УДК 517.988

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СТЕПЕННОЙ СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Ю. Кокурин[1], В. В. Ключев[1]

В банаховом пространстве исследуется скорость сходимости класса итерационных методов решения нелинейных некорректных уравнений с операторами, обладающими секториальными производными. Установлено, что условие степенной истокопредставимости начальной невязки с произвольным показателем, достаточное для выполнения степенных оценок скорости сходимости с тем же показателем, близко к необходимому и не может быть существенно ослаблено.

Ключевые слова: нелинейный оператор, дифференцируемый оператор, операторное уравнение, банахово пространство, итерационные методы, условие истокопредставимости, скорость сходимости.

1. Рассматривается нелинейное уравнение

$$F(x) = 0, \quad x \in X, \tag{1}$$

где оператор F действует из банахова пространства X в X. Предполагается, что уравнение (1) имеет решение x^*, возможно не единственное, оператор F дважды дифференцируем по Гато и выполняются условия

$$\big\|F'(x)\big\| \leqslant N_1, \quad \big\|F''(x)\big\| \leqslant N_2 \quad \forall x \in \Omega_R, \quad \Omega_R = \big\{x \in X : \|x - x^*\| \leqslant R\big\}, \quad R > 0. \tag{2}$$

Здесь и всюду в работе $\|\cdot\|$ обозначает норму соответствующего пространства. Непрерывная обратимость линейного оператора $F'(x)$ не предполагается, так что в общем случае уравнение (1) относится к классу нерегулярных (некорректных) [1, 2]. Эффективная численная аппроксимация решений таких уравнений предполагает использование специально разработанных для этих целей методов регуляризации.

Для случая уравнения (1) с аффинным оператором $F(x) = Ax - f$, $A \in L(X)$, в [2, 3] введена и исследована следующая общая схема аппроксимации решения x^* в условиях точных данных:

$$x^{(\alpha)} = \big(E - \Theta(A,\alpha)A\big)\xi + \Theta(A,\alpha)f, \quad \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{3}$$

Здесь ξ — начальное приближение к x^*, α — параметр регуляризации, определяющий точность аппроксимации, так что $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|x^{(\alpha)} - x^*\| = 0$. Порождающая функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ предполагается аналитической по λ при $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Аналитические функции от операторов в (3) и далее в статье понимаются в смысле операторного исчисления Рисса–Данфорда [4, гл. XI].

На базе схемы (3) в [5, 6] построен широкий класс итерационных методов аппроксимации решения уравнения (1) с произвольным гладким нелинейным оператором. В основе конструкции методов этого класса лежит переход от (1) к уравнению

$$F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n) = 0, \quad x \in X, \tag{4}$$

линеаризующему (1) в текущей итерационной точке x_n. В случае непрерывно обратимого оператора $F'(x)$ уравнение (4) определяет классический итерационный процесс Ньютона–Канторовича

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n),$$

который обладает высокой скоростью сходимости в окрестности x^* [7, гл. XVIII]. Однако в условиях настоящей работы ни разрешимость, ни устойчивость решения уравнения (4) к вычислительным погрешностям и погрешностям в задании $F(x)$ не могут быть гарантированы. Применяя к уравнению (4) схему

[1] Марийский государственный университет, физико-математический факультет, пр. Ленина, 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kokurin@marsu.ru

аппроксимации (3) с $\alpha = \alpha_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, и выбирая полученное приближение к решению (4) в качестве следующего приближения в задаче (1), так что $x^{(\alpha_n)} = x_{n+1}$, получаем итерационный процесс

$$x_0 \in X, \quad x_{n+1} = \xi - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big)\big(F(x_n) - F'(x_n)(x_n - \xi)\big). \tag{5}$$

В случае приближенно заданного оператора $F(x)$ на базе схемы (5) строятся алгоритмы регуляризации, позволяющие получать приближения к решению (1), адекватные погрешностям в задании $F(x)$ [5, 6]. При доказательстве сходимости и исследовании скорости сходимости процессов вида (5) на искомое решение x^* обычно налагается условие истокообразной представимости начальной невязки вида

$$x^* - \xi = F'(x^*)^p v, \quad v \in X, \quad p \geqslant 1. \tag{6}$$

Для широкого класса порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$ процесс (5) вырабатывает приближения x_n, сходящиеся к x^* со степенной скоростью относительно параметра регуляризации α_n с тем же показателем p, что и в (6) (см. [5, 6]):

$$\|x_n - x^*\| \leqslant C_1 \alpha_n^p. \tag{7}$$

Здесь и далее в статье $C_1, C_2, \ldots$ — положительные абсолютные константы. Примечательно, что условие (6), достаточное для выполнения оценки (7), в ряде случаев оказывается близким к необходимому в том смысле, что оценка (7) влечет представление

$$x^* - \xi \in R\big(F'(x^*)^{p-\varepsilon}\big) \quad \forall \varepsilon \in (0, p). \tag{8}$$

Последнее имеет место, в частности, для процедур (5), порождающие функции которых в линейном случае (см. (3)) ассоциируются с методом М. М. Лаврентьева, итерированным методом М. М. Лаврентьева и методом установления [5, 6].

Наряду с процедурами, допускающими непрерывное изменение параметра регуляризации α на интервале $(0, \alpha_0]$, в общую схему (3) вкладывается и класс итерационных процессов

$$x^0 = \xi; \quad x^{k+1} = x^k - g(A)(Ax^k - f), \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{9}$$

порождающие функции которых имеют вид

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \lambda^{-1}\Big(1 - \big(1 - \lambda g(\lambda)\big)^{1/\alpha}\Big), & \lambda \neq 0, \\ g(0)/\alpha, & \lambda = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $g(\lambda)$ — аналитическая функция. Параметр регуляризации α в (10) принимает дискретное множество значений $\alpha = \alpha_n = 1/n$, $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$, так что в обозначениях (3) $x^{(\alpha_n)} = x^n$.

Применение схемы (9), (10) к линеаризованному уравнению (4) приводит к следующему классу итерационных процессов решения (1):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n+1}^n, \\ x_{n+1}^{k+1} &= x_{n+1}^k - g\big(F'(x_n)\big)\big(F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1}^k - x_n)\big), \\ x_{n+1}^0 &= \xi, \quad k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{11}$$

Скорость сходимости последовательности $\{x_n\}$, определяемой процессом (11), является основным предметом исследования в настоящей работе. Известно [5, 8], что представление (6) при подходящих условиях на оператор $F'(x^*)$ и функцию $g(\lambda)$ влечет аналогичную (7) степенную оценку скорости сходимости итераций (11):

$$\|x_n - x^*\| \leqslant l_0 n^{-p}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{12}$$

Целью работы является изучение необходимости условия (6) для выполнения оценки (12). Устанавливается, что это условие близко к необходимому в указанном выше смысле, так что оценка (12) при наличии представления (6) не может быть существенно улучшена.

2. В дальнейшем, следуя [2, 3, 5], будем предполагать, что оператор $F'(x^*)$ удовлетворяет следующему условию секториальности.

Условие 1. Для некоторого $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ имеет место включение

$$\sigma\big(F'(x^*)\big) \subset K(\varphi_0), \quad K(\varphi_0) = \big\{\lambda \in \mathbf{C} : |\arg \lambda| < \varphi_0\big\} \cup \{0\},$$

и оценка

$$\left\|R\bigl(\lambda, F'(x^*)\bigr)\right\| \leqslant \frac{C_3}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \backslash K(\varphi_0). \tag{13}$$

Здесь и далее через $\sigma(A)$ и $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ обозначаются соответственно спектр и резольвента оператора A. Выбрав произвольно $R_0 > \left\|F'(x^*)\right\|$, обозначим $K(R_0, \varphi_0) = K(\varphi_0) \cap S(R_0)$, где $S(r) = \bigl\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leqslant r\bigr\}$. При этом справедливо включение $\sigma\bigl(F'(x^*)\bigr) \subset K(R_0, \varphi_0)$, и оценка (13) имеет место для всех $\lambda \in \mathbf{C} \backslash K(R_0, \varphi_0)$. О примерах линейных операторов, удовлетворяющих условию 1, см., например, в [3].

Напомним, что в рамках операторного исчисления Рисса–Данфорда функция $\varphi(A)$ линейного непрерывного оператора A определяется интегралом Бохнера

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \varphi(\lambda) R(\lambda, A)\, d\lambda. \tag{14}$$

Предполагается, что функция $\varphi(\lambda)$ аналитична в открытой окрестности D спектра $\sigma(A)$, контур γ, проходимый в положительном направлении, лежит в D и содержит внутри спектр $\sigma(A)$.

Обозначим $K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0) = K(R_0, \varphi_0) \cup S\bigl(\min\{d_0\alpha, \alpha_0\}\bigr)$, где $d_0 \in (0,1)$, $\alpha_0 \in (0, R_0)$ — фиксированные константы. Через γ_α будем обозначать границу множества $K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0)$. Определим следующие условия на функцию $g(\lambda)$, характеризующие рассматриваемую группу итерационных процессов (11).

Условие 2. Функция $g(\lambda)$ аналитична в открытой окрестности множества $K_{\alpha_0}(R_0, d_0, \varphi_0)$.

Условие 3. Существует постоянная $\omega_0 \in (0, R_0^{-1})$ такая, что

$$0 < \bigl|1 - g(\lambda)\lambda\bigr| \leqslant 1 - \omega_0|\lambda| \quad \forall \lambda \in K(R_0, \varphi_0). \tag{15}$$

Условие 2 гарантирует конечность величины $N_0 = \sup\limits_{\lambda \in K_{\alpha_0}(R_0, d_0, \varphi_0)} \bigl|g(\lambda)\bigr|$. Условия 1, 2 означают, что в представлении (14) для оператора $g(A)$ в качестве γ можно выбирать контур γ_α при $\alpha > 0$.

