УДК 519.633.6

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ПРИ НАЛИЧИИ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Ю. М. Королев[1], А. Г. Ягола[1]

Рассматривается обратная задача для операторного уравнения $Az = u$. Точный оператор A и точная правая часть u не известны. Известны только их нижняя и верхняя оценки. Приводится способ вычисления верхней и нижней оценок точного решения при наличии априорной информации о его положительности и ограниченности. Получена апостериорная оценка погрешности приближенных решений, обсуждаются решения с оптимальной оценкой погрешности. Используется различная априорная информация о точном решении, например его монотонность или выпуклость. Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 11–01–00040-а и 09–01–00586-а) и Visby Program, Swedish Institute, Stockholm.

Ключевые слова: линейные некорректные задачи, оценка погрешности, упорядоченные пространства.

1. Введение. В настоящей статье рассматриваются операторные уравнения вида

$$Az = u, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{U}$, $A\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{U}$ — линейный инъективный оператор, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{U}$ — нормированные пространства.

Согласно определению, данному Адамаром, задача (1) называется корректно поставленной, если ее решение существует и единственно для всех $u \in \mathbb{U}$ и если оно непрерывно зависит от параметров задачи, т.е. малые изменения правой части u и оператора A вызывают малые изменения решения. К сожалению, зачастую в практически важных задачах последнее условие не выполняется. Во многих случаях для решения такого рода задач может применяться метод регуляризации Тихонова [12]. Решение, найденное таким способом, стремится к точному, если ошибка входных данных стремится к нулю.

Хорошо известно, что невозможно оценить погрешность приближенного решения некорректной задачи, если отсутствует дополнительная априорная информация о точном решении [12]. Для оценки погрешности может быть использована различная априорная информация: принадлежность точного решения некоторому компактному множеству $M \subset \mathbb{Z}$, его истокообразная представимость и др.

2. Схема оценки погрешности решения операторного уравнения. На практике точный оператор A и точная правая часть u не известны, известны лишь приближенный оператор A_h и приближенная правая часть u_δ, такие, что $\|u - u_\delta\| \leqslant \delta$ и $\|Az - A_h z\| \leqslant h\|z\|$. Пара $\eta = (h, \delta) > 0$ описывает погрешность входных данных.

Основная идея большинства методов оценки погрешности решения некорректных задач состоит в нахождении некоторого множества конечного диаметра, которому принадлежит точное решение (хотя бы при достаточно малых погрешностях) и в оценке расстояния от приближенного решения до его границы.

Рассмотрим случай, когда априори известно, что точное решение принадлежит компактному множеству $M \subset \mathbb{Z}$ [4–6]. Множество приближенных решений $Z_\eta = \bigl\{z \in M\colon \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|z\|\bigr\}$ имеет конечный диаметр [7]. Множество Z_η не является выпуклым, поэтому часто рассматривают другое множество приближенных решений: $Z_\eta^C = \bigl\{z \in M\colon \|A_h z - u_\delta\| \leqslant \delta + hC\bigr\}$, где $C = \max\limits_{z \in M} \|z\|$. Очевидно, что $Z_\eta \subseteq Z_\eta^C$. Рассмотрим функционал на Z_η^C: $\varphi(z) = \max\limits_{\zeta \in Z_\eta^C} \|\zeta - z\|$. Он интерпретируется как апостериорная оценка погрешности приближенного решения z. Заметим, что величина $\max\limits_{z \in Z_\eta^C} \varphi(z)$ является априорной оценкой погрешности решения уравнения (1).

Другой подход состоит в использовании истокообразной представимости точного решения [1, 7]. Пусть имеется априорная информация о точном решении $\overline{z}$: $\overline{z} = B\overline{v}$, $v \in \mathbb{V}$, где $\mathbb{V}$ — нормированное пространство, $B\colon \mathbb{V} \to \mathbb{Z}$ — линейный инъективный вполне непрерывный оператор. В качестве множества приближенных

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; Ю. М. Королев, аспирант, e-mail: um.korolev@physics.msu.ru; А. Г. Ягола, профессор, e-mail: yagola@physics.msu.ru

решений в этом случае может быть выбрано множество $Z_n = \{z \in \mathbb{Z}\colon z = Bv,\, v \in \mathbb{V},\, \|v\| \leqslant n\}$ для некоторого минимального n, для которого выполняется неравенство $\min\{\|Az - u_\delta\|\colon z \in Z_n\} \leqslant \delta$.

