_i^*[y]$, $a_i^*[\Phi]$ решения $y(x_0+\alpha h)$ задачи Коши (Ia), (IIa) и правой части дифференциального уравнения (Ia)

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\big), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

принимаются значения, полученные на последней выполненной итерации $\nu+1$, а именно:

$$\begin{aligned} a_i^*[y] &= a_i^{*(\nu+1)}[U], \qquad i = 0, 1, \ldots, k+1; \\ a_i^*[\Phi] &= a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k], \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{23}$$

7.4. Итерационный процесс для нормальной системы с представлением решения с помощью первообразных (интегралов) многочленов Чебышёва. Перейдем теперь к решению уравнений (6.30), (6.25). Допустим, что мы имеем некоторые приближенные значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Примем эти значения в качестве нулевого приближения неизвестных $a_i^*[\tilde{J}_k]$. Обозначим это приближение $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, полагая здесь $\nu = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пользуясь формулой (6.25), найдем ν-е приближение для значений $V(x_0+\alpha_j h)$:

$$\begin{aligned} V^{(\nu)}(x_j^0) = V^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j h) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha_j h + a_1^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]h\big[\Psi_2(\alpha_j) + \alpha_j\big] + \\ + \sum_{i=2}^{k} a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]h\big[\Psi_{i+1}(\alpha_j) - (-1)^i\alpha_j\big], \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \end{aligned} \tag{24}$$

и значения правой части дифференциального уравнения (Ia):

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j) = f\big(x_j^0, V^{(\nu)}(x_j^0)\big). \tag{25}$$

Здесь x_j^0 определяется формулой (10). Теперь по формуле (6.30) или, что то же самое, (6.27) находим следующее, $(\nu+1)$-е, приближение коэффициентов Чебышёва правой части дифференциального уравнения (Ia), а именно:

$$a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \tilde{\Phi}(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j) = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' f\bigl(x_j^0, V^{(\nu)}(x_j^0)\bigr) T_i^*(\alpha_j), \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{26}$$

Дальнейшие приближения для коэффициентов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, $\nu = 2, 3, \ldots$, вычисляются по такой же схеме с использованием формул (24)–(26) для $\nu = 1, 2, \ldots$. Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно h очередного приближения $V^{(\nu)}(x_j^0)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$ на единицу. При этом порядок точности данных приближений, т.е. порядок разностей между точными и приближенными значениями соответствующих величин, а именно:

$$y(x_j^0) - V^{(\nu)}(x_j^0), \quad a_i^*[\Phi] - a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k],$$

увеличивается до тех пор, пока для $V^{(\nu)}$ не будет достигнут максимальный порядок точности решения, равный порядку точности формулы (6.25). Итерации продолжаются или до достижения максимального порядка точности решения $V(x_j^0)$, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

В качестве значений коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ правой части дифференциального уравнения (Ia)

$$\Phi(\alpha) = f\bigl(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\bigr), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

принимаются значения, полученные на последней выполненной итерации $\nu + 1$, а именно:

$$a_i^*[\Phi] = a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{J}_k], \qquad i = 1, 2 \ldots, k. \tag{27}$$

8. Сходимость вертикального итерационного процесса. Рассмотрим условия сходимости метода последовательных приближений в случае, когда интегрируется каноническая система M обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (I), (II). Изложение начнем с решения уравнений (5.25), (5.15), (5.17).