Следуя [9; 10, с. 156], для $p \in (0,1)$ по определению полагаем

$$A^p = \frac{\sin \pi p}{\pi} \int\limits_0^\infty t^{p-1}(tE + A)^{-1} A\, dt. \tag{16}$$

Если же $p \in (n, n+1)$, где $n \in \mathbf{N}$, принимаем $A^p = A^{p-n}A^n \equiv A^n A^{p-n}$.

Рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4.1 из [5], приводят к следующей оценке скорости сходимости процесса (11).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1–3. *Тогда для любого* $\nu_0 \in (0,1)$ *существуют такие постоянные* l_0, m_0,

$$0 < l_0 \leqslant \min\bigl\{R, \nu_0 d_0/(N_2 C_3)\bigr\}, \quad m_0 > 0, \tag{17}$$

что если выполняется истокообразное представление (6) *и*

$$\|x_0 - x^*\| \leqslant l_0, \quad \|v\| \leqslant m_0,$$

то для вырабатываемых согласно (11) *приближений* $\{x_n\}$ *справедлива оценка* (12).

3. Перейдем к исследованию необходимости представления (6) для выполнения оценки скорости сходимости (12). Ниже будет установлено, что при соответствующих условиях на порождающую функцию $g(\lambda)$ в (11) оценка (12) влечет включение (8).

Предположим, что выполняются условия 1–3, соотношение (17) и оценка (12). В [5] установлено, что (12) совместно с (17) обеспечивают включение $\sigma\bigl(F'(x_n)\bigr) \subset \operatorname{int} K_{\alpha_n}(R_0, d_0, \varphi_0)$, $n \in \mathbf{N}$. При этом $\gamma_{\alpha_n} \subset K_{\alpha_0}(R_0, d_0, \varphi_0)$, $n \in \mathbf{N}$, так что для оператора $g\bigl(F'(x_n)\bigr)$ справедливо представление (14) с $\gamma = \gamma_{\alpha_n}$, $n \in \mathbf{N}$.

В силу (5),

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* = &-\Theta\bigl(F'(x_n), \alpha_n\bigr)G(x_n) - \Bigl[E - \Theta\bigl(F'(x^*), \alpha_n\bigr)F'(x^*)\Bigr](x^* - \xi) - \\ &- \Bigl[\Theta\bigl(F'(x^*), \alpha_n\bigr)F'(x^*) - \Theta\bigl(F'(x_n), \alpha_n\bigr)F'(x_n)\Bigr](x^* - \xi), \end{aligned} \tag{18}$$

где $G(x_n) = F(x_n) + F'(x_n)(x^* - x_n)$, функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ определена в (10), $\alpha_n = n^{-1}$. Из (18) следует

$$\begin{aligned} \Big\| \Big[E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big) F'(x^*) \Big] (x^* - \xi) \Big\| \leqslant \|x_{n+1} - x^*\| + \Big\| \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big) \Big\| \big\| G(x_n) \big\| + \\ + \Big\| \Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big) F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big) F'(x_n) \Big] (x^* - \xi) \Big\|. \end{aligned} \tag{19}$$

Оценим по отдельности слагаемые в правой части соотношения (19). На основании (14) имеем

$$\Big\| \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big) \Big\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_{\alpha_n}} \big|\Theta(\lambda, \alpha_n)\big| \Big\| R\big(\lambda, F'(x_n)\big) \Big\| \, |d\lambda|.$$

Соотношения (2), (12), (13), (17) дают

$$\big\| F'(x_n) - F'(x^*) \big\| \Big\| R\big(\lambda, F'(x^*)\big) \Big\| \leqslant \nu_0 < 1,$$

поэтому в силу леммы из [11, с. 141] (см. также лемму 5.1 в [3]) для любого $\lambda \in \gamma_{\alpha_n}$ выполняется

$$\Big\| R\big(\lambda, F'(x_n)\big) \Big\| \leqslant \Big\| R\big(\lambda, F'(x^*)\big) \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\big\| F'(x_n) - F'(x^*) \big\| \Big\| R\big(\lambda, F'(x^*)\big) \Big\| \Big)^k.$$

Используя (13) и два последних соотношения, получаем

$$\Big\| R\big(\lambda, F'(x_n)\big) \Big\| \leqslant \frac{\Big\| R\big(\lambda, F'(x^*)\big) \Big\|}{1 - \nu_0} \leqslant \frac{C_3}{(1 - \nu_0)|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \gamma_{\alpha_n}.$$

Следовательно,

$$\Big\| \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big) \Big\| \leqslant \frac{C_3}{2\pi(1 - \nu_0)} \int\limits_{\gamma_{\alpha_n}} \frac{\big|\Theta(\lambda, \alpha_n)\big|}{|\lambda|} \, |d\lambda|. \tag{20}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha^{(1)} &= \big\{ \lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = \min\{d_0 \alpha, \alpha_0\}, \quad \varphi_0 \leqslant |\arg \lambda| \leqslant \pi \big\}, \\ \gamma_\alpha^{(2)} &= \big\{ \lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = R_0, \quad |\arg \lambda| \leqslant \varphi_0 \big\}, \\ \gamma_\alpha^{(3)} &= \big\{ \lambda \in \mathbf{C} : \min\{d_0 \alpha, \alpha_0\} \leqslant |\lambda| \leqslant R_0, \quad \arg \lambda = \varphi_0 \big\}, \\ \gamma_\alpha^{(4)} &= \big\{ \lambda \in \mathbf{C} : \min\{d_0 \alpha, \alpha_0\} \leqslant |\lambda| \leqslant R_0, \quad \arg \lambda = -\varphi_0 \big\}, \end{aligned}$$

так что $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^{(1)} \cup \gamma_\alpha^{(2)} \cup \gamma_\alpha^{(3)} \cup \gamma_\alpha^{(4)}$, $\alpha > 0$.

Имеет место

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* 2, 3. *Тогда*

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \left(\alpha \int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{\big|\Theta(\lambda, \alpha)\big|}{|\lambda|} \, |d\lambda| \right) < \infty, \tag{21}$$

где функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ *определена в* (10).

Доказательство. В силу условия 2 имеем оценку $\big|1 - g(\lambda)\lambda\big|^{1/\alpha} \leqslant e^{d_0 N_0}$ для всех $\lambda \in \gamma_\alpha^{(1)}$ и $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Согласно условию 3, $\big|1 - g(\lambda)\lambda\big|^{1/\alpha} < 1$ для всех $\lambda \in \gamma_\alpha^{(i)}$, $\forall i \in \{2, 3, 4\}$ и $\forall \alpha \in (0, \alpha_0]$, поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \left(\alpha \int_{\gamma_\alpha} \frac{\big|\Theta(\lambda, \alpha)\big|}{|\lambda|} \, |d\lambda| \right) = \sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \left(\alpha \int_{\gamma_\alpha} \frac{\Big|1 - \big(1 - g(\lambda)\lambda\big)^{1/\alpha}\Big|}{|\lambda|^2} \, |d\lambda| \right) \leqslant \\ \leqslant \big(1 + e^{d_0 N_0}\big) \sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \left(\alpha \int_{\gamma_\alpha} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^2} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из (2) с учетом неравенств из [12, гл. X, § 1] следует оценка

$$\big\|G(x_n)\big\| \leqslant N_2 \|x_n - x^*\|^2. \tag{22}$$

В силу соотношений (12), (20) – (22) имеем

$$\|x_{n+1} - x^*\| + \Big\|\Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big)\Big\| \big\|G(x_n)\big\| \leqslant C_4 \alpha_n^p. \tag{23}$$

Третье слагаемое в правой части (19) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big)F'(x_n)\Big](x^* - \xi)\Big\| = \\ &= \bigg\|\bigg[\Big(E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*)\Big) - \Big(E - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big)F'(x_n)\Big)\bigg](x^* - \xi)\bigg\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\, \|x^* - \xi\| \int\limits_{\gamma_{\alpha_n}} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda\big| \Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'(x_n)\big)\Big\|\, |d\lambda|. \end{aligned} \tag{24}$$

В силу упомянутой выше леммы из [11, с. 141; 3],

$$\begin{aligned} \Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big) - R\big(\lambda, F'(x_n)\big)\Big\| &\leqslant \frac{\Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\| \big\|F'(x_n) - F'(x^*)\big\|}{1 - \Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\| \Big\|F'(x_n) - F'(x^*)\Big\|} \Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{C_5 \|x_n - x^*\|}{|\lambda|^2} \leqslant \frac{C_6 \alpha_n^{p-1}}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \gamma_{\alpha_n}. \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь при выводе было использовано соотношение (12) и неравенство $|\lambda| \geqslant \min\{d_0\alpha_n, \alpha_0\}$ для всех $\lambda \in \gamma_{\alpha_n}$. Оценку интеграла в правой части (24) завершим с использованием следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия 2, 3. Тогда для любого $\tau \geqslant 0$ имеет место оценка*

$$\int\limits_{\gamma_\alpha} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda\big| |\lambda|^{\tau - 1}\, |d\lambda| \leqslant C_7 \alpha^\tau \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{26}$$

где $C_7 = C_7(\tau)$, а функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ определена в (10).

