

УДК 519.6

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРОВ ЧАСТИЦ АЭРОЗОЛЯ В АТМОСФЕРЕ НА МНОЖЕСТВЕ КУСОЧНО-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Я. Ван¹, Е Чжан², Д. В. Лукьяненко², А. Г. Ягола²

Рассматривается решение важной практической задачи восстановления функции распределения размеров частиц аэрозоля в атмосфере по измеренным значениям коэффициента поглощения различных длин волн излучения. Эта задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, для решения которого применяется алгоритм, основанный на минимизации функционала невязки методом сопряженных градиентов с проекцией на множество априорных ограничений. Ограничения выбираются в виде кусочно-выпуклых функций исходя из физических особенностей искомого решения. Предлагается эффективная схема регуляризации задач такого типа, множеством решений которых являются кусочно-выпуклые функции, показывается эффективность данного подхода. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 11-01-00040 и 10-01-91150-ГФЕН_а).

Ключевые слова: функция распределения размеров частиц аэрозоля в атмосфере, интегральные уравнения Фредгольма первого рода, метод проекции сопряженных градиентов, кусочно-выпуклые функции.

1. Введение. Хорошо известно, что характеристики частиц аэрозоля, которые могут быть описаны функцией распределения размеров частиц $n(r)$, играют очень важную роль в задачах моделирования климата [1]. В настоящее время используется несколько основных подходов к описанию этой функции распределения: распределение Юнга [2], Г-распределение и спектральное распределение Дейрменджана [3], логарифмическое нормальное распределение Гейзенберга [4] и распределение Вудкока [5]. Однако все эти подходы имеют определенные недостатки. Распределение Юнга и распределение Вудкока построены на основе обобщения экспериментальных наблюдений за аэрозолем и являются эмпирическими, поэтому их математические описания являются только приближительными. Логарифмическое нормальное распределение и Г-распределение, несмотря на свою простоту применения при решении практических задач, зачастую дают результаты, плохо совпадающие с экспериментальными измерениями. Из-за этих недостатков определение функции распределения размеров частиц аэрозоля остается важной задачей при исследовании распределения аэрозоля в атмосфере [6, 7]. Начиная с Ангстрема, который первым предложил теоретическое описание связи между размерами частиц аэрозоля в атмосфере и коэффициентом поглощения излучения определенной длины волны [8], возникла задача поиска распределения размеров частиц по измеренным значениям коэффициента поглощения излучения, прошедшего через атмосферу.

2. Постановка задачи. Если мы предположим, что частицы аэрозоля в атмосфере можно описать шаровыми частицами, показатели преломления вещества которых известны, то соотношение между оптической толщиной рассеяния аэрозолем излучения с определенной длиной волны и функцией распределения размеров частиц можно описать в следующей интегральной форме [9]:

$$\tau_{\text{aero}}(\lambda) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \pi r^2 Q_{\text{ext}}(r, \lambda, \eta) n(r, z) dz dr. \quad (1)$$

Здесь $n(r, z) dz$ — функция плотности частиц аэрозоля с радиусами частиц, лежащими в интервале между r и $r + dr$ на высоте z ; $Q_{\text{ext}}(r, \lambda, \eta)$ — эффективный фактор поглощения излучения с определенной длиной волны частицами аэрозоля по теории Ми [10]; η — комплексный показатель преломления; λ —

¹ Институт геологии и геофизики Китайской академии наук, 100029, Пекин, Китай; профессор, e-mail: yfwang@mail.iggcas.ac.cn

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва, Россия; Е Чжан, аспирант, e-mail: zhangye@physics.msu.ru; Д. В. Лукьяненко, мл. науч. сотр., e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru; А. Г. Ягола, профессор, e-mail: yagola@physics.msu.ru

длина волны излучения; $\tau_{\text{аеро}}$ — измеряемая величина оптической толщины рассеяния аэрозоля с помощью фотометра.

Если мы введем обозначение $n(r) = \int_0^{\infty} n(r, z) dz$, то уравнение (1) можно переписать в виде

$$\tau_{\text{аеро}}(\lambda) = \int_0^{\infty} \pi r^2 Q_{\text{ext}}(r, \lambda, \eta) n(r) dr.$$

В этом случае $n(r)$ играет роль функции плотности частиц аэрозоля радиуса r в сечении атмосферы. Эта функция показывает, что в единичном объеме атмосферы находится $n(r) dr$ частиц аэрозоля с радиусами, распределенными в интервале между r и $r + dr$.

Для решения вопроса об измерении оптической толщины рассеяния аэрозоля и эффективного фактора поглощения излучения частицами аэрозоля, т.е. данных, которые нам необходимы для решения соответствующего интегрального уравнения, используется следующая схема.

Будем считать, что оптическая толщина атмосферы τ зависит от молекулярного рассеяния (рэлеевского рассеяния), газовой аттенюации (на которую влияют, например, озон, водяной пар и т.д.) и непосредственно рассеяния самого аэрозоля. Таким образом, $\tau = \tau_r + \tau_{ab} + \tau_{\text{аеро}}$. Оптическую толщину молекулярного рассеяния вычислим по формуле Робинсона [9]

$$\tau_r(\lambda) = 0.00879 \lambda^{-4.09} \frac{P(z)|_{z=0} - P(z)|_{z=\text{top}}}{P_n(0)},$$

где $P(z)$ — атмосферное давление на высоте z , $P(z)|_{z=\text{top}}$ — атмосферное давление на верхней границе тропосферы и $P_n(0)$ — атмосферное давление на уровне моря при нормальных условиях. На оптическую толщину газовой аттенюации в области видимого излучения и в области инфракрасного излучения в основном влияют озон и водяной пар. В области, где поглощение излучения газами отсутствует, оптическая толщина газовой аттенюации равна нулю: $\tau_{ab} = 0$. Для оптической толщины атмосферы $\tau(\lambda)$ из закона Бугера–Ламберта–Бера мы можем получить следующую формулу для вычисления плотности потока энергии, падающего от Солнца на границу атмосферы: $E(\lambda) = E_0(\lambda) R^{-2} \exp(-m\tau(\lambda))$. Здесь R — расстояние между Солнцем и местом наблюдения (Земля), $E_0(\lambda)$ — излучение Солнца за границей атмосферы и m — масса атмосферы. Если в этой формуле заменить E напряжением V , которое является выходным сигналом солнечного фотометра, с помощью которого производятся измерения оптической толщины рассеяния аэрозоля, то предыдущая формула переписывается в виде $V(\lambda) = V_0 R^{-2} \exp(-m\tau(\lambda))$, из которой получается формула для вычисления оптической толщины атмосферы: $\tau(\lambda) = \frac{1}{m} \ln\left(\frac{V_0(\lambda)}{R^2} V(\lambda)\right)$.

В результате формула для вычисления оптической толщины рассеяния аэрозоля по результатам измерений, полученных с помощью солнечного фотометра, будет иметь вид

$$\tau_{\text{аеро}}(\lambda) = \frac{1}{m} \ln\left(\frac{V_0(\lambda)}{R^2} V(\lambda)\right) - 0.00879 \lambda^{-4.09} \frac{P(z)|_{z=0} - P(z)|_{z=\text{top}}}{P_n(0)}. \quad (2)$$

Эффективный фактор поглощения излучения частицами аэрозоля $Q_{\text{ext}}(r, \lambda, \eta)$ вычисляется следующим образом. Рассмотрим сечение поглощения энергии σ_{ext} , которое определяется как отношение между энергией W_{ext} , поглощенной атмосферой, и интенсивностью света I_0 , прошедшего сквозь атмосферу: $\sigma_{\text{ext}} = W_{\text{ext}}/I_0$. В этом случае эффективный фактор поглощения излучения можно определить по формуле $Q_{\text{ext}} = \sigma_{\text{ext}}/(\pi r^2)$. Если эту формулу записать в сферической системе координат, то получим

$$Q_{\text{ext}}(r, \lambda, \eta) = \frac{2}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re}(a_n + b_n), \quad (3)$$

где $z = 2\pi r/\lambda$, $a_n = a_n(x, m)$ и $b_n = b_n(x, m)$ — коэффициенты рассеяния по теории Ми [10]. Из законов электродинамики для рассеяния шаровых частиц, которыми являются частицы аэрозоля, следуют уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = i\kappa\eta^2 \mathbf{E}$ и $\text{rot } \mathbf{E} = -i\kappa \mathbf{H}$, где $\kappa = 2\pi/\lambda$. По теории Ми процедура решения этой системы уравнений Максвелла эквивалентна поиску такого набора комплексных чисел a_n и b_n , что для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} выполнены краевые условия на шаровой поверхности [7]. Если предположить, что

сферические граничные условия являются однородными, то коэффициенты рассеяния M_i определяются из формул

$$a_n(z, \eta) = \frac{\eta \psi_n(\eta z) \psi_n'(z) - \psi_n(z) \psi_n'(\eta z)}{\eta \psi_n(\eta z) \xi_n'(z) - \xi_n(z) \psi_n'(\eta z)}, \quad b_n(z, \eta) = \frac{\psi_n(\eta z) \psi_n'(z) - \eta \psi_n(z) \psi_n'(\eta z)}{\psi_n(\eta z) \xi_n'(z) - \eta \xi_n(z) \psi_n'(\eta z)},$$

где $\psi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{n+1/2}(z)$, $\xi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{n+1/2}(z) - i \sqrt{\frac{\pi z}{2}} N_{n+1/2}(z)$, $J_{n+1/2}(z)$ и $N_{n+1/2}(z)$ — функции Бесселя и Неймана порядка $n + 1/2$ соответственно.

Вернемся к нашей прикладной задаче. Из физических особенностей решения следует, что область, в которой распределены радиусы частиц аэрозоля, является отрезок $[0.1, 2.0]$ мкм. Частицы с радиусом меньшим, чем 0.1 мкм, плохо поглощают излучение, а значит, они практически не оказывают влияния на формирование климата, в связи с чем их можно исключить из рассмотрения. Сложнее всего поддаются описанию частицы, радиус которых больше 2.0 мкм (например, дождевые капли, град и т.д.), но если проводить экспериментальные измерения в хорошую погоду, в которую столь большие частицы отсутствуют, то ими тоже можно пренебречь. Поэтому практический интерес представляют частицы с радиусом, заключенным в интервале $[0.1, 2.0]$ мкм.