Уравнение (5.25), которому удовлетворяют коэффициенты Чебышёва $a_i^*[\tilde{J}_k]$, запишем в виде

$$a_i^*[\tilde{J}_k] = \varphi_i\left(a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\right), \qquad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{1}$$

где $\varphi_i\bigl(a_0^*[\tilde{J}_k], a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\bigr)$ — правая часть (5.25). Обозначим l-ю компоненту вектор-функции φ_i через φ_{li}, а n-ю компоненту вектора $a_m^*[\tilde{J}_k]$ через a_{nm}. Найдем частную производную $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, $i, m = 0, 1, \ldots, k$, $l, n = 1, 2, \ldots, M$ (для сокращения записи коэффициенты Чебышёва $a_0^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]$ в качестве аргументов функций U и U' указывать не будем):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \Bigl[\sum_{r=1}^{M} \frac{\partial f_l\bigl(x_0 + \alpha_j h, U(x_0 + \alpha_j h), U'(x_0 + \alpha_j h)\bigr)}{\partial y_r} \frac{\partial U_r(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_{nm}} + \\ + \sum_{r=1}^{M} \frac{\partial f_l\bigl(x_0 + \alpha_j h, U(x_0 + \alpha_j h), U'(x_0 + \alpha_j h)\bigr)}{\partial y'_r} \frac{\partial U'_r(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_{nm}}\Bigr] T_i^*(\alpha_j).\end{aligned} \tag{2}$$

Каждая компонента векторов U и U' зависит только от одноименных компонент вектора $a_m^*[\tilde{J}_k]$. Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \Bigl[\frac{\partial f_l\bigl(x_0 + \alpha_j h, U(x_0 + \alpha_j h), U'(x_0 + \alpha_j h)\bigr)}{\partial y_n} \frac{\partial U_n(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_{nm}} + \\ + \frac{\partial f_l\bigl(x_0 + \alpha_j h, U(x_0 + \alpha_j h), U'(x_0 + \alpha_j h)\bigr)}{\partial y'_n} \frac{\partial U'_n(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_{nm}}\Bigr] T_i^*(\alpha_j).\end{aligned} \tag{3}$$

Как следует из формул (1.22), (1.23), (1.24), (1.25), выражение для частной производной $\dfrac{\partial U_n(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_{nm}}$ содержит множитель h^2. Из формул (1.19), (1.20) также вытекает, что выражение для частной производной $\dfrac{\partial U'_n(x_0 + \alpha_j h)}{\partial a_{nm}}$ содержит множитель h. Следовательно, все слагаемые, входящие в выражение (3) для частной производной $\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, содержат множители h или h^2. При этом остальные сомножители во всех этих слагаемых являются ограниченными функциями. Поэтому, выбрав малую величину шага интегрирования h, можно обеспечить выполнение достаточного условия сходимости метода итераций (7.11), (7.7), (7.8). Если ввести в рассмотрение матрицу Q, составленную из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей найденных выше частных производных

$$\max\left|\frac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|,$$

то достаточным условием для сходимости метода итераций является условие, что какая-нибудь норма матрицы Q меньше единицы (см. гл. 7, § 5, п. 1 в [9] или см. гл. VI, § 3, теорему на стр.269, а также главу VII, § 1, теорему и формулу (9) в [10]), например:

$$\|Q\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{M(k+1)} Q_{ij} < 1, \tag{4}$$

$$\|Q\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{M(k+1)} Q_{ij} < 1, \tag{5}$$

$$\|Q\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \leqslant \sum_{i,j=1}^{M(k+1)} Q_{ij}^2 < 1, \tag{6}$$

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $Q \cdot Q^T$. Таким образом, при значениях шага интегрирования, удовлетворяющих какому-либо из условий (4) – (6), последовательные приближения $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, определяемые по (7.11), (7.7), (7.8), будут при $\nu \to \infty$ сходиться к решению уравнения (5.25).

Перейдем к решению уравнений (5.47), (5.40), (5.41). Запишем (5.47) в виде

$$a_i^*[\tilde{J}_k] = \varphi_i\left(a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{7}$$