Доказательство. Согласно (10),

$$\int\limits_{\gamma_\alpha} \big|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda\big| |\lambda|^{\tau - 1}\, |d\lambda| = \int\limits_{\gamma_\alpha} \big|1 - g(\lambda)\lambda\big|^{1/\alpha} |\lambda|^{\tau - 1}\, |d\lambda|.$$

Оценим отдельно интегралы по участкам $\gamma_\alpha^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, контура γ_α. Используя условие 2, получаем

$$\int\limits_{\gamma_\alpha^{(1)}} \big|1 - g(\lambda)\lambda\big|^{1/\alpha} |\lambda|^{\tau - 1}\, |d\lambda| \leqslant e^{d_0 N_0} d_0^{\tau - 1} \alpha^{\tau - 1} \int\limits_{\gamma_\alpha^{(1)}} |d\lambda| = 2(\pi - \varphi_0) d_0^\tau e^{d_0 N_0} \alpha^\tau.$$

В силу условия 3, при $\alpha \in (0, \alpha_0]$ справедливы оценки

$$\int\limits_{\gamma_\alpha^{(2)}} \big|1 - g(\lambda)\lambda\big|^{1/\alpha} |\lambda|^{\tau - 1}\, |d\lambda| \leqslant (1 - \omega R_0)^{1/\alpha} 2\varphi_0 R_0^\tau \leqslant C_8 \alpha^\tau,$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma_\alpha^{(3)}} \big|1 - g(\lambda)\lambda\big|^{1/\alpha} |\lambda|^{\tau - 1}\, |d\lambda| &\leqslant \int\limits_{d_0\alpha}^{R_0} \big(1 - \omega|\lambda|\big)^{1/\alpha} |\lambda|^{\tau - 1}\, d|\lambda| \leqslant \\ &\leqslant \alpha^\tau \int\limits_{d_0}^{\infty} (1 - \omega\alpha t)^{1/\alpha} t^{\tau - 1}\, dt \leqslant \alpha^\tau \int\limits_{d_0}^{\infty} e^{-\omega t} t^{\tau - 1}\, dt \leqslant C_9 \alpha^\tau. \end{aligned}$$

Аналогично последнему неравенству оценивается интеграл по отрезку $\gamma_\alpha^{(4)}$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Лемма доказана.

Из соотношений (24), (25) и (26) (при $\tau = 0$) следует

$$\left\|\Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x_n), \alpha_n\big)F'(x_n)\Big](x^* - \xi)\right\| \leqslant C_{10}\alpha_n^{p-1}. \tag{27}$$

Для произвольного $\alpha > 0$ обозначим

$$y_\alpha = \Big[E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha\big)F'(x^*)\Big](x^* - \xi), \quad \Phi(\alpha) = \|y_\alpha\|. \tag{28}$$

Отметим, что равенство (10) определяет функцию $\Theta(\cdot, \alpha)$ для любого $\alpha > 0$. Объединяя оценки (19), (23) и (27), с учетом (28) заключаем, что

$$\Phi(\alpha_n) \leqslant C_{11}\alpha_n^{p-1} \quad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{29}$$

Ниже нам будет удобнее вместо последовательности $\{\alpha_n\}$ иметь дело с непрерывно меняющимся параметром регуляризации $\alpha > 0$.

Лемма 3. *Пусть одновременно имеет место оценка* (12) *и выполняются условия* 1–3. *Тогда для любого* $\kappa \in (0, p-1)$

$$\Phi(\alpha) \leqslant C_{12}\alpha^\kappa \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{30}$$

где $C_{12} = C_{12}(\kappa)$.

Доказательство. Для произвольных $\alpha, \beta > 0$ и $\lambda \in \mathbf{C}$ обозначим

$$\chi(\lambda, \alpha, \beta) = \frac{1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda}{1 - \Theta(\lambda, \beta)\lambda}.$$

Покажем вначале, что

$$\int\limits_{\gamma_{\alpha_{n+1}}} \frac{\big|\chi(\lambda, \alpha, \alpha_n)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \leqslant C_{13}\big(1 + |\ln \alpha_n|\big) \quad \forall \alpha \in (\alpha_{n+1}, \alpha_n].$$

Оценим интеграл от $|\lambda|^{-1}\big|\chi(\lambda, \alpha, \alpha_n)\big|$ по каждому из участков $\gamma_{\alpha_{n+1}}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$. С учетом условий 2, 3 имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_{\alpha_{n+1}}^{(1)}} \frac{\big|\chi(\lambda, \alpha, \alpha_n)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| &= \int\limits_{\gamma_{\alpha_{n+1}}^{(1)}} \frac{\big|1 - g(\lambda)\lambda\big|^{1/\alpha - 1/\alpha_n}}{|\lambda|}\,|d\lambda| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{\gamma_{\alpha_{n+1}}^{(1)}} \frac{(1 + d_0N_0\alpha_{n+1})^{1/\alpha_{n+1}}}{d_0\alpha_{n+1}}\,|d\lambda| \leqslant 2(\pi - \varphi)e^{d_0N_0},\end{aligned}$$

$$\int\limits_{\gamma_{\alpha_{n+1}}^{(2)}} \frac{\big|1 - g(\lambda)\lambda\big|^{1/\alpha - 1/\alpha_n}}{|\lambda|}\,|d\lambda| \leqslant 2\varphi_0,$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_{\alpha_{n+1}}^{(3)}} \frac{\big|1 - g(\lambda)\lambda\big|^{1/\alpha - 1/\alpha_n}}{|\lambda|}\,|d\lambda| &\leqslant \ln R_0 - \ln d_0\alpha_{n+1} \leqslant \\ &\leqslant \max\left\{\left|\ln\frac{2R_0}{d_0}\right|, \left|\ln\frac{R_0}{d_0}\right|, 1\right\}\big(1 + |\ln \alpha_n|\big).\end{aligned}$$

Интеграл по отрезку $\gamma_{\alpha_{n+1}}^{(4)}$ оценивается аналогично последнему неравенству.

Таким образом, для любого $\alpha \in (\alpha_{n+1}, \alpha_n]$, $n \in \mathbf{N}$, выполняется

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= \left\|\Big(E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha\big)F'(x^*)\Big)\Big(E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*)\Big)^{-1}\Big(E - \Theta\big(F'(x^*), \alpha_n\big)F'(x^*)\Big)(x^* - \xi)\right\| \leqslant \\ &\leqslant \Big\|\chi\big(F'(x^*), \alpha, \alpha_n\big)\Big\|\Phi(\alpha_n) \leqslant \frac{C_3}{2\pi}\,\Phi(\alpha_n) \int\limits_{\gamma_{\alpha_{n+1}}} \frac{\big|\chi(\lambda, \alpha, \alpha_n)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \leqslant C_{14}\big(1 + |\ln \alpha_n|\big)\alpha_n^{p-1}.\end{aligned}$$

Следовательно, при $\varkappa \in (0, p-1)$ для любых $\alpha \in (0,1] = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}(\alpha_{n+1}, \alpha_n]$ получаем

$$\frac{\Phi(\alpha)}{\alpha^\varkappa} = \frac{\Phi(\alpha)\alpha^{p-1-\varkappa}}{\alpha^{p-1}} \leqslant C_{14}\big(1+|\ln\alpha_n|\big)\alpha_n^{p-1-\varkappa}\Big(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\Big)^{p-1} \leqslant C_{12},$$

где $C_{12} = c_{12}(\varkappa)$. Оценка (30) для $\alpha \in (1, \alpha_0]$ (в случае $\alpha_0 > 1$) следует из леммы 2 при $\tau = 0$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия* 2, 3. *Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{\big|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \leqslant C_{15}\big(1+|\ln\alpha|\big) \quad \forall \alpha \in [\alpha_0, \infty), \tag{31}$$

где функция $\Theta(\lambda,\alpha)$ *определена в* (10).

Доказательство. Поскольку в силу условий 2, 3 для всех $\lambda \in \gamma_\alpha$ и $\alpha \in [\alpha_0, \infty)$ выполняется неравенство $\big|1-g(\lambda)\lambda\big| \leqslant e^{d_0N_0}$, то

$$\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{\big|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \leqslant e^{d_0N_0}\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{|d\lambda|}{|\lambda|} \leqslant C_{15}\big(1+|\ln\alpha|\big).$$

Лемма доказана.

В силу условия 2, существует такое $\varepsilon^{(0)} > 0$, что функция $\Theta(\lambda,\alpha)$ непрерывна по λ, α на множестве

$$D(R_0, \varepsilon^{(0)}, d_0, \varphi_0) = \big\{(\lambda,\alpha)\colon \lambda \in K_\alpha(R_0+\varepsilon^{(0)}, d_0, \varphi_0), \alpha > 0\big\}.$$

Последнее свойство обеспечивает непрерывность отображения $\alpha \to y_\alpha$ из $(0,\infty)$ в X. В силу (28), (30) и (31), для всех q, $0 < q < 2\varkappa/3$, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \alpha^{-\varkappa-1+q}\|y_\alpha\|\,d\alpha &= \int\limits_0^{\alpha_0}\alpha^{-\varkappa-1+q}\Phi(\alpha)\,d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-\varkappa-1+q}\Phi(\alpha)\,d\alpha \leqslant \\ &\leqslant {}_{16}\int\limits_0^{\alpha_0}\alpha^{-1+q}\,d\alpha + C_{17}\int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-\varkappa-1+3q/2}\bigg(\alpha^{-q/2}\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{\big|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\bigg)\,d\alpha < \infty.\end{aligned} \tag{32}$$

Поэтому интеграл

$$w_q = \int\limits_0^\infty \alpha^{-\varkappa-1+q}y_\alpha\,d\alpha \tag{33}$$

существует в смысле Бохнера и определяет некоторый элемент $w_q \in X$.