Несколько другой подход был предложен в работе [8]. Пусть решение z_η порождено регуляризирующим алгоритмом со стабилизатором $\Omega(z)$. Фиксируем константу $C > 1$. Вычислим $\Delta_\eta = C\|A_h z_\eta - u_\delta\|_U$ и $R_\eta = C\Omega(z_\eta)$. В этом случае множество $Z_\eta = \{z \in \mathbb{Z}\colon \Omega(z) \leqslant R_\eta,\, \|A_h z - u_\delta\|_U \leqslant \Delta_\eta\}$ можно выбрать в качестве множества приближенных решений.

В настоящей статье будет рассмотрена постановка задачи в частично упорядоченных пространствах. Помимо информации о принадлежности точного решения компакту, в качестве априорной информации будет использована его положительность и ограниченность (в смысле частичного порядка в пространстве $\mathbb{Z}$). Будет построено множество приближенных решений, заданное линейными ограничениями. Конечномерная аппроксимация переводит это множество в выпуклый многогранник, на котором и производится оценка погрешности.

3. Некоторые сведения из теории векторных решеток. Векторной решеткой [11] называется линейное пространство $\mathbb{X}$, в котором задано отношение частичного порядка “$\leqslant$” и для любых $x, y \in \mathbb{X}$ существуют их супремум $x \vee y$ и инфимум $x \wedge y$.

Векторная решетка $\mathbb{X}$ называется K-пространством (или полной векторной решеткой), если в ней всякое ограниченное сверху множество имеет супремум. Например, пространство $\mathbb{R}^n$ с введенным естественным порядком является K-пространством (супремум вычисляется покоординатно), а пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ (с естественным порядком) K-пространством не является [9].

Оператор $U\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ ($\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — векторные решетки) называется положительным, если $Ux \geqslant 0$ для любого $x \geqslant 0$. Оператор U называется регулярным, если $U = U_1 - U_2$, где U_1 и U_2 — положительные линейные операторы. Обозначим $L^\sim(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ пространство регулярных операторов из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$.

В пространстве $L^\sim(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ частичный порядок можно ввести следующим образом: $U_1 \geqslant U_2$, если $U_1 - U_2$ является положительным оператором.

4. Множество приближенных решений. Рассмотрим операторное уравнение $Az = u$, $z \in M \subset \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{U}$, где $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{U}$ — векторные решетки, $A \in L^\sim(\mathbb{Z}, \mathbb{U})$, M — выпуклое компактное множество априорных ограничений. Предположим, что M содержит информацию о положительности и ограниченности решения: $M \subset \{z \in \mathbb{Z}\colon 0 \leqslant z \leqslant c\}$. Пусть вместо точной правой части u и точного оператора A нам известны только их оценки снизу и сверху: $u^l \leqslant u \leqslant u^u$, $A^l \leqslant A \leqslant A^u$. Тогда (вследствие положительности точного решения $\overline{z}$) имеем $A^l\overline{z} \leqslant A\overline{z} = u \leqslant A^u\overline{z}$, $u^l \leqslant A\overline{z} = u \leqslant u^u$. Следовательно,

$$\begin{cases} A^l\overline{z} \leqslant u^u, \\ A^u\overline{z} \geqslant u^l. \end{cases} \tag{2}$$

Система неравенств (2) задает множество приближенных решений: $Z_{\text{app}} = \{z \in M\colon A^l z \leqslant u^u,\, A^u z \geqslant u^l\}$. Вследствие линейности операторов A^l и A^u это множество является выпуклым.

Если $\mathbb{Z}$ является K-пространством, то, вследствие ограниченности Z_{app} снизу и сверху, существуют супремум z^u и инфимум z^l множества приближенных решений Z_{app}, между которыми заключено точное решение: $\inf\limits_{z' \in Z_{\text{app}}} z' = z^l \leqslant \overline{z} \leqslant z^u = \sup\limits_{z' \in Z_{\text{app}}} z'$. Вообще говоря, z^l и z^u не принадлежат ни множеству приближенных решений Z_{app}, ни даже множеству априорных ограничений M.