Функцию распределения размеров частиц аэрозоля обычно определяют как произведение функций $h(r)$ и $f(r)$: $n(r) = h(r) f(r)$, где $h(r)$ — быстрая убывающая функция, $f(r)$ — медленно меняющаяся функция. Исходя из того что большинство измерений функции распределения размеров частиц аэрозоля над континентами показывают, что эти функции могут быть описаны юнговским распределением $h(r) = r^{-(v^*+1)}$ [2], где v^* — константа формы частицы, которая обычно расположена в интервале $[2.0, 4.0]$ мкм, имеет смысл использовать $h(r)$ в виде указанного юнговского распределения в качестве весового коэффициента $f(r)$. Форма этой функции распределения размеров частиц похожа на рассмотренную в работе [11], где быстро меняющаяся функция может быть определена как $h(r) = Cr^{-3}$, что соответствует юнговскому распределению для значений r больших 0.1 мкм.

Для теоретического анализа нашей задачи удобно ввести операторное уравнение. Для этого сначала сформулируем несколько определений.

Определение 1. Интегральный оператор K , действующий из пространства \mathcal{F} ($\mathcal{C}[r_{\min}, r_{\max}]$ или $\mathcal{L}_2[r_{\min}, r_{\max}]$) в пространство \mathcal{T} ($\equiv \mathcal{L}_2$), называется оператором рассеяния аэрозоля, если для любой функции $n(r) \in \mathcal{F}$ имеет место представление $K[n] = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \pi r^2 Q_{\text{ext}}(r, \lambda, \eta) n(r) dr$, где Q_{ext} определяется по формуле (3).

Если известна быстро убывающая функция $h(r)$, то мы можем ввести новый интегральный оператор A , действующий также из пространства \mathcal{F} в пространство \mathcal{T} :

$$A[f] = K[n] = K[fh] = (Kf)[h] = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \pi r^2 Q_{\text{ext}}(r, \lambda, \eta) h(r) f(r) dr.$$

Теорема 1. Оператор рассеяния аэрозоля K (или A) является линейным, непрерывным, ограниченным и положительно определенным.

Доказательство. Линейность, непрерывность и ограниченность оператора рассеяния аэрозоля очевидна. Из равенства $(Kn, n)_{\mathcal{T}} = (\tau_{\text{аэро}}, n)_{\mathcal{T}} > 0$ легко получить его положительную определенность. Теорема доказана.

Замечание 1. Так как операторы K и A имеют одинаковые свойства, то далее мы рассматриваем только оператор A , также называемый оператором рассеяния аэрозоля. Очевидно, что все результаты, полученные для оператора A , остаются в силе и для оператора K .

В результате мы получаем операторное уравнение, к решению которого сводится наша задача:

$$Af = \tau_{\text{аэро}}. \tag{4}$$

Замечание 2. Из формулы (2) следует, что оптическая толщина аэрозоля (ОТА) может быть получена с помощью измерения плотности потока излучения от солнца фотометром, а затем неизвестная функция распределения частиц аэрозоля может быть восстановлена по измеренным значениям ОТА исходя из уравнения (4). Этот метод называется спектрометрией насыщения поглощения, который широко используется на практике.

Замечание 3. Известно, что для любой непрерывной функции $f(r)$ (либо принадлежащей пространству $C[r_{\min}, r_{\max}]$, либо принадлежащей пространству $\mathcal{L}_2[r_{\min}, r_{\max}]$) задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (4) является некорректно поставленной, в связи с чем обычная трактовка процедуры решения часто неприменима к нашей задаче. В связи с этим возникает принципиально новое понятие регуляризующего алгоритма (РА) для решения некорректных задач, введенное А. Н. Тихоновым в 1948 г. Имеются различные регуляризующие методы и итерационные алгоритмы [12–14], но вариационные РА особенно удобны с той точки зрения, что в них легко включать дополнительные априорные ограничения на решение задачи, задавая множество априорных ограничений \mathcal{F} соответствующим образом. Кроме того, изложенные вариационные РА часто имеют оптимальный порядок точности [15–17]. Наиболее известны три вариационных РА — метод регуляризации А. Н. Тихонова (в общей форме), обобщенный метод невязки (ОМН) и обобщенный метод квазирешений (ОМК) [17].

Замечание 4. В данной работе мы предлагаем эффективный регуляризующий алгоритм решения поставленной задачи, основанный на минимизации функционала невязки методом сопряженных градиентов с проекцией на множество кусочно-выпуклых функций. В нашем методе параметром регуляризации является число и положение точек перегиба.

3. Общая схема поиска приближенного решения и оценки погрешности. Пусть априори известно, что точное решение задачи \bar{f} принадлежит множеству кусочно-выпуклых функций $\tilde{\mathcal{F}} (\subseteq \mathcal{F})$. В работе [17] доказано, что множество выпуклых (вверх или вниз) функций является компактным в \mathcal{L}_p при $p > 1$. Тогда нетрудно доказать, что множество кусочно-выпуклых функций $\tilde{\mathcal{F}}$, которое имеет конечное число точек перегиба, тоже является компактным в \mathcal{L}_p ($p > 1$).

Оператор A взаимно-однозначно отображает $\tilde{\mathcal{F}}$ на $A\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{T}$. Будем считать, что оператор A задан точно, а вместо точной правой части $\bar{\tau} \in A\tilde{\mathcal{F}}$ известна приближенная правая часть $\tau_\delta \in \mathcal{T}$, которая, вообще говоря, может и не принадлежать множеству $A\tilde{\mathcal{F}}$. Кроме того, в нашей работе отклонение приближенной правой части τ_δ от точной $\bar{\tau}$ будем оценивать следующими двумя способами:

- 1) $\|\tau_\delta - \bar{\tau}\|_{\mathcal{T}} \leq \delta, \quad \delta \geq 0;$
- 2) $|\tau_\delta(\lambda) - \bar{\tau}(\lambda)| \leq \tilde{\delta}(\lambda),$ где $\tilde{\delta}(\lambda) \geq 0$ для всех $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ и $\tilde{\delta}(\lambda) \in \mathcal{T}$.

Согласно теореме В. К. Иванова [15] в качестве приближенного решения уравнения (4) можно принять любой элемент из множества

$$\mathcal{F}_\delta^\delta = \left\{ f \in \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} : \|Af - \tau_\delta\|_{\mathcal{T}} \leq \delta \right\}. \quad (5)$$

Поскольку $\bar{f}, f_\delta \in \tilde{\mathcal{F}}$, а $\tilde{\mathcal{F}}$ — компакт в \mathcal{F} , то $f_\delta \rightarrow \bar{f}$ в \mathcal{F} при $\delta \rightarrow 0$.

Если погрешность правой части задана коридором ошибок, т.е. известна такая неотрицательная функция $\tilde{\delta}(\lambda)$, что для любого $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ выполняется неравенство $|\tau_\delta(\lambda) - \bar{\tau}(\lambda)| \leq \tilde{\delta}(\lambda)$, то в качестве приближенного решения f_δ естественно искать элемент из множества

$$\mathcal{F}_{0\tilde{\mathcal{F}}}^\delta = \left\{ f(r) \in \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} : |(Af(r))(\lambda) - \tau_\delta(\lambda)| \leq \tilde{\delta}(\lambda) \right\}. \quad (6)$$

Если положить $\delta = \|\tilde{\delta}\|_{\mathcal{T}}$, то справедливо включение $\mathcal{F}_{0\tilde{\mathcal{F}}}^\delta \subset \mathcal{F}_\delta^\delta$. Поэтому все результаты, полученные для множества (5), остаются в силе и для множества (6).

Под погрешностью фиксированного приближенного решения $f_\delta^* \in \mathcal{F}_\delta^\delta$ (или $f_\delta^* \in \mathcal{F}_{0\tilde{\mathcal{F}}}^\delta$) задачи (4) с приближенно заданной правой частью τ_δ на компактном множестве априорных ограничений $\mathcal{F}_{0\tilde{\mathcal{F}}}^\delta \subset \mathcal{F}_\delta^\delta$ естественно использовать величину $\varepsilon(\delta) = \sup_{f \in \mathcal{F}_{0\tilde{\mathcal{F}}}^\delta} \|f_\delta^* - f\|_{\mathcal{F}}$.

Ясно, что $\|f_\delta^* - \bar{f}\|_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon(\delta)$. Следует отметить, что вопрос о погрешности отклонения приближенного решения некорректной задачи (4) от точного решения имеет смысл лишь тогда, когда $\mathcal{F}_{0\tilde{\mathcal{F}}}^\delta$ — компакт в \mathcal{F} . В этом случае $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

При практическом решении задачи в качестве фиксированного приближенного решения может быть выбран, в принципе, любой элемент из множества $\mathcal{F}_\delta^\delta$ (или $\mathcal{F}_{0\tilde{\mathcal{F}}}^\delta$), поэтому под оценкой погрешности решения будем понимать диаметр множества приближенных решений:

$$\varepsilon(\delta) = \text{diam } \mathcal{F}_\delta^\delta \left(\text{diam } \mathcal{F}_{0\tilde{\mathcal{F}}}^\delta \right) = \sup_{f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{0\tilde{\mathcal{F}}}^\delta} \|f_1 - f_2\|_{\mathcal{F}}.$$

Однако оценку погрешности можно понимать и как оценку погрешности в каждой точке области определения. В этом случае под оценкой погрешности приближенного решения $f_\delta(r)$ подразумевается

функция $\epsilon(\delta, r)$, которая для каждой точки $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ имеет вид $\epsilon(\delta, r) = \sup_{f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{F}}}^\delta(\mathcal{F}_0^\delta)} |f_1 - f_2|$. Тогда

для любого приближенного решения имеем $f_\delta \in \mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{F}}}^\delta$ ($f_\delta \in \mathcal{F}_0^\delta$): $\|f_\delta - \bar{f}\|_{\mathcal{F}} \leq \epsilon(\delta)$ или $|f_\delta - f_2| \leq \epsilon(\delta, r)$, $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$.

Теперь покажем, что в случае, когда точное решение некорректно поставленной задачи кусочно-выпукло, для построения приближенного решения нет необходимости знать константу, ограничивающую точное решение задачи сверху.

Теорема 2 [17]. Пусть $\tilde{\mathcal{F}}$ — множество выпуклых ограниченных неотрицательных функций. Введем множество таких функций $\check{\mathcal{F}}(\delta)$ из множества $\tilde{\mathcal{F}}$, что $\|Af - \tau_\delta\| \leq \delta$. Пусть δ_n — произвольная последовательность, такая, что $\delta_n \rightarrow 0$ справа при $n \rightarrow \infty$, и пусть f_n — произвольный элемент $\check{\mathcal{F}}(\delta_n)$. Тогда существует такая константа $C > 0$, что для всех n выполнено неравенство $f_n(r) \leq C$ при всех $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$.

Теорема 3. Пусть f_n — произвольный элемент из множества $\mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\delta_n}$. Тогда функция $f_n(r)$ ограничена при всех $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$.