где $\varphi_i\big(a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]\big)$ — правая часть (5.47). Найдем частную производную l-й компоненты вектор-функции φ_i по n-й компоненте вектора $a_m^*[\tilde{J}_k]$, обозначая ее $\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, $i, m = 1, 2, \ldots, k$, $l, n = 1, 2, \ldots, M$ (для сокращения записи коэффициенты Чебышёва $a_1^*[\tilde{J}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{J}_k]$ в качестве аргументов функций V и V' указывать не будем):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' \Big[\sum_{r=1}^{M} \frac{\partial f_l\big(x_0+\alpha_j h, V(x_0+\alpha_j h), V'(x_0+\alpha_j h)\big)}{\partial y_r}\frac{\partial V_r(x_0+\alpha_j h)}{\partial a_{nm}} +{}\\ + \sum_{r=1}^{M} \frac{\partial f_l\big(x_0+\alpha_j h, V(x_0+\alpha_j h), V'(x_0+\alpha_j h)\big)}{\partial y'_r}\frac{\partial V'_r(x_0+\alpha_j h)}{\partial a_{nm}}\Big] T_i^*(\alpha_j).\end{aligned} \tag{8}$$

Каждая компонента векторов V и V' зависит от одноименных компонент вектора $a_m^*[\tilde{J}_k]$. Поэтому, учитывая (5.40), (5.41), имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' \Big[\frac{\partial f_l\big(x_0+\alpha_j h, V(x_0+\alpha_j h), V'(x_0+\alpha_j h)\big)}{\partial y_n} h^2\Big(\chi_{m+2}(\alpha_j) - (-1)^m\frac{\alpha_j^2}{2}\Big) +{}\\ + \frac{\partial f_l\big(x_0+\alpha_j h, V(x_0+\alpha_j h), V'(x_0+\alpha_j h)\big)}{\partial y'_n} h\big(\Psi_{m+1}(\alpha_j) - (-1)^m\alpha_j\big)\Big] T_i^*(\alpha_j).\end{aligned} \tag{9}$$

Как следует из (9), все слагаемые, входящие в выражение для частной производной $\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, содержат множители h или h^2. При этом остальные сомножители во всех этих слагаемых являются ограниченными функциями. Поэтому, выбрав малую величину шага интегрирования h, можно обеспечить выполнение достаточного условия сходимости метода итераций (7.16), (7.13), (7.14):

$$\|Q\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{Mk} Q_{ij} < 1, \tag{10}$$

$$\|Q\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{Mk} Q_{ij} < 1, \tag{11}$$

$$\|Q\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \leqslant \sum_{i,j=1}^{Mk} Q_{ij}^2 < 1. \tag{12}$$

При значениях шага интегрирования h, удовлетворяющих какому-либо из условий (10) – (12), последовательные приближения $a_i^{*(\nu)}[\tilde{J}_k]$, определяемые по (7.16), (7.13), (7.14), при $\nu \to \infty$ сходятся к решению уравнения (5.47).

Аналогично доказывается сходимость итерационного метода в случае, когда интегрируется нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений (Ia), (IIa). Последовательные приближения, вычисляемые с помощью формул (7.22), (7.20), будут при $\nu \to \infty$ сходиться к решению уравнения (6.13). Последовательные приближения, вычисляемые по формулам (7.26), (7.24), сходятся к решению уравнения (6.30).

9. Приближенное вычисление решения задачи Коши и его производной на одном шаге интегрирования. По найденным значениям коэффициентов Чебышёва $a_i^*[y'(x_0+\alpha h)]$, $a_i^*[y(x_0+\alpha h)]$ (см. (7.12)) частичные суммы рядов Чебышёва

$$y'(x_0+\alpha h) \approx U'(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[y'] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{1}$$

$$y(x_0+\alpha h) \approx U(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+2}}' a_i^*[y] \cdot T_i^*(\alpha) \tag{2}$$