В качестве примера можно рассмотреть множество измеримых на D функций. Введем на этом множестве отношение частичного порядка следующим образом. Пусть $\int\limits_\omega f\,d\mu \leqslant \int\limits_\omega g\,d\mu$ для любого подмножества $\omega \subset D$, имеющего ненулевую меру $\int\limits_\omega d\mu$. Тогда $f \leqslant g$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int\limits_D K(\xi, x) z(x)\,dx = u(\xi), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad \xi \in T \subset \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Здесь $K(\xi, x)$ — непрерывная функция на $T \times D$, $z \in L_2(D)$, $u \in C(T)$. Если известны верхняя и нижняя оценка ядра $K(\xi, x)$: $K^l(\xi, x) \leqslant K(\xi, x) \leqslant K^u(\xi, x)$, $(\xi, x) \in T \times D$, то справедливы следующие равенства:

$$A^l z = \int\limits_D K^l(\xi, x) z(x)\,dx, \quad A^u z = \int\limits_D K^u(\xi, x) z(x)\,dx.$$

5. Решения с оптимальной апостериорной оценкой погрешности. Рассмотрим функционал $\varphi(z) = \max\limits_{\zeta \in Z_{\text{app}}} \|\zeta - z\|$, заданный на выпуклом множестве приближенных решений Z_{app}. Он интерпретируется как апостериорная оценка погрешности приближенного решения $z \in Z_{\text{app}}$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Функционал $\varphi(z)$ является выпуклым.*

Доказательство. Рассмотрим $z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$, z_1, $z_2 \in Z_{\text{app}}$, $\lambda \in [0,1]$. Так как Z_{app} — выпуклое множество, то $z \in Z_{\text{app}}$ и

$$\|\zeta - z\| = \big\|\zeta - \lambda z_1 - (1-\lambda) z_2\big\| = \big\|\lambda(\zeta - z_1) + (1-\lambda)(\zeta - z_2)\big\| \leqslant \lambda\|\zeta - z_1\| + (1-\lambda)\|\zeta - z_2\|.$$

Следовательно,

$$\varphi(z) = \max_{\zeta \in Z_{\text{app}}} \|\zeta - z\| \leqslant \max_{\zeta \in Z_{\text{app}}} \big(\lambda\|\zeta - z_1\| + (1-\lambda)\|\zeta - z_2\|\big) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda \max_{\zeta \in Z_{\text{app}}} \|\zeta - z_1\| + (1-\lambda) \max_{\zeta \in Z_{\text{app}}} \|\zeta - z_2\| = \lambda\varphi(z_1) + (1-\lambda)\varphi(z_2),$$

что и доказывает утверждение.

Так как выпуклая функция достигает минимума на выпуклом ограниченном множестве, мы можем рассмотреть решение

$$z^* = \arg\min_{z \in Z_{\text{app}}} \varphi(z) = \arg\min_{z \in Z_{\text{app}}} \max_{\zeta \in Z_{\text{app}}} \|\zeta - z\|, \tag{4}$$

обладающее оптимальной апостериорной оценкой погрешности. В определенном смысле решение z^* является центром множества приближенных решений.

6. Конечномерная аппроксимация. Вернемся к уравнению (3). Рассмотрим конечное семейство подмножеств $\{\omega_i\}_{i=1}^n$, таких, что $\cup_{i=1}^n \omega_i = D$, $\omega_i \cap \omega_j = 0$, $i \neq j$. Аппроксимируем $z(x)$ кусочно-постоянной функцией $\widetilde{z}(x)$ так, что $\widetilde{z}(x) = \widetilde{z}_i = \int\limits_{\omega_i} z(x)dx$, $x \in \omega_i$. Обозначим вектор коэффициентов аппроксимации через $\widetilde{z}$. Введем сетку $\{\xi_j\}_{j=1}^m$ на T. Мы можем переписать (2) в виде

$$\sum_{i=1}^n S_{i,j}^l \widetilde{z}_i \leqslant u_j^u, \quad \sum_{i=1}^n S_{i,j}^u \widetilde{z}_i \geqslant u_j^l, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

где $u_j^{l,u} = u^{l,u}(\xi_j)$ и $S_{i,j}^{l,u} = \int\limits_{\omega_i} K^{l,u}(\xi_j, x)\, dx$.