Доказательство. Предположим, что имеется k точек перегиба (k — натуральное число). Так как множество $\mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\delta_n}$ кусочно-выпуклое, то на каждом сегменте между двумя точками перегиба (т.е. на сегменте постоянной выпуклости) наша функция является ограниченной. Из предыдущей теоремы следует, что $0 \leq f_n(r) \leq \max\{C_1, \dots, C_k\}$, где C_1, \dots, C_k — точные верхние грани на каждом сегменте постоянной выпуклости. Теорема доказана.

4. Конечномерная аппроксимация. Переход к конечномерной аппроксимации будем рассматривать как внесение погрешности в оператор и будем применять алгоритмы, позволяющие ее учитывать. При построении конечно-разностной аппроксимации прежде всего выберем равномерные сетки χ_r и χ_λ с шагами h_r и h_λ : на отрезке $[r_{\min}, r_{\max}]$ сетку $\chi_r = \{r_j\}_{j=1}^N$, на отрезке $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ сетку $\chi_\lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^M$. Сеточные значения $f(r)$ и $\tau(\lambda)$ обозначим следующим образом: $f(r_i) = f_i$, $\tau(\lambda_j) = \tau_j$. Везде далее предполагаем, что существуют точные $\bar{f}(r)$, $\bar{\tau}(\lambda)$, удовлетворяющие уравнению (4), но вместо точной правой части $\bar{\tau}(\lambda)$ и точных сеточных значений $\bar{\tau}_j$, соответствующих $\bar{\tau}(\lambda)$, заданы векторы $\hat{\tau}_\delta = (\tau_1^\delta, \dots, \tau_M^\delta)$ и $\hat{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_M)$, такие, что $-\delta_j \leq \bar{\tau}_j - \tau_j^\delta \leq \delta_j$, $j = 1, \dots, M$.

Теперь построим конечномерное множество приближенных решений задачи. Заменим функцию $f(r)$ кусочно-линейной функцией $f_N(r)$: $f_N(r) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{r_{i+1} - r_i}(r - r_i)$, где $r \in [r_i, r_{i+1}]$, $i = 1, \dots, N - 1$. Через $\tau_N(\lambda)$ обозначим функцию $(Af_N)(r)$. Введем оператор A_N , связанный с конечномерной аппроксимацией исходной задачи: $(A_N f(r))(\lambda) \equiv \tau_N(\lambda)$ для всех $f \in \mathcal{F}$. В силу ограниченности нормы оператора $A_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{T}}$ имеем $\|A_N f - Af\|_{\mathcal{T}} = \|A(f_N - f)\|_{\mathcal{T}} \leq L\|(f_N - f)\|_{\mathcal{F}}$. Так как $\tilde{\mathcal{F}}$ — компакт в \mathcal{F} , то для любой $f \in \tilde{\mathcal{F}}$: $\|(f_N - f)\|_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, с учетом (5) в качестве множества приближенных решений можно принять

$$\mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{F}}}^{\delta, L} = \left\{ f \in \tilde{\mathcal{F}} : \|A_N f - \tau_\delta\|_{\mathcal{T}} \leq L\|(f_N - f)\|_{\mathcal{F}} + \delta \right\},$$

где δ — погрешность правой части. Очевидно, что если норму $\|(f_N - f)\|_{\mathcal{F}}$ заменить ее оценкой сверху, а именно величиной $H(N) = \sup\{\|(f_N - f)\|_{\mathcal{F}} : f \in \tilde{\mathcal{F}}\}$, то $\mathcal{F}_{\tilde{\mathcal{F}}}^\Delta = \{f \in \tilde{\mathcal{F}} : \|A_N f - \tau_\delta\|_{\mathcal{T}} \leq \Delta\}$, где $\Delta = LH(N) + \delta$ — заданная константа (при фиксированном N). Для завершения перехода к конечномерной задаче теперь достаточно аппроксимировать норму в пространстве \mathcal{T} ($\equiv \mathcal{L}_2[r_{\min}, r_{\max}]$).

Рассмотрим функционал невязки

$$\Phi(f) = \|A_N f - \tau_\delta\|_{\mathcal{L}_2[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]}^2 = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \left[\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} A_n(\lambda, r) f(r) dr - \tau_\delta(\lambda) \right]^2 d\lambda.$$

Используя для аппроксимации интегралов формулу трапеций, получим

$$\hat{\Phi}(\hat{f}) = \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j h_r^j - \tau_i \right)^2 h_\lambda^i, \tag{7}$$

$$a_{ij} = A_h(\lambda_i, r_j), \quad h_r^j = \begin{cases} \frac{r_{\max} - r_{\min}}{N - 1}, & j = 2, \dots, N - 1, \\ \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2(N - 1)}, & j = 1, N, \end{cases} \quad h_\lambda^i = \begin{cases} \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{N - 1}, & i = 2, \dots, N - 1, \\ \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2(N - 1)}, & i = 1, N. \end{cases}$$

Погрешность правой части δ может быть найдена по формуле $\delta^2 \approx \sum_{i=1}^M \delta_i^2 h_\lambda^i$. Пусть $\widehat{\mathcal{F}}$ — множество априорных ограничений на вектор сеточных значений \widehat{f} (вектор с координатами f_j размерности N). Так как $\widehat{\mathcal{F}}$ — замкнутый выпуклый ограниченный многогранник в \mathbb{R}^N , то $\widehat{\mathcal{F}}$ является компактным в \mathbb{R}^N , и в качестве конечномерного множества приближенных решений задачи можно принять $\mathcal{F}_{\widehat{\mathcal{F}}}^\Delta$: $\mathcal{F}_{\widehat{\mathcal{F}}}^\Delta = \{\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{F}} : \widehat{\Phi}(\widehat{f}) \leq \Delta\}$.

Теперь рассмотрим другой подход к построению конечномерного множества приближенных решений задачи. Этот подход похож на рассмотренный в [18], но сначала сделаем некоторые дополнительные предположения о свойствах интегрального уравнения (4).

1. Существуют функции $\varphi_j^l(r)$, $\varphi_j^r(r)$, $\psi^l(r)$, $\psi^r(r)$, такие, что $\forall f(r) \in \widetilde{\mathcal{F}} : f_N^l(r) \leq f(r) \leq f_N^r(r)$ на отрезке $[r_{\min}, r_{\max}]$: $f_N^l(r) = \sum_{j=1}^N \varphi_j^l(r) f_j + \psi^l(r)$, $f_N^r(r) = \sum_{j=1}^N \varphi_j^r(r) f_j + \psi^r(r)$, где $f_j = f(r_j)$, $j = 1, \dots, N$.

2. Функции $(Af_N^l(r))(\lambda)$ и $(Af_N^r(r))(\lambda)$ могут быть получены аналитически.

Функция распределения размеров частиц аэрозоля $f(r)$ больше нуля, интегральный оператор рассеяния аэрозоля \mathcal{A} положительно определен, тогда для всех функций $f(r) \in \widetilde{\mathcal{F}} : f_N^l(r) \leq f(r) \leq f_N^r(r)$ и любого λ справедливо неравенство

$$(Af_N^l(r))(\lambda) \leq (Af(r))(\lambda) \leq (Af_N^r(r))(\lambda). \quad (8)$$

Используя разложения $f_N^l(r)$, $f_N^r(r)$ по \widehat{f} и интегрируя (8), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N v_j^l(\lambda) f_j &\leq \tau(\lambda) - \omega^l(\lambda), & \sum_{j=1}^N v_j^r(\lambda) f_j &\leq -\tau(\lambda) + \omega^r(\lambda), & v_j^l(\lambda) &= \int_{\Pi} A(\lambda, r) \varphi_j^l(r) dr, \\ v_j^r(\lambda) &= - \int_{\Pi} A(\lambda, r) \varphi_j^r(r) dr, & \omega^l(\lambda) &= \int_{\Pi} A(\lambda, r) \psi^l(r) dr, & \omega^r(\lambda) &= \int_{\Pi} A(\lambda, r) \psi^r(r) dr, \end{aligned}$$

где $\Pi = \{\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}, r_{\min} \leq r \leq r_{\max}\}$. Поскольку при практическом решении задачи вместо точной функции $\tau(\lambda)$ известны векторы $\widehat{\tau}_\delta$, $\widehat{\delta}$ такие, что $-\delta_i \leq \widehat{\tau}_i - \tau_i^\delta \leq \delta_i$, $i = 1, \dots, M$, то для всех $i = 1, 2, \dots, M$ выполняются следующие неравенства:

$$\sum_{j=1}^N v_{i,j}^l f_j \leq \tau_i^\delta + \delta_i - \omega_i^l, \quad \sum_{j=1}^N v_{i,j}^r f_j \leq -\tau_i^\delta + \delta_i + \omega_i^r, \quad (9)$$

где $v_{i,j}^l = v_j^l(\lambda_i)$, $v_{i,j}^r = v_j^r(\lambda_i)$, $\omega_i^l = \omega^l(\lambda_i)$ и $\omega_i^r = \omega^r(\lambda_i)$.

Неравенства (9) задают уравнения полупространств, ограниченных гиперплоскостями. Согласно исходным предположениям вектор \widehat{f} принадлежит выпуклому многограннику $\widehat{\mathcal{F}}$. Поэтому в качестве конечномерного множества приближенных решений можно принять $\mathcal{F}_{\widehat{\mathcal{F}}}^\Delta = \{\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{F}} : \widehat{G}\widehat{f} \leq \widehat{g}\}$, где \widehat{G} — матрица размерности $2M \times N$ и \widehat{g} — вектор размерности $2M$:

$$\widehat{G} = \begin{pmatrix} v_{1,1}^l & \dots & v_{1,N}^l \\ v_{2,1}^l & \dots & v_{2,N}^l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{M,1}^l & \dots & v_{M,N}^l \\ v_{1,1}^r & \dots & v_{1,N}^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{M,1}^r & \dots & v_{M,N}^r \end{pmatrix}, \quad \widehat{g} = \begin{pmatrix} \tau_1^\delta + \delta_1 - \omega_1^l \\ \tau_2^\delta + \delta_2 - \omega_2^l \\ \vdots \\ \tau_M^\delta + \delta_M - \omega_M^l \\ -\tau_1^\delta + \delta_1 + \omega_1^r \\ \vdots \\ -\tau_M^\delta + \delta_M + \omega_M^r \end{pmatrix}.$$

Множество $\mathcal{F}_{\widehat{\mathcal{F}}}^\Delta$ представляет собой замкнутый выпуклый ограниченный многогранник, образованный пересечением многогранника $\widehat{\mathcal{F}}$ и выпуклого многогранного множества $\widehat{G}\widehat{f} \leq \widehat{g}$.