дадут приближенные значения производной решения и решения задачи Коши (I), (II) в любой точке $x = x_0 + \alpha h$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $x \leqslant x_0 + h$. В частности, в конце отрезка $[x_0, x_0+h]$ значения производной и решения могут быть найдены по формулам:

$$y'(x_0+h) = y'(x_1) \approx U'(x_1) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[y'], \tag{3}$$

$$y(x_0+h) = y(x_1) \approx U(x_1) = {\sum_{i=0}^{k+2}}' a_i^*[y]. \tag{4}$$

Решение задачи Коши (I), (II) и его производная могут быть получены также и без применения их коэффициентов Чебышёва. Для этого необходимо воспользоваться представлениями решения и производной через первообразные (интегралы) многочленов Чебышёва (см., например, (5.40), (5.41) или (2.12), (2.16)). Используя найденные приближенные значения коэффициентов Чебышёва правой части дифференциального уравнения $a_i^*[\Phi]$ (см. (7.17)), имеем:

$$y'(x) \approx V'(x) = V'(x_0+\alpha h) = y'(x_0) + y''(x_0)\alpha h + a_1^*[\Phi]h[\Psi_2(\alpha)+\alpha] + \sum_{i=2}^{k} a_i^*[\Phi]h\big[\Psi_{i+1}(\alpha) - (-1)^i\alpha\big], \tag{5}$$

$$\begin{aligned} y(x) \approx V(x) = V(x_0+\alpha h) = y(x_0) + y'(x_0)\alpha h + y''(x_0)\frac{\alpha^2h^2}{2} + a_1^*[\Phi]h^2\Big[\chi_3(\alpha) + \frac{\alpha^2}{2}\Big] + \\ + \sum_{i=2}^{k} a_i^*[\Phi]h^2\Big[\chi_{i+2}(\alpha) - (-1)^i\frac{\alpha^2}{2}\Big]. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\Psi_j(\alpha)$ определяются по формулам (2.1), (2.3) – (2.5), а $\chi_j(\alpha)$ — по формулам (2.17), (2.20) – (2.22).

Заметим, что

$$\text{а)}\ \ \Psi_1(1)=1,\qquad \Psi_2(1)=0,\qquad \Psi_2(1)+1=1; \tag{7a}$$

$$\text{б)}\ \ \Psi_{i+1}(1)=-\frac{1}{i^2-1},\qquad \Psi_{i+1}(1)-1=-\frac{i^2}{i^2-1},\qquad \text{если}\ \ i\ \text{четное},\quad i>1; \tag{7б}$$

$$\text{в)}\ \ \Psi_{i+1}(1)=0,\qquad \Psi_{i+1}(1)+1=1,\qquad \text{если}\ \ i\ \text{нечетное},\quad i>1; \tag{7в}$$

а также

$$\text{г)}\ \ \chi_3(1)=-\frac{1}{6},\qquad \chi_4(1)=-\frac{1}{6},\qquad \chi_3(1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{3},\qquad \chi_4(1)-\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}; \tag{7г}$$

$$\text{д)}\ \ \chi_{i+2}(1)=-\frac{1}{2(i^2-1)},\qquad \text{если}\ \ i\ \text{четное},\quad i>2; \tag{7д}$$

$$\text{е)}\ \ \chi_{i+2}(1)=\frac{1}{2(i^2-4)},\qquad \text{если}\ \ i\ \text{нечетное},\quad i>2. \tag{7е}$$

Отсюда, в частности, вытекают следующие выражения для значений решения и его производной в конце отрезка $[x_0, x_0+h]$:

$$y'(x_0+h)=y'(x_1)\approx V'(x_1)=y'(x_0)+y''(x_0)h+a_1^*[\Phi]h-a_2^*[\Phi]h\Big(\frac{1}{2^2-1}+1\Big)+$$
$$+a_3^*[\Phi]h-a_4^*[\Phi]h\Big(\frac{1}{4^2-1}+1\Big)+a_5^*[\Phi]h-\cdots\ ,$$