Функцию $z(x)$ можно аппроксимировать и другими способами (например, кусочно-линейной функцией). В этом случае получатся другие выражения для $S_{i,j}^{l,u}$. Введем векторы $u^{l,u} = \big\{u_j^{l,u}\big\}$ и матрицы $S^{l,u} = \big\{S_{i,j}^{l,u}\big\}$. Перепишем (5) в матричной форме: $S^l\widetilde{z} \leqslant u^u$, $S^u\widetilde{z} \geqslant u^l$. Аппроксимируем выпуклое множество априорных ограничений $M \subset \mathbb{Z}$ выпуклым многогранником $\widehat{M} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда множеством приближенных решений будет выпуклый многогранник $\widehat{Z}_{\text{app}} = \big\{z \in \widehat{M} \colon S^l z \leqslant u^u,\, S^u z \geqslant u^l\big\}$.

Найдем инфимум $\widetilde{z}^l$ и супремум $\widetilde{z}^u$ множества приближенных решений $\widehat{Z}_{\text{app}}$. Так как $\widetilde{z} \in \widehat{Z}_{\text{app}}$, то $\widetilde{z}^l \leqslant \widetilde{z} \leqslant \widetilde{z}^u$: $\widetilde{z}_i^l = \arg\min\limits_{z \in \widehat{Z}_{\text{app}}} z_i$, $\widetilde{z}_i^u = \arg\max\limits_{z \in \widehat{Z}_{\text{app}}} z_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Эти задачи могут быть эффективно решены с использованием стандартных алгоритмов линейного программирования [3]. В своих численных экспериментах мы использовали стандартные программы пакета MATLAB®.

7. Вычисление апостериорной оценки погрешности. Для того чтобы найти величину погрешности $\varphi(z) = \max\limits_{\zeta \in Z_{\text{app}}} \|\zeta - z\|$, необходимо максимизировать выпуклую функцию на выпуклом многограннике $\widehat{Z}_{\text{app}}$, заданном в виде $\widehat{Z}_{\text{app}} = \{z \colon Gz \leqslant q\}$, где матричное неравенство $Gz \leqslant q$ состоит из неравенств $S^l z \leqslant u^u$ и $-S^u z \leqslant -u^l$, а также неравенств, описывающих множество априорных ограничений $\widehat{M}$.

Выпуклая функция, заданная на выпуклом многограннике, достигает своего наибольшего значения в его вершине (возможно, сразу в нескольких). Таким образом, наша задача — отыскать все вершины многогранника $\widehat{Z}_{\text{app}}$. Для этого используем следующий алгоритм [6]. Выберем исходный многогранник W_0 с известными вершинами, такой, что $\widehat{Z}_{\text{app}} \subset W_0$. Затем найдем его пересечение с полупространством $G_1 z \leqslant q_1$ (здесь G_1 — первая строка матрицы G). Это пересечение также является выпуклым многогранником.

Обозначим его через W_1. Будем продолжать процедуру нахождения пересечений с полупространствами $G_i z \leqslant q_i$ до $i = k$, где k — количество строк в матрице G. На последнем шаге получим $W_k = \widehat{Z}_{\rm app}$. Мы храним следующую информацию о многограннике: его вершины z^i, $i = 1, \dots, M$, а также матрицу связности C размера $M \times M$ с логическими элементами

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если есть ребро, связывающее вершины } i \text{ и } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На i-м шаге вершина j удаляется из списка вершин, если она не принадлежит полупространству $G_i z \leqslant q_i$. Для каждого ребра, соединяющего эту вершину с вершиной из i-го полупространства, мы находим его пересечение с гиперплоскостью $G_i z = q_i$ и вносим его в список вершин. Эту процедуру мы повторяем для всех вершин, не принадлежащих i-му полупространству.

После этого необходимо выяснить, какие пары новых вершин соединены ребрами в новом многограннике. Справедлив следующий критерий [10].