Погрешность аппроксимации в данном случае учитывается автоматически. Фиксированное приближенное решение может быть найдено с помощью минимизации квадратичной функции (7) на множестве $\mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}$.

$$\text{Обозначим: } \varepsilon(\Delta) = \text{diam } \mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}(\text{diam } \mathcal{F}_0^{\Delta}) = \sup_{f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}(\mathcal{F}_0^{\Delta})} \|f_1 - f_2\|_{\mathcal{F}}, \quad \epsilon(\Delta, r) = \sup_{f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}(\mathcal{F}_0^{\Delta})} |f_1 - f_2|.$$

Рассмотрим простой с точки зрения численной реализации алгоритм нахождения погрешностей $\varepsilon(\Delta)$ и $\epsilon(\Delta, r)$, который основан на нахождении функций $f^l(r)$ и $f^r(r)$, ограничивающих множество приближенных решений $\mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}$ (или \mathcal{F}_0^{Δ}) снизу и сверху соответственно, т.е. таких функций $f^l(r)$, $f^r(r)$, что $\forall f(r) \in \mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}(f(r) \in \mathcal{F}_0^{\Delta}) : f^l(r) \leq f(r) \leq f^r(r)$ на отрезке $[r_{\min}, r_{\max}]$. В этом случае $\varepsilon(\Delta) \leq \|f^r - f^l\|_{\mathcal{F}}$ и $\epsilon(\Delta, r) = f^r(r) - f^l(r)$, где $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$.

Для построения функций $f^r(r)$, $f^l(r)$ поступим следующим образом. Вычислим минимальные и максимальные значения, которые может принимать каждая координата вектора \hat{f} на множестве $\mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}$ или \mathcal{F}_0^{Δ} . Обозначим их как f_j^l и f_j^r , $j = 1, 2, \dots, N$. Эти значения определяют погрешность любого конечномерного решения в n точках: $\forall \hat{f} \in \mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}(\hat{f} \in \mathcal{F}_0^{\Delta}) : f_j^l \leq f(r_j) \leq f_j^r$, $j = 1, 2, \dots, N$. Задача поиска f_j^r сводится к минимизации линейной функции $\phi(\hat{f}) = \pm f_j$ на множестве $\mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}$ или \mathcal{F}_0^{Δ} , т.е. $f_j^l = \inf \{f_j : \hat{f} \in \mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}(\hat{f} \in \mathcal{F}_0^{\Delta})\}$, $f_j^r = \inf \{-f_j : \hat{f} \in \mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}(\hat{f} \in \mathcal{F}_0^{\Delta})\}$, $j = 1, 2, \dots, N$. Если в качестве конечномерного множества приближенных решений рассматривается множество $\mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}$, которое представляет собой выпуклый многогранник, то необходимо решить $2N$ задач линейного программирования, например с помощью симплекс-метода или его модификаций [19, 22]. Если в качестве конечномерного множества приближенных решений рассматривается множество \mathcal{F}_0^{Δ} , то его можно аппроксимировать некоторым выпуклым многогранником $\mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta} \subseteq \hat{\Sigma}$ и затем также решить $2N$ задач линейного программирования. В этом случае интерес представляют некоторые методы, описанные в работе [19]. Потом по найденным сеточным значениям f_j^l и f_j^r , $j = 1, 2, \dots, N$, используя специфику каждого множества $\hat{\mathcal{F}}$, которое зависит от количества точек перегиба, построим функции $f^l(r)$ и $f^r(r)$, такие, что $f^l(r) \leq \inf \{f(r) : f \in \mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}(f \in \mathcal{F}_0^{\Delta})\}$ и $f^r(r) \geq \sup \{f(r) : f \in \mathcal{F}_{\hat{\mathcal{F}}}^{\Delta}(f \in \mathcal{F}_0^{\Delta})\}$.

5. Метод точек перегиба. Теперь рассмотрим задачу поиска квазирешения (псевдорешения в случае, если $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$) операторного уравнения (4), т.е. экстремальную задачу $\min_{\hat{f} \in \hat{\mathcal{F}}} \hat{\Phi}[\hat{f}]$. Существованию решения этой экстремальной задачи отвечает теорема Вейерштрасса [20, 21]. Введем понятие параметра регуляризации для нашего нового метода.

Определение 2. Будем говорить, что $\alpha = (P, \mathbf{k})$ — параметр регуляризации метода точек перегиба, где P — количество точек перегиба и $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_P)$ — номера узлов сетки, в котором расположены точки перегиба, т.е. $k_p = \arg \min_{k_p=2, N-1} |f(r_{k_p}) - f(r_p^*)|$ при $p = 1, \dots, P$. Обозначим вектор метода точек перегиба через $\mathbf{r}^* = (r_1^*, \dots, r_P^*)$.

Замечание 5. Для априорного выбора параметра регуляризации метода точек перегиба (т.е. если мы знаем количество точек перегиба и их положения) множество решений дает систему ограничений в виде неравенств. Используя метод проекции сопряженных градиентов с этими ограничениями, нам нетрудно найти решение поставленной задачи. В реальных задачах нам удобно использовать апостериорные методы из-за отсутствия достаточной информации. В нашей работе для апостериорного выбора параметра регуляризации метода точек перегиба принимаем метод обобщенной невязки [17].

5.1. Случай одной точки перегиба. Пусть априорно известно, что решение имеет только одну точку перегиба, т.е. $P = 1$. Пусть $\hat{\mathcal{F}}$ — пространство функций решения, у которой имеется только одна точка перегиба (но мы при этом не знаем, является ли функция выпуклой или вогнутой до точки перегиба, — поэтому у нас имеется два варианта!). Тогда множество приближенных решений задачи можно задать как $\hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{F}}^1 \cup \hat{\mathcal{F}}_1$, где $\hat{\mathcal{F}}^1 = -\hat{\mathcal{F}}_1$ и

$$\hat{\mathcal{F}}^1 = \left\{ f \in \hat{\mathcal{F}}^1 \subseteq \mathbf{K} \mid \exists! r \in \mathbb{R}_+, \forall x^1 < y^1 < r < x^2 < y^2 : \right. \\ \left. f\left(\frac{x^1 + y^1}{2}\right) \leq \frac{f((x^1) + (y^1))}{2}, \quad f\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \geq \frac{f((x^2) + (y^2))}{2} \right\}.$$

В этом случае алгоритм решения будет состоять из пяти шагов.

Шаг 1 (положение точки перегиба известно). Пусть r^* — точка перегиба и k — номер узла сетки, в котором расположена точка перегиба, т.е. $k = \arg \min_{k=2, N-1} |f(r_k) - f(r^*)|$. Тогда матрица ограничений может быть записана в виде

$$\widehat{\mathcal{F}}_1 = \begin{pmatrix} -2f_1 + f_2 \leq 0, & i = 1, \\ f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} \leq 0, & i = 2, \dots, k-1, \\ -f_{i-1} + 2f_i - f_{i+1} \leq 0, & i = k+1, \dots, N-1, \\ 2f_{N-1} - f_N \leq 0, & i = N \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathcal{F}}^1 = -\widehat{\mathcal{F}}_1 = \begin{pmatrix} 2f_1 - f_2 \leq 0, & i = 1, \\ -f_{i-1} + 2f_i - f_{i+1} \leq 0, & i = 2, \dots, k-1, \\ f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} \leq 0, & i = k+1, \dots, N-1, \\ -2f_{N-1} + f_N \leq 0, & i = N \end{pmatrix}.$$

Используя метод проекции сопряженных градиентов с этими ограничениями, мы можем решить задачу минимизации $\min_{f \in \widehat{\mathcal{F}}^1 \cup \widehat{\mathcal{F}}_1} \Phi[f]$ (заметим, что теперь наша задача уже является корректно поставленной!).

Шаг 2 (отыскание положения точки перегиба). Для случая только одной точки перегиба задача может быть решена полным перебором всех возможных положений точки перегиба на заданной сетке при конечно-разностной аппроксимации задачи, т.е. мы для каждой возможной точки перегиба задаем соответствующую ей матрицу ограничений и ищем решение задачи. Затем среди всех полученных решений мы выбираем то, невязка которого является минимальной. Очевидно, что длительность полного перебора зависит от количества всех возможных положений точек перегиба N , т.е. нам нужно решить N задач квадратичного программирования.

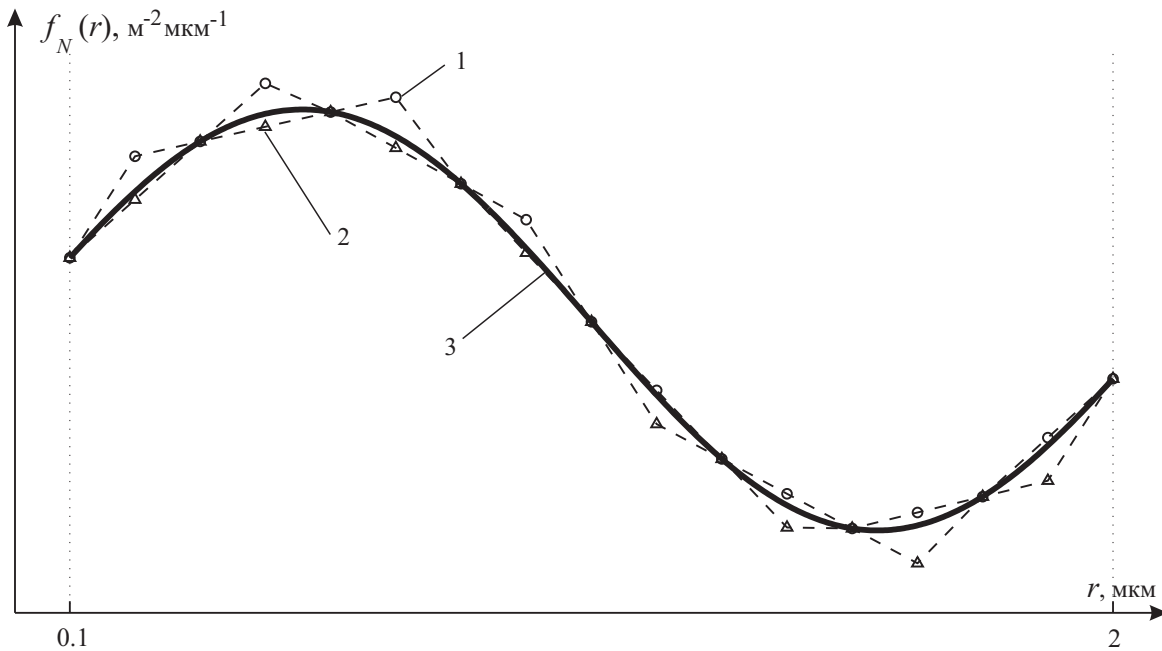


Рис. 1. Квазиверхнее $f_N^r(r)$ (1, -o-) и квазинижнее $f_N^l(r)$ (2, -Δ-) решения, построенные по сеточным значениям функции $f_N(r)$, точное решение — кривая 3

Шаг 3 (поиск функций $f_N^l(r)$, $f_N^r(r)$, $\varphi_i^l(r)$, $\varphi_i^r(r)$, $\psi^l(r)$, $\psi^r(r)$). Для полученного приближенного вектора $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{F}}$ сеточных значений функции $f(r)$ построим функции $f_N^l(r)$ и $f_N^r(r)$, которые будем называть квазиверхним и квазинижним решениями. Так как при выполнении шага 2 приближенное решение уже найдено и определено множество всех возможных приближенных решений, то на текущем шаге мы можем предположить, что множество $\widehat{\mathcal{F}}$ совпадает с множеством $\widehat{\mathcal{F}}^1$.