Наша ближайшая задача заключается в доказательстве того, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{(0)}]$ корректно определен элемент

$$w_q^{(\varepsilon)} = \int\limits_0^\infty \alpha^{-\varkappa-1+q}\Big[E-\Theta\big(F'(x^*)+\varepsilon E, \alpha\big)\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)\Big](x^*-\xi)\,d\alpha \tag{34}$$

и для элемента $\widetilde{w}_q^{(\varepsilon)}$, связанного с $w_q^{(\varepsilon)}$, имеет место равенство

$$\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{\varkappa-q}\widetilde{w}_q^{(\varepsilon)} = C(\varkappa, q)(x^*-\xi), \tag{35}$$

где постоянная $C(\varkappa, q) \neq 0$.

4. Вначале для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{(0)}]$ установим существование интеграла Бохнера

$$u_q^{(\varepsilon)} = \int\limits_0^\infty \alpha^{-\varkappa-1+q}\Big[\Theta\big(F'(x^*), \alpha\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x^*)+\varepsilon E, \alpha\big)\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)\Big](x^*-\xi)\,d\alpha. \tag{36}$$

Так как, в силу условия 3, для всех $\lambda \in K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0)$ и $\alpha > 0$ выполняется $1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda = \big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{1/\alpha} \neq 0$, то из теоремы об отображении спектра [4, с. 456] следует, что оператор $E-\Theta\big(F'(x^*),\alpha\big)F'(x^*)$ непрерывно обратим для любого $\alpha > 0$. Поэтому

$$u_q^{(\varepsilon)} = \int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q}\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha\big)F'(x^*) - \Theta\big(F'(x^*)+\varepsilon E,\alpha\big)\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)\Big] \times$$
$$\times \Big(E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha\big)F'(x^*)\Big)^{-1}\Big(E - \Theta\big(F'(x^*),\alpha\big)F'(x^*)\Big)(x^*-\xi)\,d\alpha = \tag{37}$$
$$= \int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q}\psi\big(F'(x^*),\alpha,\varepsilon\big)y_\alpha\,d\alpha.$$

В (37) обозначено

$$\psi(\lambda,\alpha,\varepsilon) = \frac{\Theta(\lambda,\alpha)\lambda - \Theta(\lambda+\varepsilon,\alpha)(\lambda+\varepsilon)}{1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda} = \left(\frac{1-g(\lambda+\varepsilon)(\lambda+\varepsilon)}{1-g(\lambda)\lambda}\right)^{1/\alpha} - 1. \tag{38}$$

В силу (38) и условия 2 для любого фиксированного $\varepsilon \in (0,\varepsilon^{(0)}]$ функция $\psi(\lambda,\alpha,\varepsilon)$ непрерывна по λ,α на множестве $D(R_0,0,d_0,\varphi_0)$. Следовательно, функция оператора $\psi\big(F'(x^*),\alpha,\varepsilon\big)$ непрерывна по α при $\alpha > 0$. Для доказательства существования интегралов Бохнера в (36), (37) остается установить сходимость интеграла Лебега в правой части оценки

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q}\Big\|\psi\big(F'(x^*),\alpha,\varepsilon\big)y_\alpha\Big\|\,d\alpha \leqslant \int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q}\Phi(\alpha)\Big\|\psi\big(F'(x^*),\alpha,\varepsilon\big)\Big\|\,d\alpha. \tag{39}$$

Поскольку при любых $\alpha > 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon^{(0)}]$ функция $\psi(\lambda,\alpha,\varepsilon)$ аналитична по λ в окрестности спектра $\sigma\big(F'(x^*)\big)$ и контур $\gamma_\alpha, \alpha > 0$, охватывает $\sigma\big(F'(x^*)\big)$, из (13), (14) вытекает

$$\Big\|\psi\big(F'(x^*),\alpha,\varepsilon\big)\Big\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_\alpha}\big|\psi(\lambda,\alpha,\varepsilon)\big|\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big\|\,|d\lambda| \leqslant \frac{C_3}{2\pi}\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{\big|\psi(\lambda,\alpha,\varepsilon)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|, \quad \alpha > 0.$$

Имея это в виду, дополним приведенный выше список условий на функцию $g(\lambda)$ следующим предположением.

Условие 4. Для любого $\lambda \in K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0)$, $\alpha \in (0,\infty)$, имеет место неравенство

$$\mathrm{Re}\left(\frac{d}{d\lambda}\ln\big(1-g(\lambda)\lambda\big)\right) < 0.$$

Лемма 5. *Пусть выполняются условия 2–4. Тогда найдется такая постоянная $\varepsilon^{(1)} \in (0,\varepsilon^{(0)}]$, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon^{(1)}]$ и $\alpha \in (0,\infty)$ имеет место оценка*

$$\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{\big|\psi(\lambda,\alpha,\varepsilon)\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda| = M(\alpha,\varepsilon) < \infty. \tag{40}$$

При этом

$$M(\alpha,\varepsilon) \leqslant C_{18}\big(1+|\ln\alpha|\big), \tag{41}$$

$$\int\limits_0^{\varepsilon^{(1)}}\frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}d\varepsilon \leqslant C_{19}\big(1+|\ln\alpha|^2\big). \tag{42}$$

Доказательство. Из (38) следует $\psi(\lambda,\alpha,\varepsilon) = z(\lambda,\varepsilon)^{1/\alpha} - 1$, где

$$z(\lambda,\varepsilon) = \frac{1-g(\lambda+\varepsilon)(\lambda+\varepsilon)}{1-g(\lambda)\lambda}.$$

Обозначим $\rho(\lambda,\varepsilon) = \bigl|z(\lambda,\varepsilon)\bigr|$, $\varphi(\lambda,\varepsilon) = \arg z(\lambda,\varepsilon)$. В силу элементарных геометрических соображений и условия 4, при достаточно малом $\varepsilon^{(1)} > 0$ и для всех $\lambda \in \gamma_\alpha$, $\alpha > 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon^{(1)}]$ имеют место оценки

$$1 - C_{20}\varepsilon \leqslant \rho(\lambda,\varepsilon) \leqslant 1 - C_{21}\varepsilon, \quad |\varphi(\lambda,\varepsilon)| \leqslant C_{22}\varepsilon,$$

где константы C_{20}, C_{21}, C_{22} не зависят от λ, α, ε. Отсюда с учетом неравенства $|\sin t| \leqslant |t|$ получаем

$$\begin{aligned}\bigl|\psi(\lambda,\alpha,\varepsilon)\bigr| &= \left|1 - \Bigl(\rho(\lambda,\varepsilon)\exp\bigl(i\varphi(\lambda,\varepsilon)\bigr)\Bigr)^{1/\alpha}\right| = \\ &= \left(\bigl(1-\rho^{1/\alpha}(\lambda,\varepsilon)\bigr)^2 + 4\rho^{1/\alpha}(\lambda,\varepsilon)\sin^2\frac{\varphi(\lambda,\varepsilon)}{2\alpha}\right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant 1 - \rho^{1/\alpha}(\lambda,\varepsilon) + 2\rho^{1/(2\alpha)}(\lambda,\varepsilon)\left|\sin\frac{\varphi(\lambda,\varepsilon)}{2\alpha}\right| \leqslant \\ &\leqslant 1 - (1-C_{20}\varepsilon)^{1/\alpha} + C_{22}\alpha^{-1}\varepsilon(1-C_{21}\varepsilon)^{1/(2\alpha)} = \widetilde{M}(\alpha,\varepsilon).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{\bigl|\psi(\lambda,\alpha,\varepsilon)\bigr|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \leqslant \widetilde{M}(\alpha,\varepsilon)\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{|d\lambda|}{|\lambda|} = 2\widetilde{M}(\alpha,\varepsilon)\left(\pi + \ln\frac{R_0}{d_0\alpha}\right) = M(\alpha,\varepsilon),$$

откуда и следует (41). Далее имеем

$$\int\limits_0^{\varepsilon^{(1)}} \frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}\,d\varepsilon = 2\left(\pi + \ln\frac{R_0}{d_0\alpha}\right)\left(\int\limits_0^{\varepsilon^{(1)}}\frac{1-(1-C_{20}\varepsilon)^{1/\alpha}}{\varepsilon}\,d\varepsilon + C_{22}\int\limits_0^{\varepsilon^{(1)}}\frac{(1-C_{21}\varepsilon)^{1/(2\alpha)}}{\alpha}\,d\varepsilon\right).$$

Выбирая $\varepsilon^{(1)}$ так, что $1 - C_{20}\varepsilon^{(1)} > 0$, и полагая $t = 1 - C_{20}\varepsilon$, находим (см. [13, с. 772, 792])

$$\int\limits_0^{\varepsilon^{(1)}} \frac{1-(1-C_{20}\varepsilon)^{1/\alpha}}{\varepsilon}\,d\varepsilon \leqslant \int\limits_0^1 \frac{1-t^{1/\alpha}}{1-t}\,dt \leqslant C_{23}\bigl(1 + |\ln\alpha|\bigr).$$

Наконец,

$$\int\limits_0^{\varepsilon^{(1)}} \frac{(1-C_{21}\varepsilon)^{1/(2\alpha)}}{\alpha}\,d\varepsilon \leqslant \frac{2}{C_{21}(2\alpha+1)} \leqslant \frac{2}{C_{21}} \quad \forall\alpha > 0.$$

Из двух последних оценок следует (42). Лемма доказана.

Из (30) – (32), (39), (41) для всех q, $0 < q < \kappa/2$, получаем

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q}\Phi(\alpha)\Bigl\|\psi\bigl(F'(x^*),\alpha,\varepsilon\bigr)\Bigr\|\,d\alpha \leqslant \\ &\qquad\leqslant \frac{C_3}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\alpha_0}\alpha^{-\kappa-1+q/2}\Phi(\alpha)\bigl(\alpha^{q/2}M(\alpha,\varepsilon)\bigr)\,d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-\kappa-1+3q/2}\Phi(\alpha)\bigl(\alpha^{-q/2}M(\alpha,\varepsilon)\bigr)\,d\alpha\right) \leqslant \\ &\qquad\leqslant C_{24}\left(\int\limits_0^{\alpha_0}\alpha^{-1+q/2}\,d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-\kappa-1+2q}\left(\alpha^{-q/2}\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{\bigl|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\bigr|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\right)d\alpha\right) < \infty.\end{aligned}$$

Поскольку $w_q^{(\varepsilon)} = u_q^{(\varepsilon)} + w_q$, интегралы в (34) и (36) существуют для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon^{(1)}]$.