Теорема. *Пусть z_1, z_2 и z_3 — вершины многогранника W. Пусть P_1, P_2 и P_3 — множества гиперплоскостей, которым принадлежат вершины z_1, z_2 и z_3 соответственно. Тогда z_1 и z_2 соединены ребром в многограннике W тогда и только тогда, когда для любой вершины z_3 (отличной от z_1 и z_2) выполнено неравенство $(P_1 \cap P_2) \setminus P_3 \neq \emptyset$.*

Когда все вершины $\widetilde{z}^i$, $i = 1, \dots, M$, многогранника $\widehat{Z}_{\rm app}$ известны, нам остается лишь выбрать вершину $\widetilde{z}^k$, в которой достигается максимум нормы разности $\left\| \widetilde{z} - \widetilde{z}^k \right\|$ для приближенного решения $\widetilde{z}$.

Вычислительная сложность алгоритма сильно зависит от матрицы связности C. Пусть на i-м шаге число вершин, принадлежащих полупространству $G_i z \leqslant q_i$, равно n_1, а число вершин вне этого полупространства равно n_2 ($n_1 + n_2 = k$ — число вершин многогранника W_{i-1}). Тогда может появиться до $n_1 n_2$ новых вершин, т.е. многогранник W_i может иметь до $n_1(n_2+1)$ вершин. Эта величина имеет порядок k^2. В худшем случае (если матрица связности достаточно плотная) число вершин может расти экспоненциально с ростом числа шагов. Однако если матрица связности разреженная, число вершин растет не так быстро. В наших численных экспериментах мы обычно работали с многогранниками в 10-мерном пространстве (значение k порядка 1000) на обычных персональных компьютерах.

На рис. 1 представлена иллюстрация работы алгоритма в трехмерном пространстве.

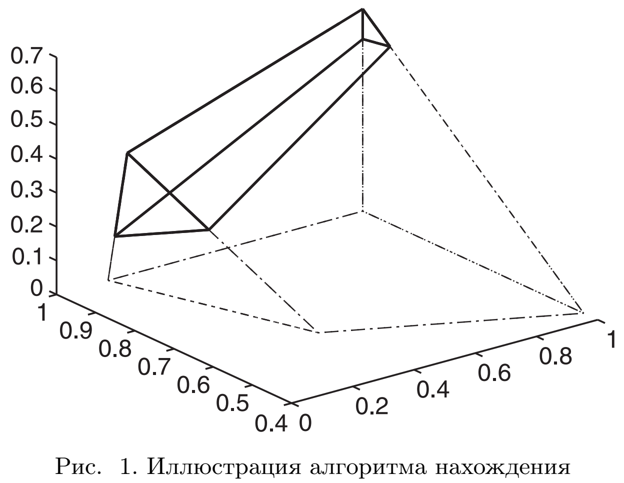

Рис. 1. Иллюстрация алгоритма нахождения вершин многогранника

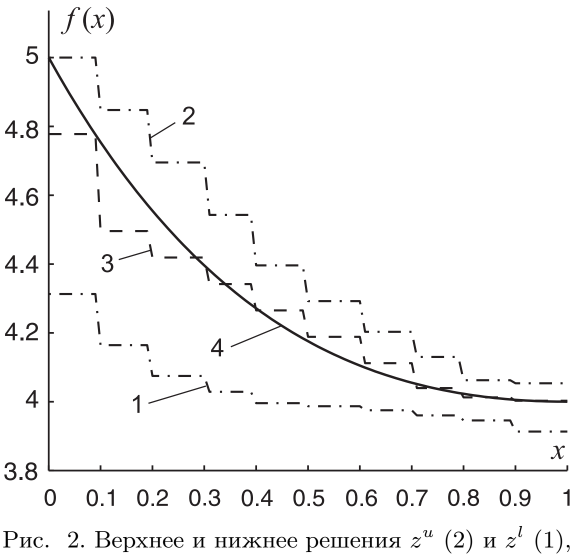

Рис. 2. Верхнее и нижнее решения z^u (2) и z^l (1), решение с оптимальной апостериорной оценкой погрешности z^* (3) для множества выпуклых монотонных функций, точное решение (4)

Чтобы найти решение с оптимальной оценкой погрешности (4), нужно минимизировать выпуклый функционал $\varphi(z)$ на выпуклом множестве $Z_{\rm app}$. Для этого можно использовать стандартные методы оптимизации, такие как метод проекций сопряженных градиентов или метод условного градиента (см., например, [2]).