Обозначим: $f_N^l(r) = \begin{cases} f_N^{l1}(r), & \text{если } 1 \leq r \leq r^*, \\ f_N^{l2}(r), & \text{если } r^* \leq r, \end{cases} \quad f_N^r(r) = \begin{cases} f_N^{r1}(r), & \text{если } 1 \leq r \leq r^*, \\ f_N^{r2}(r), & \text{если } r^* \leq r. \end{cases}$

Очевидно, что $f_N^{l_1}(r), f_N^{r_1}(r)$ принадлежат множеству выпуклых вверх функций, а $f_N^{l_2}(r), f_N^{r_2}(r)$ принадлежат множеству выпуклых вниз функций. Сначала рассмотрим $f_N^{l_1}(r)$.

Исходя из определения выпуклой вверх функции, получаем на отрезке $[r_i, r_{i+1}]$:

- 1) $f(r) \geq f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{r_{i+1} - r_i} (r - r_i)$ при $i = 1, \dots, k - 1$,
- 2) $f(r) \leq f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} (r - r_{i-1})$ при $i = 2, \dots, k$,
- 3) $f(r) \leq f_{i+1} + \frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{r_{i+2} - r_{i+1}} (r - r_{i+1})$ при $i = 1, \dots, k - 2$.

Тогда функция $f_N^{l_1}(r)$ является кусочно-линейной функцией, соединяющей точки (r_i, f_i) при $i \leq k$ (рис. 1). Таким образом,

$$\varphi_i^{l_1}(r) = \begin{cases} \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i}, & r \in [r_i, r_{i+1}], \quad i = 1, \dots, k - 1, \\ \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}, & r \in [r_{i-1}, r_i], \quad i = 2, \dots, k. \end{cases} \quad (10)$$

Функция $f_N^{r_1}(r)$ является нелинейной функцией вектора \hat{f} при $r \leq r^*$:

$$f_N^{r_1}(r) = \begin{cases} f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} (r - r_{i-1}), & r \in [r_i, \gamma_i r_i + (1 - \gamma_i) r_{i+1}], \\ f_{i+1} + \frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{r_{i+2} - r_{i+1}} (r - r_{i+1}), & r \in [\gamma_i r_i + (1 - \gamma_i) r_{i+1}, r_{i+1}], \end{cases}$$

где

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ -\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{f_{i-1} - f_i - f_{i+1} + f_{i+2}}, & i = 2, \dots, k - 2, \\ 0, & i = k - 1. \end{cases}$$

Проводя аналогичные рассуждения для построения функций $f_N^{l_2}(r)$ и $f_N^{r_2}(r)$, получаем $f_N^{r_2}(r) = f_N(r)$, а $f_N^{l_2}(r)$ определяется по формуле (10). Кроме того, можно положить $\psi^l(r) \equiv \psi^r(r) \equiv 0$.

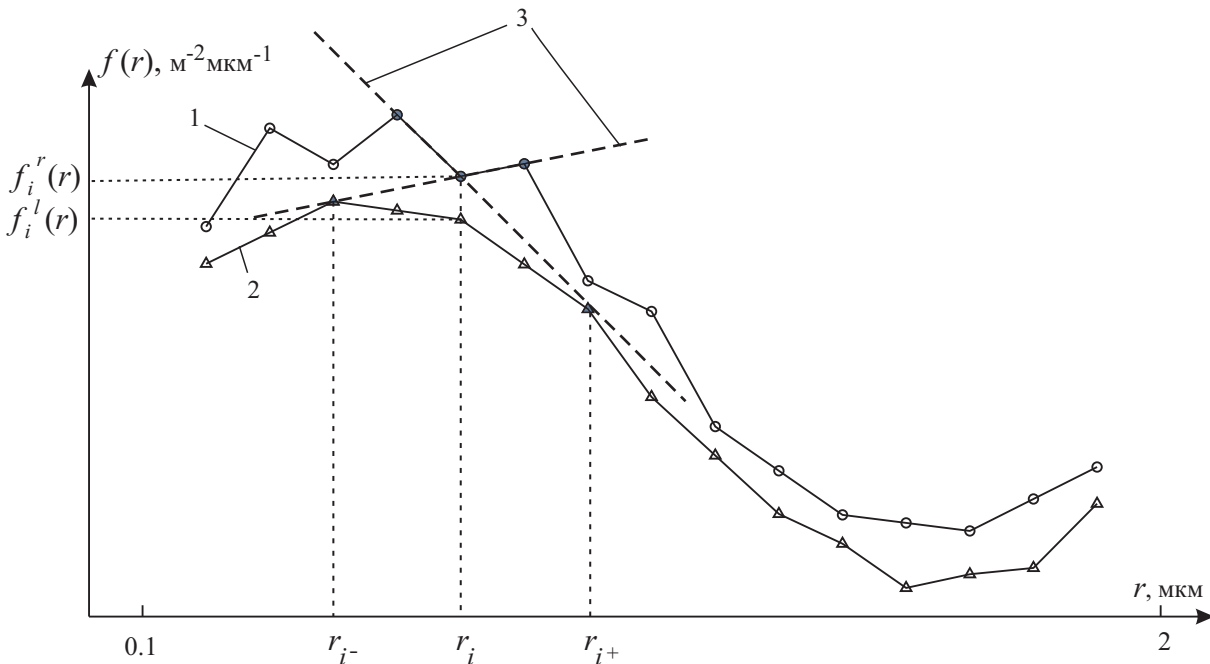


Рис. 2. Верхнее и нижнее решения $f^r(r)$ (1, \circ) и $f^l(r)$ (2, Δ), соответствующие сеточным значениям функций f_i^r и f_i^l . Пунктирные линии 3 — левая и правая касательные к функции $f^l(r)$

Шаг 4 (построение функций $f^l(r)$ и $f^r(r)$). Так как функция $f(r) \in \mathcal{F}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$ (или $f(r) \in \mathcal{F}_{0\mathcal{F}}^{\Delta}$) является выпуклой и $f_i \geq f_i^{l1}(r), i = 1, \dots, k$ ($f_i \leq f_i^{r2}(r), i = k+1, \dots, N$), то функция $f(r)$ на отрезке $[r_i, r_{i+1}]$ лежит не ниже (соответственно не выше) прямой, соединяющей (r_i, f_i^{l1}) и (r_{i+1}, f_{i+1}^{l1}) ((r_{i+1}, f_{i+1}^{r2}) и (r_i, f_i^{r2})). Поэтому на отрезке $[r_i, r_{i+1}]$ имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} 1) f^{l1}(r) &= f_i^{l1} + \frac{f_{i+1}^{l1} - f_i^{l1}}{r_{i+1} - r_i} (r - r_i) \text{ при } r \in [r_i, r_{i+1}], i = 1, \dots, k, \\ 2) f^{r2}(r) &= f_i^{r2} + \frac{f_{i+1}^{r2} - f_i^{r2}}{r_{i+1} - r_i} (r - r_i) \text{ при } r \in [r_i, r_{i+1}], i = k+1, \dots, N. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к построению функций $f^{l2}(r)$ и $f^{r1}(r)$. Сначала рассмотрим функцию $f^{r1}(r)$ (рис. 2).

Определение 3. Для любой выпуклой функции $f(r) \in \mathcal{F}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$ (или $f(r) \in \mathcal{F}_{0\mathcal{F}}^{\Delta}$) и любого индекса $i = 1, \dots, k-1$ существует правый касательный индекс $i^+ = i+1, \dots, k$, такой, что для прямой, проходящей через точки (r_i, f_i) и $(r_{i^+}, f_{i^+}^{l1})$, выполняются следующие два утверждения:

- функция $f^{l1}(r)$ расположена не ниже данной прямой на отрезке $[r_{\min}, r_{\max}]$;
- рассматриваемая прямая не проходит через точку (r_{i+1}, f_{i+1}) .

Назовем эту прямую правой касательной к функции $f^{l1}(r)$.

Замечание 6. Аналогично для любого индекса $i = 2, \dots, k$ вводим $i^- = 1, \dots, i-1$ — левый касательный индекс и соответствующую левую касательную прямую.

Замечание 7. Таким образом, правая и левая касательные представляют собой прямые, проходящие через точку (r_i, f_i) и касающиеся функции $f^{l1}(r)$. Они образуют многогранник, в одной из вершин которого и происходит касание (возможно, не единственное). Тогда выбираем вершину, абсцисса которой ближе всего находится к точке $(r_i, 0)$. Индекс найденной вершины обозначаем через i^- для левой касательной и через i^+ для правой касательной.

Очевидно, что на отрезке $[r_{\min}, r_i]$ любая функция $f(r) \in \mathcal{F}_{\mathcal{F}}^{\Delta}$ (или $f(r) \in \mathcal{F}_{0\mathcal{F}}^{\Delta}$) расположена ниже правой касательной к $f^{l1}(r)$, проходящей через точку (r_i, f_i^{l1}) , а на отрезке $[r_i, r_{\max}]$ — ниже левой касательной. Поэтому функцию $f^{r1}(r)$ определим следующим образом:

$$f^{r1}(r) = \begin{cases} f_i^{r1} + \rho_i(r - r_i), & \text{если } r \in [r_i, \lambda_i r_i + (1 - \lambda_i)r_{i+1}], \\ f_{i+1}^{r1} + \sigma_{i+1}(r - r_{i+1}), & \text{если } r \in [\lambda_i r_i + (1 - \lambda_i)r_{i+1}, r_{i+1}], \end{cases}$$

$$\text{где } \rho_i = \frac{f_i^{r1} - f_{i^-}^{l1}}{r_i - r_{i^-}}, \quad \sigma_i = \frac{f_{i^+}^{l1} - f_i^{r1}}{r_{i^+} - r_i}, \quad \lambda_i = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ \frac{1}{\rho_i - \sigma_{i+1}} \left[\rho_i - \frac{f_{i+1}^{r1} - f_i^{r1}}{r_{i+1} - r_i} \right], & i = 2, \dots, k-2, \\ 0, & i = k-1. \end{cases}$$

Замечание 8. На практике для простоты мы можем заменить λ_i на постоянную, например $\lambda_1 = 1, \lambda_{k-1} = 0, \lambda_i = 0.5$ при $i = 2, \dots, k-2$. Функцию $f^{l2}(r)$ определим в виде

$$f^{l2}(r) = \begin{cases} f_i^{l2} + \rho_i(r - r_i), & \text{если } r \in [r_i, \lambda_i r_i + (1 - \lambda_i)r_{i+1}], \\ f_{i+1}^{l2} + \sigma_{i+1}(r - r_{i+1}), & \text{если } r \in [\lambda_i r_i + (1 - \lambda_i)r_{i+1}, r_{i+1}], \end{cases}$$

$$\text{где } \rho_i = \frac{f_i^{l2} - f_{i^-}^{r2}}{r_i - r_{i^-}}, \quad \sigma_i = \frac{f_{i^+}^{r2} - f_i^{l2}}{r_{i^+} - r_i}, \quad \lambda_i = \begin{cases} 1, & i = k+1, \\ \frac{1}{\rho_i - \sigma_{i+1}} \left[\rho_i - \frac{f_{i+1}^{l2} - f_i^{l2}}{r_{i+1} - r_i} \right], & i = k+2, \dots, N-2, \\ 0, & i = N-1. \end{cases}$$

Шаг 5 (вычисление погрешности решения). После того как построены $f^l(r)$ и $f^r(r)$, оценить погрешность решения для кусочно-выпуклых функций можно по следующим формулам.