Используя (28), (31), (37), (40) и теорему Фубини [12, с. 313], приходим к оценке

$$\int_0^{\varepsilon^{(1)}} \frac{\|w_q^{(\varepsilon)}-w_q\|}{\varepsilon}\,d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon^{(1)}} \frac{\|u_q^{(\varepsilon)}\|}{\varepsilon}\,d\varepsilon \leqslant \int_0^{\varepsilon^{(1)}} \varepsilon^{-1} d\varepsilon \int_0^{\infty} \alpha^{-\kappa-1+q}\Phi(\alpha)\Big\|\psi\big(F'(x^*),\alpha,\varepsilon\big)\Big\|\,d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant C_{25}\Bigg(\int_0^{\alpha_0} \alpha^{-\kappa-1+q/2}\Phi(\alpha)\bigg(\alpha^{q/2}\int_0^{\varepsilon^{(1)}} \frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}\,d\varepsilon\bigg)\,d\alpha +$$

$$+\int_{\alpha_0}^{\infty} \alpha^{-\kappa-1+2q}\alpha^{-q/2}\Phi(\alpha)\bigg(\alpha^{-q/2}\int_0^{\varepsilon^{(1)}} \frac{M(\alpha,\varepsilon)}{\varepsilon}\,d\varepsilon\bigg)\,d\alpha\Bigg) \quad \forall q\in(0,\kappa/2).$$

Далее, из (30) и (42) получаем

$$\int_0^{\varepsilon^{(1)}} \frac{\|w_q^{(\varepsilon)}-w_q\|}{\varepsilon}\,d\varepsilon \leqslant C_{26}\Bigg(\int_0^{\alpha_0} \alpha^{-1+q/2}\,d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\infty} \alpha^{-\kappa-1+2q}\,d\alpha\Bigg) < \infty. \tag{43}$$

На основании (43) аналогично доказательству леммы 5.3 из [5] устанавливается

Лемма 6. *Пусть выполняются условия* 1–4 *и* $q\in(0,\kappa/2)$. *Тогда существует такая последовательность* $\{\varepsilon_n\}$, *что* $\varepsilon_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}\|w_q^{(\varepsilon_n)}-w_q\|=0.$$

Для произвольных r, r_1, $r_2>0$ и отличных от нуля $z,z_1,z_2\in\mathbf{C}$, таких, что $r_1\leqslant r_2$, $\arg z_1\leqslant\arg z_2$, обозначим

$$\begin{aligned}\Gamma_r(z_1,z_2) &= \big\{\zeta\in\mathbf{C}\colon |\zeta|=r,\ \arg z_1\leqslant\arg\zeta\leqslant\arg z_2\big\},\\ \Gamma_{(r_1,r_2)}(z) &= \big\{\zeta\in\mathbf{C}\colon r_1\leqslant|\zeta|\leqslant r_2,\ \arg\zeta=\arg z\big\},\\ \Lambda(z) &= \{\zeta\in\mathbf{C}:\zeta=tz,\ t\geqslant0\}.\end{aligned}$$

С использованием замены $\alpha=\tau^{-1}\lambda$, $\lambda\neq0$, преобразуем

$$\int_0^{\infty} \alpha^{-\kappa-1+q}\big(1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\big)\,d\alpha = \lambda^{-\kappa+q}\int_{\Lambda(\lambda)} \tau^{\kappa-1-q}\big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{\tau/\lambda}\,d\tau, \tag{44}$$

где $z^{\tau/\lambda}=\exp\Big(\dfrac{\tau}{\lambda}\ln z\Big)$. Через ln здесь и далее обозначается ветвь логарифма, выделяемая равенством $\ln 1=0$, и интегрирование по $\Lambda(\lambda)$ происходит по направлению от $\tau=0$ к $\tau=\infty$. В дальнейшем будем считать выполненными следующие условия.

Условие 5. Для любого $\lambda\in K(R_0,\pi/4)\backslash\{0\}$ справедливо включение

$$\arg\Big(-\lambda^{-1}\ln\big(1-g(\lambda)\lambda\big)\Big)\in(-\pi/4,\pi/4).$$

Условие 6. Имеет место соотношение

$$\inf_{\lambda\in K(R_0,\pi/4)\backslash\{0\}}\Big|\lambda^{-1}\ln\big(1-g(\lambda)\lambda\big)\Big|>0.$$

Обозначим через ω величину нижней грани в левой части условия 6. На завершающем этапе рассуждений нам потребуется следующая

Лемма 7. *Пусть выполняется условие* 1 *с* $\varphi_0\in(0,\pi/4)$ *и условия* 2–6. *Тогда для любого* $q\in(0,\kappa)$, $\kappa\in(0,p-1)$, *и для любого* $\lambda\in K(R_0,\varphi_0)\backslash\{0\}$

$$\int_{\Lambda(\lambda)} \tau^{\kappa-1-q}\big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{\tau/\lambda}\,d\tau = \bigg(-\frac{\lambda}{\ln\big(1-g(\lambda)\lambda\big)}\bigg)^{\kappa-q}\Gamma(\kappa-q), \tag{45}$$

где $\Gamma(\cdot)$ *есть* Γ*-функция Эйлера.*

Доказательство. Вначале убедимся, что при фиксированном $\lambda \in K(R_0, \pi/4)\backslash\{0\}$ интеграл

$$\int\limits_{\Lambda(\mu)} \tau^{\kappa-1-q}\big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{\tau/\lambda}\,d\tau \tag{46}$$

не зависит от выбора $\mu \in K(\pi/4)\backslash\{0\}$. Заметим, что $\left|\big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{\tau/\lambda}\right| = a(\lambda,\tau)^{|\tau|}$, где

$$a(\lambda,\tau) = \exp\left(\left|\frac{\ln\big(1-g(\lambda)\lambda\big)}{\lambda}\right| \cos\arg\left(\frac{\ln\big(1-g(\lambda)\lambda\big)\exp(i\arg\tau)}{\lambda}\right)\right).$$

Поскольку в (46) $|\arg\tau| = |\arg\mu| < \pi/4$, в силу условия 5 имеем

$$\arg\left(\frac{\ln\big(1-g(\lambda)\lambda\big)\exp(i\arg\tau)}{\lambda}\right) \in \left(\frac{3\pi}{4} - |\arg\mu|, \frac{5\pi}{4} + |\arg\mu|\right).$$

Согласно условию 6, для любого $\mu \in K(\pi/4)\backslash\{0\}$ имеет место неравенство

$$a(\lambda,\tau) \leqslant a_1(\mu) = \exp\Big(-\omega\sin\big(\pi/4 - |\arg\mu|\big)\Big) < 1 \quad \forall\lambda \in K(R_0,\pi/4)\backslash\{0\} \quad \forall\tau \in \Lambda(\mu).$$

Обращаясь к интегралу (46), зафиксируем произвольно $\mu \in K(\pi/4)\backslash\{0\}$. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{r\to0}\left|\int\limits_{\Gamma_r(1,\mu)} \tau^{\kappa-1-q}\big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{\tau/\lambda}\,d\tau\right| &\leqslant \lim_{r\to0}\int\limits_{\Gamma_r(1,\mu)} |\tau|^{\kappa-1-q}a(\lambda,\tau)^{|\tau|}\,|d\tau| \leqslant \\ &\leqslant \lim_{r\to0} r^{\kappa-1-q}a_1(\mu)^r \int\limits_{\Gamma_r(1,\mu)} |d\tau| = \lim_{r\to0} r^{\kappa-q}a_1(\mu)^r|\arg\mu| = 0,\end{aligned} \tag{47}$$

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int\limits_{\Gamma_R(1,\mu)} \tau^{\kappa-1-q}\big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{\tau/\lambda}\,d\tau\right| \leqslant \lim_{R\to\infty} R^{\kappa-q}a_1(\mu)^R|\arg\mu| = 0. \tag{48}$$

Поскольку функция $\tau^{\kappa-1-q}\big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{\tau/\lambda}$ аналитична по τ в $K(R_0,\pi/4)\backslash\{0\}$, в силу теоремы Коши справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(1)} \tau^{\kappa-1-q}\big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{\tau/\lambda}\,d\tau + \int\limits_{\Gamma_R(1,\mu)} + \int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(\mu)} + \int\limits_{\Gamma_r(1,\mu)} = 0. \tag{49}$$

Здесь под знаками интегралов стоит одно и то же выражение. Переходя в (49) к пределу при $r \to 0$, $R \to \infty$, с использованием (47), (48) получаем

$$\int\limits_{\Lambda(\mu)} \tau^{\kappa-1-q}\big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{\tau/\lambda}\,d\tau = \int\limits_{\Lambda(1)} \tau^{\kappa-1-q}\big(1-g(\lambda)\lambda\big)^{\tau/\lambda}\,d\tau.$$

Последнее равенство означает, что при любом фиксированном $\lambda \in K(R_0,\pi/4)\backslash\{0\}$ интеграл (46) не зависит от выбора $\mu \in K(\pi/4)\backslash\{0\}$.