или

$$y'(x_0+h)\approx V'(x_1)=y'(x_0)+y''(x_0)h+h\sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\Big[a_{2i-1}^*[\Phi]-a_{2i}^*[\Phi]\Big(\frac{1}{4i^2-1}+1\Big)\Big]+k(\mathrm{mod}\ 2)\cdot a_k^*[\Phi]h, \tag{8}$$

$$y(x_0+h)=y(x_1)\approx V(x_1)=y(x_0)+y'(x_0)h+y''(x_0)\frac{h^2}{2}+a_1^*[\Phi]h^2\cdot\frac{1}{3}-a_2^*[\Phi]h^2\cdot\frac{2}{3}+$$
$$+a_3^*[\Phi]h^2\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3^2-4}+1\Big)-a_4^*[\Phi]h^2\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4^2-1}+1\Big)+\cdots\ ,$$

или

$$\begin{aligned}y(x_0+h)\approx V(x_1)&=y(x_0)+y'(x_0)h+\frac{1}{2}y''(x_0)h^2+\frac{1}{3}a_1^*[\Phi]h^2-\frac{2}{3}a_2^*[\Phi]h^2+\\&+h^2\sum_{i=2}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\Big[a_{2i-1}^*[\Phi]\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(2i-1)^2-4}+1\Big)-a_{2i}^*[\Phi]\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4i^2-1}+1\Big)\Big]+\\&+k(\mathrm{mod}\ 2)\cdot a_k^*[\Phi]h^2\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k^2-4}+1\Big).\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$k(\mathrm{mod}\ 2)=2\Big\{\frac{k}{2}\Big\}=k-2\Big[\frac{k}{2}\Big],\qquad w=[w]+\{w\}.$$

При этом погрешность приближенного значения производной $U'(x_0+h)$, $V'(x_0+h)$ есть $O(h^{k+2})$, а погрешность приближенного значения решения $U(x_0+h)$, $V(x_0+h)$ — $O(h^{k+3})$.

Если решается задача Коши для нормальной системы (Ia), (IIa), то с помощью найденных по формулам (7.23) и (7.27) коэффициентов Чебышёва $a_i^*[y]$, $a_i^*[\Phi]$ приближенное значение решения можно выразить следующим образом:

$$y(x)\approx U(x)=U(x_0+\alpha h)={\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[y]\cdot T_i^*(\alpha) \tag{10}$$

и

$$y(x)\approx V(x)=V(x_0+\alpha h)=y(x_0)+y'(x_0)\alpha h+a_1^*[\Phi]h\big[\Psi_2(\alpha)+\alpha\big]+\sum_{i=2}^{k}a_i^*[\Phi]h\big[\Psi_{i+1}(\alpha)-(-1)^i\alpha\big] \tag{11}$$

(см., например, (6.25)). В частности,

$$y(x_0 + h) = y(x_1) \approx U(x_1) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[y] \tag{12}$$

и

$$y(x_0+h) = y(x_1) \approx V(x_1) = y(x_0)+y'(x_0)h+h \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left[a_{2i-1}^*[\Phi] - a_{2i}^*[\Phi]\left(\frac{1}{4i^2-1}+1\right)\right] + k(\mathrm{mod}\ 2)\cdot a_k^*[\Phi]h. \tag{13}$$

Погрешность приближенного значения решения $U(x_0 + h)$, $V(x_0 + h)$ есть $O(h^{k+2})$.

Так как коэффициенты Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ определяются приближенно с помощью приведенного выше итерационного процесса (см. п. 7), то указанные здесь оценки погрешности решения и производной будут справедливы тогда, когда погрешности вычисления коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ имеют достаточный для этого порядок относительно h.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф.* Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе локальных многочленных приближений // Вычислительные методы и программирование. 2000. **1**. 30–63.
2. *Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф.* О построении многочленных приближений при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**, № 1. 60–68.
3. *Люстерник Л.А., Червоненкис О.А., Янпольский А.Р.* Математический анализ. Вычисление элементарных функций. М.: Физматгиз, 1963.
4. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.
5. *Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф.* Формула численного интегрирования Маркова и ее применение в ортогональных разложениях // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**, № 2. 44–70.
6. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
7. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Начальный курс. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
8. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
9. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1, Т. 2. М.: Физматгиз, 1962.
10. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию
10.01.2002