Для максимальной погрешности (в норме пространства \mathcal{C}) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max}(\Delta) \leq & \max \left\{ f_2^{r1} - f_2^{l1} - \lambda_1(\sigma_2(r_2 - r_1) - f_2^{l1} + f_1^{l1}), \right. \\ & \max_{i=2, \dots, k-1} \left(f_i^{r1} - f_i^{l1} + (1 - \lambda_i)(\rho_i(r_{i+1} - r_i) - f_{i+1}^{l1} + f_i^{l1}) \right), \\ & f_{k+2}^{r2} - f_{k+2}^{l2} - \lambda_{k+1}(\sigma_{k+2}(r_{k+2} - r_{k+1}) - f_{k+2}^{r2} + f_{k+1}^{r2}), \\ & \left. \max_{i=k+2, \dots, N-1} \left(f_i^{r2} - f_i^{l2} + (1 - \lambda_i)(\rho_i(r_{i+1} - r_i) - f_{i+1}^{r2} + f_i^{r2}) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Оценки поточечной погрешности имеют вид

$$\text{при } i = 1, \dots, k-1: \quad \varepsilon_1(\Delta, r) \leq \begin{cases} f_i^{r_1} - f_i^{l_1} + \left(\rho_i - \frac{f_{i+1}^{l_1} - f_i^{l_1}}{r_{i+1} - r_i} \right) (r - r_i), & \text{если } r \in \mathcal{L}Q, \\ f_{i+1}^{r_1} - f_{i+1}^{l_1} + \left(\sigma_{i+1} - \frac{f_{i+1}^{l_1} - f_i^{l_1}}{r_{i+1} - r_i} \right) (r - r_i), & \text{если } r \in \mathcal{R}Q, \end{cases}$$

$$\text{при } i = k+1, \dots, N-1: \quad \varepsilon_2(\Delta, r) \leq \begin{cases} f_i^{r_2} - f_i^{l_2} + \left(\rho_i - \frac{f_{i+1}^{r_2} - f_i^{r_2}}{r_{i+1} - r_i} \right) (r - r_i), & \text{если } r \in \mathcal{L}Q, \\ f_{i+1}^{r_2} - f_{i+1}^{l_2} + \left(\sigma_{i+1} - \frac{f_{i+1}^{r_2} - f_i^{r_2}}{r_{i+1} - r_i} \right) (r - r_i), & \text{если } r \in \mathcal{R}Q, \end{cases}$$

где $\mathcal{L}Q = [r_i, \lambda_i r_i + (1 - \lambda_i) r_{i+1}]$ и $\mathcal{R}Q = [\lambda_i r_i + (1 - \lambda_i) r_{i+1}, r_{i+1}]$.

5.2. Случай нескольких точек перегиба. Предположим, что решение имеет $P > 1$ точек перегиба. Аналогично п. 5.1, введем $\widehat{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{F}}^P \cup \widehat{\mathcal{F}}_P$, где

$$\widehat{\mathcal{F}}^P = \left\{ f \in \widehat{\mathcal{F}}^P \subseteq \mathcal{K} \mid \exists \mathbf{r} = \{r_p\}_{p=1}^P \in \mathbb{R}_+^P, \forall r_{p-1} < x < y < r_p : \right. \\ \left. (-1)^p f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq (-1)^p \frac{f(x+y)}{2} \quad \text{при } p = 1, \dots, P \right\}$$

(т.е. до первой точки перегиба функция является выпуклой вверх) и $\widehat{\mathcal{F}}^P = -\widehat{\mathcal{F}}_P$. Наш алгоритм состоит из двух следующих шагов.

Шаг 1 (положение точки перегиба известно.) Введем обозначения: $\mathbf{r}^* = \{r_p^*\}_{p=1}^P$ — точка перегиба, $\mathbf{k} = \{k_p\}_{p=1}^P$ — номер узла сетки, в котором она расположена, т.е. $k_p = \arg \min_{k_p=2, \dots, N-1} |f(r_{k_p}) - f(r_p^*)|$ при $p = 1, \dots, P$. Тогда матрица ограничений принимает вид

$$\widehat{\mathcal{F}}_P = \left(\begin{array}{ll} -2f_1 + f_2 \leq 0, & i = 1, \\ f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} \leq 0, & i = 2, \dots, k_1 - 1, \\ (-1)^p f_{i-1} - 2(-1)^p f_i + (-1)^p f_{i+1} \leq 0, & i = k_p + 1, \dots, k_{p+1} - 1, \quad p = 1, \dots, P-1, \\ (-1)^P f_{i-1} - 2(-1)^P f_i + (-1)^P f_{i+1} \leq 0, & i = k_P + 1, \dots, N-1, \\ (-1)^P f_{N-1} - 2(-1)^P f_N \leq 0, & i = N. \end{array} \right)$$

и $\widehat{\mathcal{F}}^P = -\widehat{\mathcal{F}}_P$.

Аналогично, используя метод проекции сопряженных градиентов с этой матрицей ограничений, мы можем решить корректную задачу минимизации $\min_{f \in \widehat{\mathcal{F}}^P \cup \widehat{\mathcal{F}}_P} \Phi[f]$.

Шаг 2 (отыскание положения точки перегиба). Как мы уже упоминали в случае одной точки перегиба, мы можем использовать метод полного перебора всех возможных положений точек перегиба. Однако этот метод сложно реализовать в случае большого числа точек перегиба.

Предположим, что наш алгоритм для решения задачи при заданном положении точек перегиба реализуется за P шагов. Можно доказать, что эта задача (т.е. задача с заданным положением точек перегиба) принадлежит классу \mathbf{P} , являющемуся множеством задач, для которых существуют “быстрые” алгоритмы решения (время работы которых полиномиально зависит от размера входных данных) [23].

Теперь рассмотрим сложность метода полного перебора. Предположим, что функционал решения имеет M точек перегиба ($M \ll N$ и является постоянной). Тогда у нас C_N^M возможных расположений точек перегиба, т.е. алгоритм реализуется за $C_N^M P$ шагов, а значит, тоже принадлежит классу \mathbf{P} .

Предположим, что функционал решения имеет не больше M точек перегиба. Тогда имеем $\sum_{i=1}^M C_N^i$ возможных расположений точек перегиба. Если M зависит от N (например, прямо пропорционально N в случае $M = \lfloor N/2 \rfloor$), то $\sum_{i=1}^M C_N^i \simeq 2^{N-1}$, а это означает, что наш алгоритм реализуется за $2^{N-1} P$ шагов. Этот алгоритм уже принадлежит классу \mathbf{NP} .

Для решения нашей задачи с неопределенным количеством точек перегиба существует много методов оптимизации полного перебора (например, метод ветвей и границ, распараллеливание вычислений и др.).

Используя некоторые дополнительные априорные условия, мы можем реализовать некоторый локальный метод полного перебора.

Пусть нам известно, что расстояние между двумя ближайшими точками перегиба не может быть меньше, чем K , где K — некоторая константа. Например, можно задавать K по формуле $K = [p \cdot N]$, где p — доля числа точек перегиба среди всех узлов сетки. Для примера выберем $p = 4\%$, т.е. $|r_{i+1} - r_i| \geq K$ при $i = 1, \dots, N - K - 1$.

Ниже приведен алгоритм определения оптимального положения двух точек перегиба.

1. Задается положение первой точки перегиба для всех возможных $i = 1, \dots, N - K$.
2. Для выбранного положения i первой точки перегиба необходимо задать все возможные положения $j = i + K, \dots, N$ второй точки перегиба.
3. Для каждой пары точек перегиба (i, j) вычисляется решение и его невязка.
4. Сравниваются невязки для всех возможных точек перегиба, и выбирается решение с наименьшей невязкой.

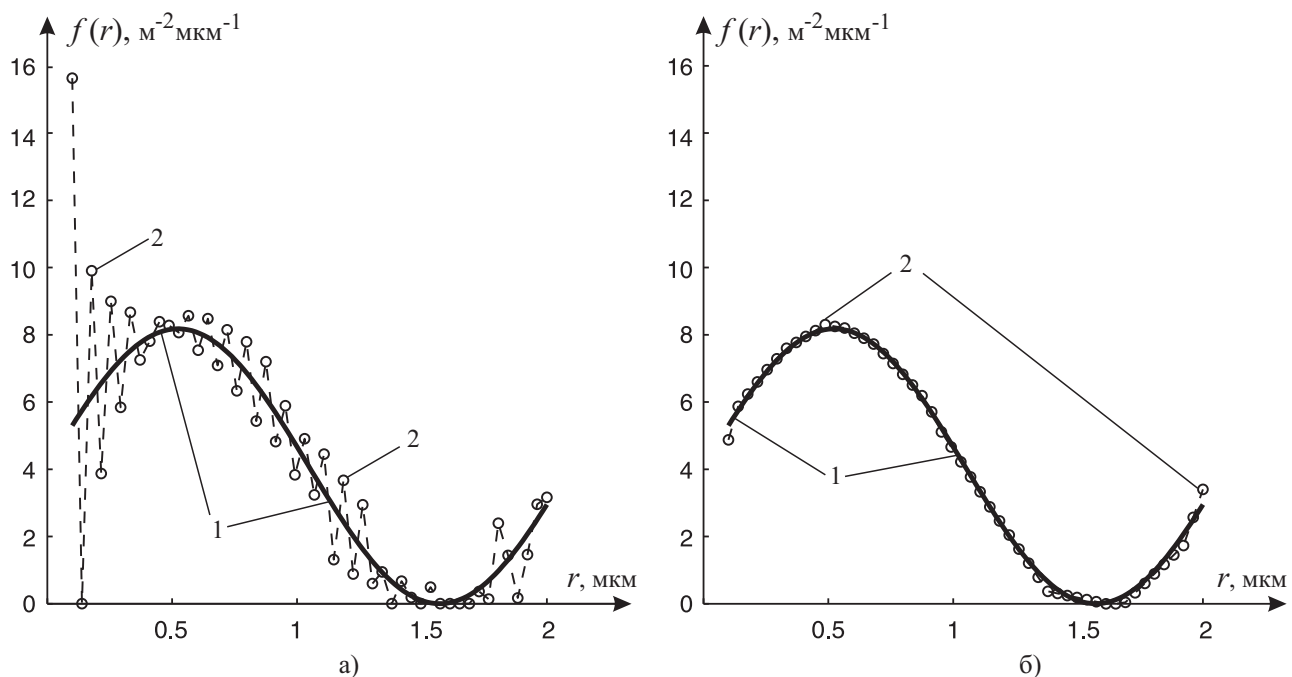


Рис. 3. Зависимость медленно меняющейся функции $f(r)$ от радиуса частиц аэрозоля r : а) метод наименьших квадратов, б) метод точек перегиба. Точное решение (1, —); приближенное решение (2, — о —)