Положим далее $\phi(\lambda) = \arg\Big(-\lambda^{-1}\ln\big(1-g(\lambda)\lambda\big)\Big)$, $\lambda \in K(R_0,\varphi_0)\backslash\{0\}$. В силу условия 5 заключаем, что $\phi(\lambda) \in (-\pi/4,\pi/4)$, поэтому $\Lambda\Big(\exp\big(-i\phi(\lambda)\big)\Big) = \Lambda(\mu)$ для некоторого $\mu \in K(\pi/4)\backslash\{0\}$. С учетом независимости интеграла (46) от $\mu \in K(\pi/4)\backslash\{0\}$ преобразуем

$$\int\limits_{\Lambda(\lambda)} \tau^{\kappa-1-q}\bigl(1-g(\lambda)\lambda\bigr)^{\tau/\lambda}\,d\tau = \int\limits_{\Lambda(\lambda)} \tau^{\kappa-1-q}\exp\biggl(\frac{\ln\bigl(1-g(\lambda)\lambda\bigr)}{\lambda}\tau\biggr)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{\Lambda(\exp(-i\phi(\lambda)))} \tau^{\kappa-1-q}\exp\biggl(-\biggl(-\frac{\ln\bigl(1-g(\lambda)\lambda\bigr)}{\lambda}\biggr)\tau\biggr)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty \biggl(-\frac{\lambda t}{\ln\bigl(1-g(\lambda)\lambda\bigr)}\biggr)^{\kappa-q-1} e^{-t} d\biggl(-\frac{\lambda t}{\ln\bigl(1-g(\lambda)\lambda\bigr)}\biggr) =$$

$$= \biggl(-\frac{\lambda}{\ln\bigl(1-g(\lambda)\lambda\bigr)}\biggr)^{\kappa-q}\Gamma(\kappa-q).$$

Лемма доказана.

Обозначим $m=[\kappa-q]$. Выбрав при необходимости величину $q>0$ достаточно малой, получим $\kappa-q\in(m,m+1)$. Согласно (16),

$$\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E\bigr)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon)} =$$
$$= \frac{(-1)^m\sin\pi(\kappa-q)}{\pi}\int\limits_0^\infty t^{\kappa-q-m-1}\bigl(F'(x^*)+(t+\varepsilon)E\bigr)^{-1}\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E\bigr)^{m+1}w_q^{(\varepsilon)}\,dt, \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon^{(1)}].$$

Из (34) следует

$$\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E\bigr)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon)} = \frac{(-1)^m\sin\pi(\kappa-q)}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty t^{\kappa-q-m-1}\alpha^{-\kappa-1+q}\,\times$$
$$\times\bigl(F'(x^*)+(t+\varepsilon)E)^{-1}\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E\bigr)^{m+1}\Bigl[E-\Theta\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E,\alpha\bigr)\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E\bigr)\Bigr](x^*-\xi)\,d\alpha\,dt. \tag{50}$$

Введем обозначение $Z(\lambda,t,\alpha)=(t+\lambda)^{-1}\lambda^{m+1}\bigl(1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda\bigr)$. Для применения представления (14) к оператору

$$\bigl(F'(x^*)+(t+\varepsilon)E\bigr)^{-1}\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E\bigr)^{m+1}\Bigl[E-\Theta\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E,\alpha\bigr)\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E\bigr)\Bigr] = Z\bigl(F'(x^*),t,\alpha\bigr)$$

определим контур $\gamma=\Gamma^{(\varepsilon)}$, где

$$\Gamma^{(\varepsilon)}=\Gamma_{\varepsilon/2}(e^{-i\varphi_0},e^{i\varphi_0})\cup\Gamma_{R_0}(e^{-i\varphi_0},e^{i\varphi_0})\cup\Gamma_{(\varepsilon/2,R_0)}(e^{i\varphi_0})\cup\Gamma_{(\varepsilon/2,R_0)}(e^{-i\varphi_0}).$$

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon^{(2)}\in\Bigl(0,R_0-\bigl\|F'(x^*)\bigr\|\Bigr)$ контур $\Gamma^{(\varepsilon)}$ содержит внутри спектр

$$\sigma\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E\bigr)=\Bigl\{\lambda+\varepsilon\colon\ \lambda\in\sigma\bigl(F'(x^*)\bigr)\Bigr\}$$

и при любых t, $\alpha>0$ содержится в области аналитичности по λ функции $Z(\lambda,t,\alpha)$. Поэтому, согласно (14), (50) при $0<\varepsilon<\varepsilon^{(3)}=\min\{\varepsilon^{(1)},\varepsilon^{(2)}\}$ имеем

$$\bigl(F'(x^*)+\varepsilon E\bigr)^{\kappa-q}w_q^{(\varepsilon)} =$$
$$= D(\kappa,q)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}}\alpha^{-\kappa-1+q}t^{\kappa-q-m-1}Z(\lambda,t,\alpha)R\bigl(\lambda,F'(x^*)+\varepsilon E\bigr)(x^*-\xi)\,d\lambda\,d\alpha\,dt, \tag{51}$$

где

$$D(\kappa,q)=\frac{(-1)^m\sin\pi(\kappa-q)}{2\pi^2 i}.$$

Поскольку для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{(1)}]$

$$\sup_{\lambda \in \Gamma^{(\varepsilon)}} \left\| R\bigl(\lambda, F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)(x^* - \xi) \right\| = E(\varepsilon) < \infty,$$

ввиду (10) выполняется

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) = \int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}} \left(\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} t^{\kappa-q-m-1} \bigl|Z(\lambda, t, \alpha)\bigr| \left\| R\bigl(\lambda, F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)(x^* - \xi) \right\| d\alpha\, dt \right) |d\lambda| \leqslant \\ \leqslant E(\varepsilon) \int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}} |\lambda|^{m+1} \left(\int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} \bigl|1 - g(\lambda)\lambda\bigr|^{1/\alpha} d\alpha \right) \left(\int\limits_0^\infty t^{\kappa-q-m-1} |t + \lambda|^{-1} dt \right) |d\lambda|. \end{aligned} \tag{52}$$

В силу вытекающего из условия 3 соотношения $\sup\limits_{\lambda \in \Gamma^{(\varepsilon)}} \bigl|1 - g(\lambda)\lambda\bigr| < 1$, $\varepsilon > 0$, первый из внутренних интегралов в (52) при фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{(3)}]$ сходится и ограничен равномерно по $\lambda \in \Gamma^{(\varepsilon)}$. Поскольку для всех $\lambda \in \Gamma^{(\varepsilon)}$ и $t \geqslant 0$ выполнено $|t + \lambda| \geqslant |\lambda|$, то отсюда следует сходимость второго внутреннего интеграла в (52) и конечность величины $J(\varepsilon)$ для тех же значений ε. Меняя порядок интегрирования в (51), получим

$$\begin{aligned} \bigl(F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)^{\kappa-q} w_q^{(\varepsilon)} = D(\kappa, q) \int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}} \lambda^{m+1} \left(\int\limits_0^\infty \alpha^{-\kappa-1+q} \bigl(1 - g(\lambda)\lambda\bigr)^{1/\alpha} d\alpha \right) \times \\ \times \left(\int\limits_0^\infty t^{\kappa-q-m-1} (t + \lambda)^{-1} dt \right) R\bigl(\lambda, F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)(x^* - \xi)\, d\lambda. \end{aligned} \tag{53}$$

Положив в (53) $\alpha = \tau^{-1}\lambda$, $t = \lambda\zeta$, для достаточно малых $q > 0$ согласно (44) будем иметь

$$\begin{aligned} \bigl(F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)^{\kappa-q} w_q^{(\varepsilon)} = D(\kappa, q) \int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}} \lambda^{m+1} \left(\lambda^{-\kappa+q} \int\limits_{\Lambda(\lambda)} \tau^{\kappa-1-q} \bigl(1 - g(\lambda)\lambda\bigr)^{\tau/\lambda} d\tau \right) \times \\ \times \left(\lambda^{\kappa-q-m-1} \int\limits_{\Lambda(\bar\lambda)} \zeta^{\kappa-q-m-1} (1 + \zeta)^{-1} d\zeta \right) R\bigl(\lambda, F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)(\xi - x^*)\, d\lambda. \end{aligned}$$

С использованием аналитичности функции $\zeta^{\kappa-q-m-1}(1 + \zeta)^{-1}$ на множестве $K_\alpha(R_0, \varphi_0) \backslash \{0\}$ (как и в доказательстве леммы 7) получаем, что величина $H(\kappa, q)$ интеграла по $\Lambda(\bar\lambda)$ не зависит от $\lambda \in \Gamma^{(\varepsilon)}(\varphi_0)$. Поэтому, обозначая $E(\kappa, q) = 2\pi i D(\kappa, q) H(\kappa, q)$ и учитывая, что в силу (45)

$$\int\limits_{\Lambda(\lambda)} \tau^{\kappa-1-q} \bigl(1 - g(\lambda)\lambda\bigr)^{\tau/\lambda} d\tau = \left(-\frac{\lambda}{\ln\bigl(1 - g(\lambda)\lambda\bigr)} \right)^{\kappa-q} \Gamma(\kappa - q) \equiv h(\lambda),$$

где $\lambda \in K(R_0, \varphi_0) \backslash \{0\}$, получаем

$$\begin{aligned} \bigl(F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)^{\kappa-q} w_q^{(\varepsilon)} = \frac{E(\kappa, q)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}(\varphi_0)} h(\lambda) R\bigl(\lambda, F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)(\xi - x^*)\, d\lambda = \\ = E(\kappa, q) h\bigl(F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)(\xi - x^*). \end{aligned} \tag{54}$$