8. Пример. Рассмотрим одномерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^1 K(\xi, x) z(x)\, dx = u(\xi)$$

с точным ядром $K(\xi, x) = \dfrac{1}{1+100(\xi - x)^2}$, $\xi \in [0,1]$. Пусть $z \in M \subset \mathbb{Z} = L_2[0,1]$, $u \in \mathbb{U} = C[0,1]$. Множество априорных ограничений M — множество выпуклых монотонно невозрастающих функций, являющееся компактом в L_p, $p \geqslant 1$. Кроме того, в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{U}$ введен частичный порядок естественным образом. Пусть точное решение есть $\overline{z} = 5 - xe^{1-x}$. Зная точное ядро и точное решение, мы можем вычислить точную правую часть $u(\xi)$. Предположим теперь, что нам известны лишь следующие оценки ядра и правой части: $K^l(\xi, x) = \dfrac{1}{1+(100+d)(\xi - x)^2}$, $K^u(\xi, x) = \dfrac{1}{1+(100-d)(\xi - x)^2}$, $u^l(\xi) = 0.999\, u(\xi)$, $u^u(\xi) = 1.001\, u(\xi)$, где $d > 0$ — известная ошибка в коэффициенте при $(\xi - x)^2$. В своих расчетах мы использовали значение $d = 1$.

Априорная информация о решении (положительность, ограниченность, монотонность и выпуклость) выражается следующими неравенствами:

$$0 \leqslant z_i \leqslant 5,\ i = 1, \dots, n; \quad -z_i + z_{i+1} \leqslant 0,\ i = 1, \dots, n-1; \quad -z_{i-1} + 2z_i - z_{i+1} \leqslant 0,\ i = 2, \dots, n-1.$$

На рис. 2 показаны нижнее и верхнее решения z^l и z^u (кривые 1 и 2), а также точное решение (кривая 4) в случае использования всей априорной информации. Число сегментов разбиения в данном примере равно 10, число точек для аппроксимации правой части также равно 10.

На том же рисунке показано решение, обладающее оптимальной оценкой погрешности (кривая 3). В этом примере полученное оптимальное значение относительной погрешности $\dfrac{\varphi(z^*)}{\|z^*\|_2}$ составило 0.04.

Приведенный пример показывает эффективность описанных методов оценки погрешности решения некорректной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dorofeev K., Yagola A.* The method of extending compacts and a posteriori error estimates for nonlinear ill-posed problems // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. **12**, N 6. 627–636.
2. *Luenberger D.* Linear and nonlinear programming. Reading: Addison-Wesley, 1984.
3. *Pedregal P.* Introduction to optimization. New York: Springer, 2003.
4. *Titarenko V., Yagola A.* The problems of linear and quadratic programming for ill-posed problems on some compact sets // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. **11**, N 3. 311–328.
5. *Titarenko V., Yagola A.* Linear ill-posed problems on sets of convex functions on two-dimensional sets // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2006. **14**, N 7. 735–750.
6. *Yagola A., Titarenko V.* Numerical methods and regularization techniques for the solution of ill-posed problems // Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice / Ed. by H. Orlande. Rio de Janeiro: E-papers, 2002. Vol. 1. 49–58.
7. *Yagola A., Titarenko V.* Using a priori information about a solution of an ill-posed problem for constructing regularizing algorithms and their applications // Inverse Problems in Science and Engineering. 2007. **15**, N 1. 3–17.
8. *Леонов А.С.* Об апостериорных оценках точности решения линейных некорректно поставленных задач и экстраоптимальных регуляризующих алгоритмах // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**, № 1. 18–28.
9. *Вулих Б.З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматлит, 1961.
10. *Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* Метод отсечения выпуклых многогранников и его применение к некорректным задачам // Вычислительные методы и программирование. 2000. **1**, №. 1. 10–15.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
12. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию
23.10.2011