6. Численный эксперимент. Для проверки разработанных методов была рассмотрена следующая модельная задача. Сначала был смоделирован входной сигнал согласно уравнению (4) для данной функции распределения размеров частиц аэрозоля $n_{\text{exact}}(r)$ и для данного комплексного показателя преломления η . Далее к полученному входному сигналу добавлялась ошибка (шум) и полученные данные использовались для восстановления функции распределения размеров частиц аэрозоля с помощью разработанного алгоритма. Для численного эксперимента функция $n_{\text{exact}}(r)$ была задана следующим образом: $n_{\text{exact}}(r) = 4.0887 r^{-3.5} (\sin(3r \times 10^{-12}) + 1)$. В нашей работе мы выберем $v^* = 2.5$, т.е. $h(r) = r^{-3.5}$. Тогда $f_{\text{exact}}(r) = 4.0887 (\sin(3r \times 10^{-12}) + 1)$. При анализе особенностей численного эксперимента сначала рассмотрим восстановление медленно меняющейся функции f (рис. 3). Пусть количество неизвестных N равно 50 при наличии только $M = 45$ уравнений. Априори известно, что функция решения является кусочно-выпуклой, но количества точек перегиба и их положения мы пока не знаем. Используем начальное приближение $f^0(r) = 0$. Предполагаем, что правая часть и матрица оператора возмущаются случайной погрешностью, равномерно распределенной на отрезке $[-\delta_0, \delta_0]$, где δ_0 составляет 2% от максимума значений правой части (по координатам).

Рассмотрим метод наименьших квадратов (рис. 3а) и регуляризирующий алгоритм, основанный на

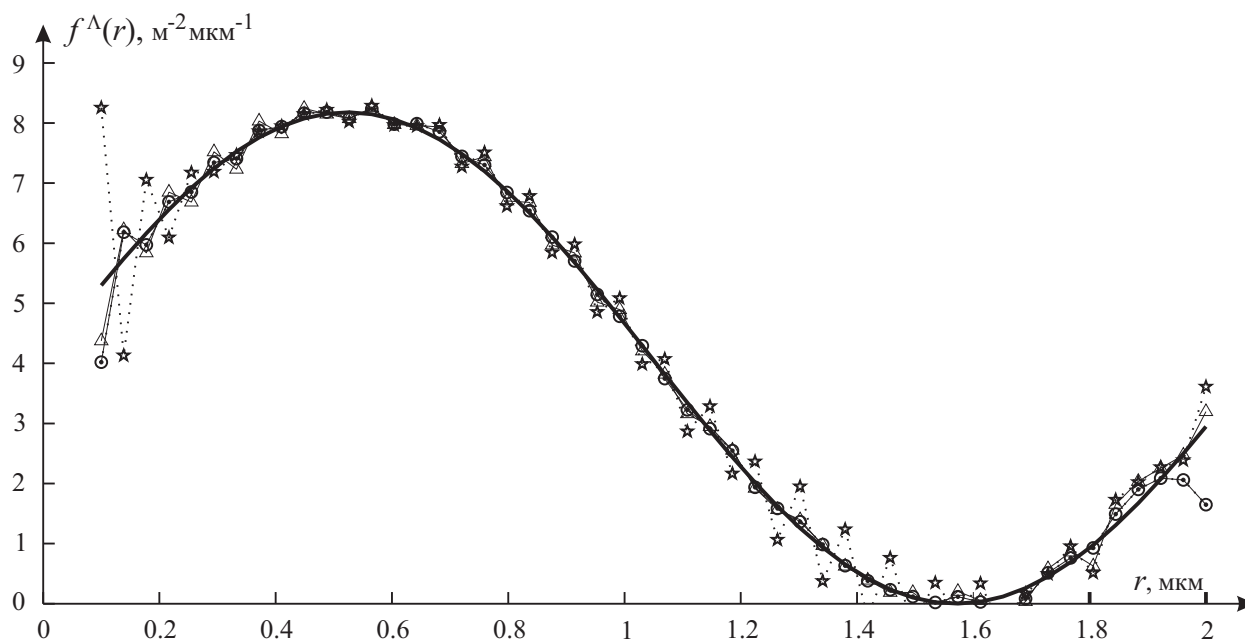


Рис. 4. Зависимость медленно меняющейся функции $f^\Lambda(r)$ от радиуса частиц аэрозоля r при разных типах параметра регуляризации Λ : 1) — точное решение; 2) — ● — метод ОПН; 3) — * — L-кривая; 4) — △ — метод ОПСФ; 5) — ○ — метод ПОВ

Таблица 1

Относительные ошибки методов

Метод решения	МНК	ОПН	L-кривая	ОПСФ	ПОВ	Метод точек перегиба
Отн. ошибка	0.004017	0.056801	0.118180	0.046644	0.056800	0.046367

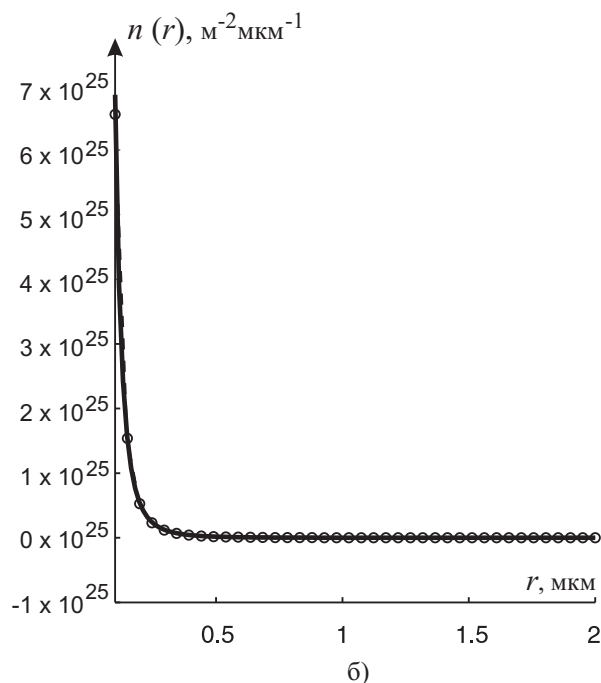
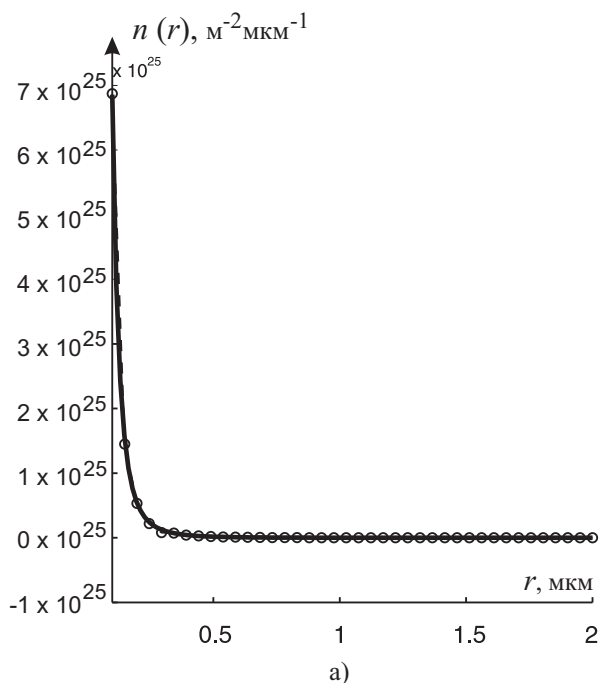


Рис. 5. Зависимость функции распределения размеров частиц аэрозоля $n(r)$ от радиуса частиц аэрозоля r

минимизации функционала А. Н. Тихонова. Для апостериорных способов выбора параметра регуляризации используем обобщенный принцип невязки (ОПН) [24, 25]; достаточно распространенный, но фундаментально неверный метод L-кривой; обобщенный принцип сглаживающего функционала (ОПСФ) [17];

метод псевдооптимального выбора параметра регуляризации (ПОВ) [26] (рис. 4).

Используя наш метод (метод точек перегиба), получаем параметр регуляризации этого метода (комбинацию числа точек перегиба и вектора их координат): $\alpha = (P, k) = (1, 24)$ (рис. 3б). Относительные ошибки каждого метода даны в табл. 1.