В силу условий 2, 3 функция $h(\lambda)$, доопределенная при $\lambda = 0$ по непрерывности значением $\lim\limits_{\lambda \to 0} h(\lambda) \neq 0$, аналитична и не обращается в нуль в некоторой открытой δ_0-окрестности O_{δ_0} множества $K(R_0, \varphi_0)$, так что функция $1/h(\lambda)$ аналитична в O_{δ_0}. Пусть σ_0-контур, лежащий в этой окрестности и охватывающий окрестность $O_{\delta_0/2}$ того же множества. Включение $\sigma\bigl(F'(x^*) + \varepsilon E\bigr) \subset K(R_0, \varphi_0)$ с учетом соотношения $h(\lambda) \neq 0$ при всех $\lambda \in O_{\delta_0}$ означает, что корректно определен обратный к $h\bigl(F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)$ оператор

$$h\bigl(F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_0} h(\lambda)^{-1} R\bigl(\lambda, F'(x^*) + \varepsilon E\bigr)\, d\lambda \in L(X).$$

Обозначим $\widetilde{w}_q^{(\varepsilon)} = h\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{-1} w_q^{(\varepsilon)}$, $\widetilde{w}_q = h\big(F'(x^*)\big)^{-1} w_q$. В силу (54) и коммутативности функций одного и того же оператора [4, с. 456] выполняется

$$\begin{aligned}\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{\kappa-q}\widetilde{w}_q^{(\varepsilon)} &= \big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{\kappa-q} h\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{-1} w_q^{(\varepsilon)} = \\ &= h\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{-1}\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{\kappa-q} w_q^{(\varepsilon)} = E(\kappa,q)(\xi-x^*).\end{aligned} \tag{55}$$

Тем самым доказана следующая

Лемма 8. *Пусть выполняются условие* 1 *при* $\varphi_0 \in (0,\pi/4)$ *и условия* 2–6. *Тогда для некоторой ненулевой постоянной* $C(\kappa,q)$ *выполняется равенство* (35).

5. Сформулируем и докажем теперь основное утверждение настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть выполняются соотношения* (2), *условие* 1 *при* $\varphi_0 \in (0,\pi/4)$ *и условия* 2–6. *Если итерационный процесс* (11) *порождает последовательность* $\{x_n\}$, *для которой выполняется оценка (12), то для любого* $\varepsilon \in (0,p)$ *справедливо включение*

$$x^* - \xi \in R\big(F'(x^*)^{p-\varepsilon}\big).$$

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

1. Прежде всего, для любых $\kappa \in (0, p-1)$ и малых $q>0$ установим равенство

$$\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\kappa-q}\widetilde{w}_q^{(\varepsilon_n)} = F'(x^*)^{\kappa-q}\widetilde{w}_q, \tag{56}$$

где последовательность $\{\varepsilon_n\}$ определена в лемме 6. Предполагая q достаточно малым, получим $\nu \in (0,1)$ и $\kappa - q \in (m, m+1)$, где $\nu = \{\kappa - q\}$ и $m = [\kappa - q]$. Тогда

$$\begin{aligned}&\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\kappa-q} h\big(F'(x^*)+\varepsilon_n\big)^{-1} w_q^{(\varepsilon_n)} - F'(x^*)^{\kappa-q} h\big(F'(x^*)\big)^{-1} w_q\Big\| \leqslant \\ &\quad\leqslant \Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\kappa-q}\Big\|\bigg(\Big\|h\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{-1} - h\big(F'(x^*)\big)^{-1}\Big\| + \Big\|h\big(F'(x^*)\big)^{-1}\Big\|\bigg)\|w_q^{(\varepsilon_n)} - w_q\| + \\ &\quad+ \Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\kappa-q}\Big\|\Big\|h\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{-1} - h\big(F'(x^*)\big)^{-1}\Big\|\|w_q\| + \\ &\quad+ \Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\kappa-q} - F(x^*)^{\kappa-q}\Big\|\Big\|h\big(F'(x^*)\big)^{-1}\Big\|\|w_q\|.\end{aligned} \tag{57}$$

Далее,

$$\begin{aligned}&\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{m+\nu} - F'(x^*)^{m+\nu}\Big\| \leqslant \\ &\quad\leqslant \Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{m} - F'(x^*)^{m}\Big\|\|F'(x^*)^{\nu}\| + \Big(\|F'(x^*)\| + \varepsilon_n\Big)^m\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\nu} - F'(x^*)^{\nu}\Big\|.\end{aligned} \tag{58}$$

Заметим, что

$$\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{m} - F'(x^*)^{m}\Big\| \leqslant C_{27}\varepsilon_n. \tag{59}$$

Согласно [10, с. 155] выполняется

$$\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\nu} - F'(x^*)^{\nu}\Big\| \leqslant C_{28}\varepsilon_n^{\nu}. \tag{60}$$

Осталось установить, что

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|h\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{-1} - h\big(F'(x^*)\big)^{-1}\Big\| = 0. \tag{61}$$

Поскольку $\varepsilon_n \leqslant \delta_0/4$, то при $\lambda \in \sigma_0$ точки λ, $\lambda - \varepsilon_n$ не принадлежат $K(R_0,\varphi_0)$; в силу условия 1 для них

$$\Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\| \leqslant \frac{C_3}{|\lambda|}, \quad \Big\|R\big(\lambda-\varepsilon_n, F'(x^*)\big)\Big\| \leqslant \frac{C_3}{|\lambda-\varepsilon_n|}.$$

Кроме того, при всех $\lambda \in \sigma_0$ имеем $|\lambda| \geqslant \delta_0/2$, $|\lambda - \varepsilon_n| \geqslant \delta_0/4$; в силу компактности σ_0 выполняется $\big|h(\lambda)\big| \geqslant C_{29} > 0$ при всех $\lambda \in \sigma_0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\Big\|h\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{-1} - h\big(F'(x^*)\big)^{-1}\Big\| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0}\big|h(\lambda)\big|^{-1}\Big\|R\big(\lambda, F'(x^*)+\varepsilon_n E\big) - R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\|\,|d\lambda| = \\ &= \frac{\varepsilon_n}{2\pi}\int\limits_{\sigma_0}\big|h(\lambda)\big|^{-1}\Big\|R\big(\lambda-\varepsilon_n, F'(x^*)\big)R\big(\lambda, F'(x^*)\big)\Big\|\,|d\lambda| \leqslant C_{30}\varepsilon_n.\end{aligned} \tag{62}$$

Соотношение (61) непосредственно следует из (62). Сопоставляя (57) – (61) и используя лемму 6, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\big(F'(x^*)+\varepsilon_n E\big)^{\kappa-q}\widetilde{w}_q^{(\varepsilon_n)}-F'(x^*)^{\kappa-q}\widetilde{w}_q\Big\|=0. \tag{63}$$

В силу леммы 8, элемент $\big(F'(x^*)+\varepsilon E\big)^{\kappa-q}\widetilde{w}_q^{(\varepsilon)}$ не зависит от ε; поэтому (63) влечет (56).

2. Для произвольного $\kappa\in(0,p-1)$ в силу леммы 8 и (56) при малых $q>0$ имеем

$$x^*-\xi=F'(x^*)^{\kappa-q}v_q,\quad v_q=C(\kappa,q)^{-1}\widetilde{w}_q.$$

Поскольку

$$F'(x^*)^{\alpha+\beta}=F'(x^*)^{\alpha}F'(x^*)^{\beta}\quad\forall\alpha,\,\beta>0,\quad\alpha+\beta<1$$

(см. [10, гл. I, § 5]), для любого $\delta_1\in(0,p-1)$ существует элемент $v^{(1)}\in X$, такой, что

$$x^*-\xi=F'(x^*)^{p_1}v^{(1)},\quad p_1=p-1-\delta_1. \tag{64}$$

Полученное представление может быть вновь использовано для оценки третьего слагаемого правой части неравенства (19). Рассмотрим две возможности.

3. Если $p_1\geqslant 1$, то, обозначив $m_1=[p_1]$, $\nu_1=\{p_1\}$, будем иметь

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big](x^*-\xi)\Big\|\leqslant\\ &\quad\leqslant\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big]F'(x^*)^{p_1}v^{(1)}\Big\|\leqslant\\ &\quad\leqslant\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big]F'(x^*)^{m_1}\big(F'(x^*)+C_4\alpha_nE\big)^{\nu_1}v^{(1)}\Big\|+\\ &\quad\quad+\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big]F'(x^*)^{m_1}\Big[\big(F'(x^*)+C_4\alpha_nE\big)^{\nu_1}-F'(x^*)^{\nu_1}\Big]v^{(1)}\Big\|.\end{aligned} \tag{65}$$

Из (13), (14) следует

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big]F'(x^*)^{m_1}\big(F'(x^*)+C_4\alpha_nE\big)^{\nu_1}v^{(1)}\Big\|\leqslant\\ &\quad\leqslant\Big\|\Big[\Big(E-\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)\Big)-\Big(E-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big)\Big]F'(x^*)^{m_1}\Big\|\Big\|\big(F'(x^*)+C_4\alpha_nE\big)^{\nu_1}\Big\|\|v^{(1)}\|\leqslant\\ &\quad\leqslant\frac{1}{2\pi}\Big\|\big(F'(x^*)+C_4\alpha_nE\big)^{\nu_1}\Big\|\|v^{(1)}\|\int\limits_{\gamma_{\alpha_n}}\big|1-\Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda\big|\Big\|\Big[R\big(\lambda,F'(x^*)\big)-R\big(\lambda,F'(x_n)\big)\Big]F'(x^*)^{m_1}\Big\|\,|d\lambda|.\end{aligned}$$

В силу оценки из [10, с. 155], $\Big\|\big(F'(x^*)+C_4\alpha_nE\big)^{\nu_1}\Big\|\leqslant\big\|F'(x^*)^{\nu_1}\big\|+C_{31}(C_4\alpha_0)^{\nu_1}$. Оценка (12) и лемма из [11, с. 141; 3] для любых $\lambda\in\gamma_{\alpha_n}$ дают

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big[R\big(\lambda,F'(x^*)\big)-R\big(\lambda,F'(x_n)\big)\Big]F'(x^*)^{m_1}\Big\|\leqslant\\ &\quad\leqslant\frac{\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big\|\big\|F'(x_n)-F'(x^*)\big\|}{1-\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big\|\big\|F'(x_n)-F'(x^*)\big\|}\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)^{m_1}\Big\|\leqslant\\ &\quad\leqslant\frac{C_3N_2}{(1-\nu_0)|\lambda|}\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)^{m_1}\Big\|l_0n^{-p}.\end{aligned}$$

Используя равенство $R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)=-E+\lambda R\big(\lambda,F'(x^*)\big)$ и (13), находим

$$\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)^{m_1}\Big\|\leqslant(1+C_3)\big\|F'(x^*)\big\|^{m_1-1}\quad\forall\lambda\in\gamma_{\alpha_n}. \tag{66}$$

Из (26) и приведенных выше оценок получаем

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big]F'(x^*)^{m_1}\big(F'(x^*)+C_4\alpha_nE\big)^{\nu}v^{(1)}\Big\|\leqslant\\ &\leqslant\frac{C_3(1+C_3)N_2}{2\pi(1-\nu_0)}\Big(\big\|F'(x^*)^{\nu_1}\big\|+C_{31}(C_4\alpha_n)^{\nu_1}\Big)\big\|F'(x^*)\big\|^{m_1-1}l_0\|v^{(1)}\|^2\alpha_n^p\int\limits_{\gamma_{\alpha_n}}\frac{\big|1-\Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda\big|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\leqslant C_{33}n^{-p}.\end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (65) оценивается аналогично с учетом (60). Поэтому

$$\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big](x^*-\xi)\Big\|\leqslant C_{34}n^{-p}.$$

Используя эту оценку вместо (27), находим $\Phi(\alpha_n)\leqslant C_{35}n^{-p}\quad\forall n\in\mathbf{N}$. Как и выше, отсюда следует, что для любого $\delta\in(0,p)$ существует элемент $\tilde v=\tilde v(\delta)\in X$, такой, что $x^*-\xi=F'(x^*)^{\tilde p}\tilde v$, $\tilde p=p-\delta$. Значит, в этом случае утверждение теоремы верно.

4. Допустим теперь, что $p_1\in(0,1)$. Аналогично (24) имеем

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big](x^*-\xi)\Big\|=\\ &=\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big]F'(x^*)^{p_1}v^{(1)}\Big\|\leqslant\\ &\leqslant C_{36}\int\limits_{\gamma_{\alpha_n}}\big|1-\Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda\big|\Big\|\Big[R\big(\lambda,F'(x^*)\big)-R\big(\lambda,F'(x_n)\big)\Big]F'(x^*)^{p_1}\Big\|\,|d\lambda|.\end{aligned}\tag{67}$$

Как и в (25), для всех $\lambda\in\gamma_{\alpha_n}$ выполняется

$$\Big\|\Big[R\big(\lambda,F'(x^*)\big)-R\big(\lambda,F'(x_n)\big)\Big]F'(x^*)^{p_1}\Big\|\leqslant C_{37}\frac{\|x_n-x^*\|}{|\lambda|}\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)^{p_1}\Big\|.\tag{68}$$

Из (16) следует

$$\begin{aligned}\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)^{p_1}\Big\|\leqslant{}_{38}\Bigg(&\int\limits_0^{2d_0\alpha_n}t^{p_1-1}\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)R\big(-t,F'(x^*)\big)F'(x^*)\Big\|\,dt+\\ &+\int\limits_{2d_0\alpha_n}^{\infty}t^{p_1-1}\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)R\big(-t,F'(x^*)\big)F'(x^*)\Big\|\,dt\Bigg).\end{aligned}$$

В силу (13), (66) и равенства

$$R\big(\lambda,F'(x^*)\big)R\big(-t,F'(x^*)\big)=(\lambda+t)^{-1}\Big(R\big(-t,F'(x^*)\big)-R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big)$$

получаем

$$\begin{aligned}\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)F'(x^*)^{p_1}\Big\|\leqslant C_{39}\Bigg(&\int\limits_0^{2d_0\alpha_n}t^{p_1-1}\Big\|R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big\|\Big\|R\big(-t,F'(x^*)\big)F'(x^*)\Big\|\,dt+\\ &+\int\limits_{2d_0\alpha_n}^{\infty}\frac{t^{p_1-1}}{|\lambda+t|}\Big\|\Big[R\big(-t,F'(x^*)\big)-R\big(\lambda,F'(x^*)\big)\Big]F'(x^*)\Big\|\,dt\Bigg)\leqslant\\ &\leqslant C_{40}\Bigg(\alpha_n^{-1}\int\limits_0^{2d_0\alpha_n}t^{p_1-1}\,dt+\int\limits_{2d_0\alpha_n}^{\infty}\frac{t^{p_1-1}}{|\lambda+t|}\,dt\Bigg)\leqslant C_{41}\alpha_n^{p_1-1}\quad\forall\lambda\in\gamma_{\alpha_n}.\end{aligned}\tag{69}$$

Из (67) – (69) следует

$$\Big\|\Big[\Theta\big(F'(x^*),\alpha_n\big)F'(x^*)-\Theta\big(F'(x_n),\alpha_n\big)F'(x_n)\Big](x^*-\xi)\Big\|\leqslant C_{42}n^{-(p+p_1-1)}.$$

Поэтому в силу (12) и (19) выполнено неравенство

$$\Phi(\alpha_n) \leqslant C_{43} n^{-(p+p_1-1)} \quad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{70}$$

Из (70) следует, что для любого $\delta_2 \in (0, p-1)$ существует $v^{(2)} \in X$, такой, что $x^* - \xi = F'(x^*)^{p_2} v^{(2)}$ и $p_2 = p - (1 - p_1) - \delta_2$, где $p_2 > p_1$. Теперь можно применить процесс уточнения оценки (29).

5. В общем виде процесс итерирования оценок для $\Phi(\alpha_n)$ выглядит следующим образом. Выберем последовательность $\{\delta_k\}$, $\delta_k \in (0, p-1)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$. На k-м шаге имеем оценку $\Phi(\alpha_n) \leqslant C_{44} n^{-(p+p_k-1)}$, из которой следует представление

$$x^* - \xi = F'(x^*)^{p_{k+1}} v^{(k+1)}, \quad v^{(k+1)} \in X \tag{71}$$

при

$$p_{k+1} = p - (1 - p_k) - \delta_{k+1}, \quad \delta_{k+1} \in \big(0, p - (1 - p_k)\big). \tag{72}$$

Если $p_k \geqslant 1$, то в силу (71) и (72) имеем $x^* - \xi = F'(x^*)^{p-\delta_{k+1}} \tilde{v}^{(k+1)}$, где $\tilde{v}^{(k+1)} = F'(x^*)^{p_k - 1} v^{(k+1)}$, и процесс останавливается. Поскольку величина δ_{k+1} может быть выбрана произвольно малой, утверждение теоремы справедливо.

6. Для завершения доказательства достаточно показать, что на некотором конечном шаге $k = k_0$ будет выполнено $p_k \geqslant 1$. Предположим противное, т. е. что $p_k < 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Из (72) следует, что $p_k < p_{k+1}$. Тогда последовательность $\{p_k\}$ имеет предел: $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \tilde{p} \leqslant 1$. Переходя в (72) к пределу, получаем равенство $p = 1$, которое противоречит условию $p > 1$. Теорема доказана.

Замечание. Наиболее распространенные варианты процесса (11) порождаются функциями $g(\lambda) = \mu_0$ и $g(\lambda) = (\lambda + a)^{-1}$, μ_0, $a > 0$. В линейном случае в рамках схемы (9) им отвечают простейший явный и неявный итерационный процессы. В нелинейном случае соответствующие процессы (11) принимают вид

$$x_{n+1} = x_{n+1}^n, \quad x_{n+1}^{k+1} = x_{n+1}^k - \mu_0\big(F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1}^k - x_n)\big), \quad x_{n+1}^0 = \xi, \quad k = 0, \ldots, n-1;$$

$$x_{n+1} = x_{n+1}^n, \quad \big(F'(x_n) + aE\big)(x_{n+1}^k - x_{n+1}^{k+1}) = F'(x_n)(x_{n+1}^k - x_n) + F(x_n), \quad x_{n+1}^0 = \xi, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Непосредственные вычисления показывают, что для этих функций $g(\lambda)$ введенные выше условия 2–6 выполняются при достаточно малых положительных μ_0 и a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
3. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Условия истокопредставимости и скорость сходимости методов решения некорректных операторных уравнений. Часть I // Вычислительные методы и программирование. 2000. **1**. 64–84.
4. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
5. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Условия истокопредставимости и скорость сходимости методов решения некорректных операторных уравнений. Часть II // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**, № 1. 69–95.
6. *Bakushinskii A., Kokurin M.* Iterative methods for solving nonlinear irregular operator equations in Banach spaces // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2000. **21**, N 3–4. 355–378.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
8. *Кокурин М.Ю., Ключев В.В.* О необходимом условии сходимости явного итерационного процесса для линейных уравнений в банаховом пространстве // Обратные и некорректно поставленные задачи. VII конференция, посвящ. памяти академика А. Н. Тихонова в связи с 95-летием со дня рождения. Тезисы докладов. М.: МАКС Пресс, 2001. 39.
9. *Balakrishnan A.V.* Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them // Pacific Journal of Mathematics. 1960. **10**, N 2. 419–437.
10. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
11. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер К.* Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.
12. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию
09.02.2002