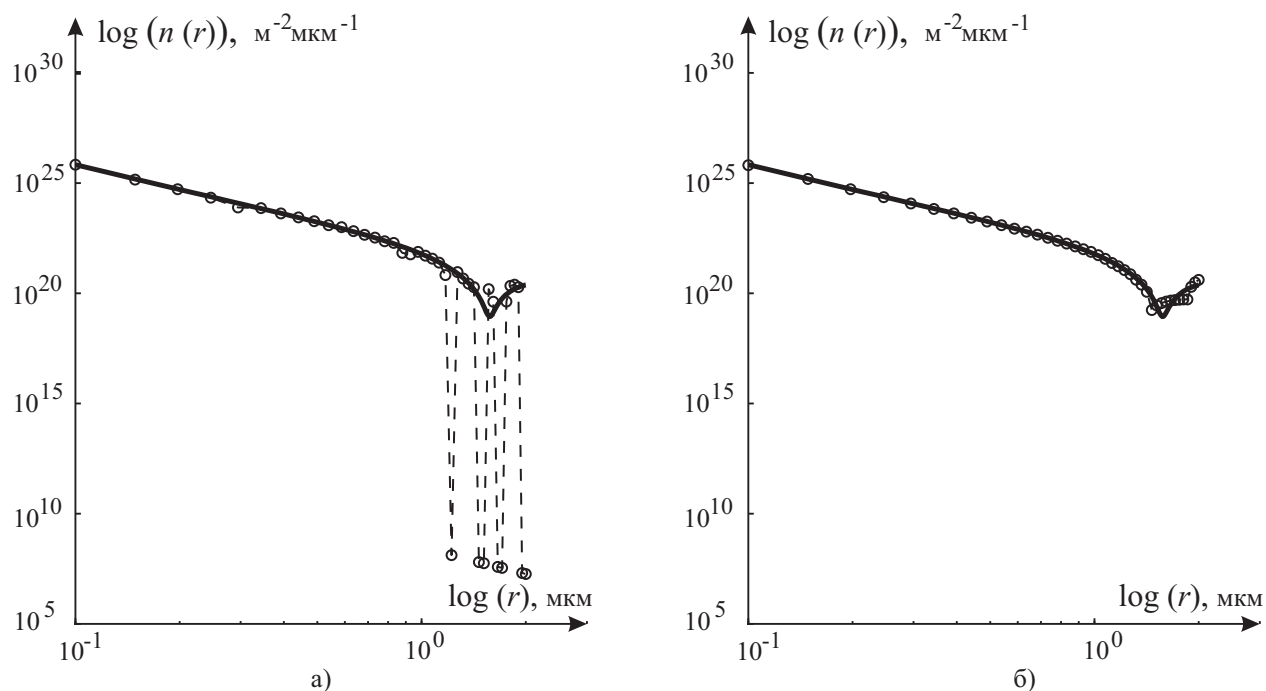


Рис. 6. Зависимость логарифмической функции распределения размеров частиц аэрозоля $\log n(\log(r))$ от логарифмического радиуса частиц аэрозоля $\log(r)$

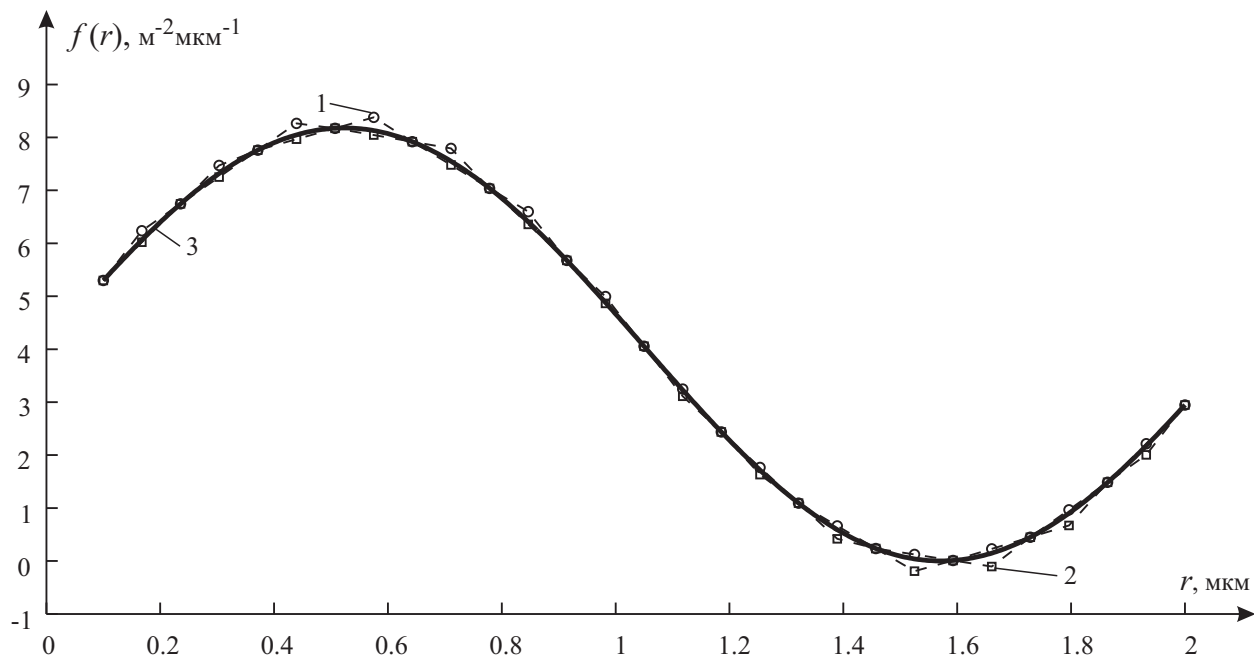


Рис. 7. Квазиверхнее (1, $-\circ-$) и квазинижнее (2, $-\triangle-$) решения для медленно меняющейся функции $f(r)$. Кривая 3 — точная медленно меняющаяся функция

Очевидно, что хотя относительная ошибка (прямо пропорциональная значению функционала невязки) нашего метода намного хуже метода наименьших квадратов, полученная нашим методом функция значительно лучше описывает физические особенности решения прикладной физической задачи. По срав-

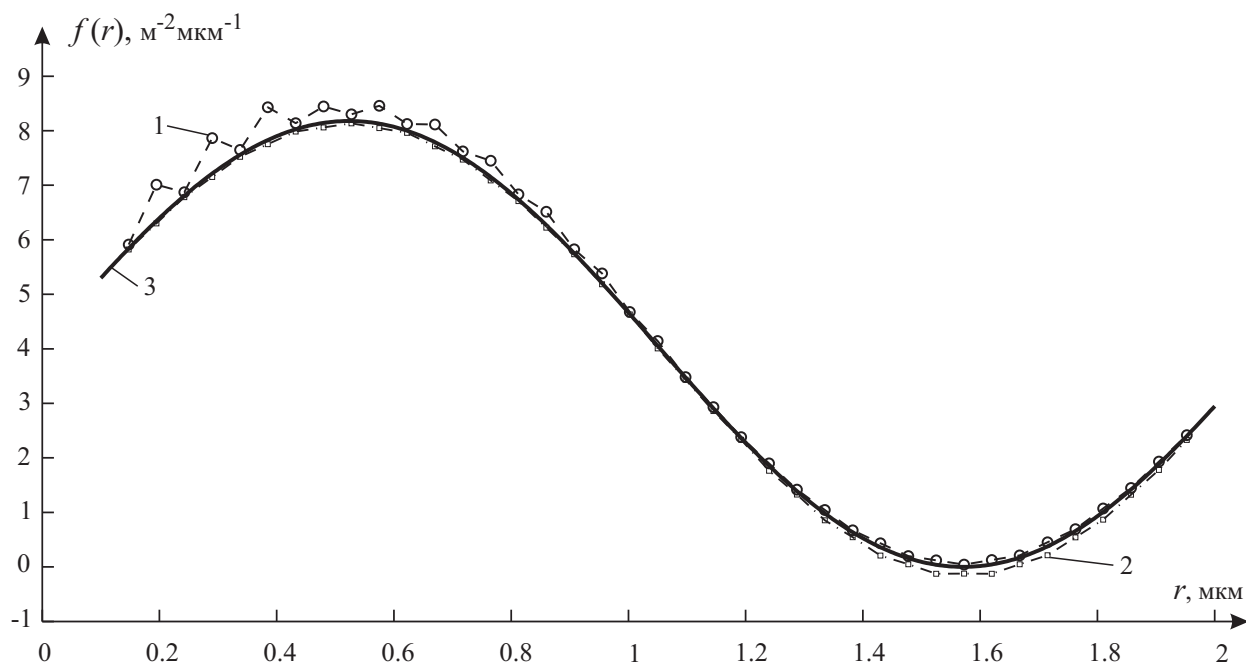


Рис. 8. Верхнее (1, - o -) и нижнее (2, - □ -) решения для медленно меняющейся функции $f(r)$.
Кривая 3 — точная медленно меняющаяся функция

нению с упомянутыми регуляризирующими алгоритмами, основанными на минимизации функционала Тихонова, наш метод также намного лучше.

Далее, если мы умножим медленно меняющуюся функцию $f(r)$ на быстро убывающую функцию $h(r)$, то у нас получается функция распределения размеров частиц аэрозоля $n(r)$ (рис. 5). Из-за большого размера частиц аэрозоля трудно увидеть преимущество предложенного нами алгоритма, поэтому мы введем log-log график, который позволяет нам увидеть все преимущества выбранного метода (рис. 6).

Теперь построим вершины верхнего и нижнего решения нашей задачи, т.е. построим функции $f_n^l(r)$, $f_n^r(r)$, $\varphi_i^l(r)$, $\varphi_i^r(r)$, $\psi^l(r)$, $\psi^r(r)$ (рис. 7). После этого, используя вершины точек верхнего и нижнего решения, легко получить верхнюю и нижнюю функции $f^l(r)$ и $f^r(r)$ (рис. 8).

Рассмотрим случай, когда медленно растущая функция $f(r)$ имеет две точки перегиба. Для численного эксперимента возьмем $n_{\text{exact}}(r) = 4.0887 r^{-3.5} (\sin(4.6r \times 10^{-12}) + 1)$. Тогда при $v^* = 2.5$ получим $f_{\text{exact}}(r) = 4.0887 (\sin(3r \times 10^{-12}) + 1)$. Предположим, что правая часть и матрица оператора возмущаются случайной погрешностью, равномерно распределенной на отрезке $[-\delta_0, \delta_0]$, где δ_0 составляет 2% от максимума значений правой части. Сначала рассмотрим метод наименьших квадратов (рис. 9а) и старый регуляризирующий алгоритм (рис. 10). Для нашего метода мы получаем следующее значение параметра регуляризации метода точек перегиба: $\alpha = (P, k) = (2, (13, 24))$ (рис. 9б). Относительные ошибки каждого метода даны в табл. 2.

Таблица 2

Относительные ошибки методов в случае двух точек перегиба

Метод решения	МНК	ОПН	L-кривая	ОПСФ	ПОВ	Метод точек перегиба
Отн. ошибка	0.006417	0.054612	0.161280	0.125070	0.054612	0.013493

Хотя относительная ошибка нашего метода намного хуже ошибок сравниваемых методов, полученная нашим методом функция опять значительно лучше описывает физические особенности решения прикладной физической задачи. Аналогично предыдущему результату, если мы умножим $f(r)$ на $h(r)$, то у нас получается функция распределения размеров частиц аэрозоля $n(r)$. Здесь мы опять вводим логарифмическую шкалу log-log, которая позволяет четко различить преимущества нашего метода (рис. 11).

Замечание 9. Как и выше, мы можем построить верхнее и нижнее решения и для области решения нашей задачи.

Замечание 10. В этой работе в качестве основных входных данных, на примере обработки кото-

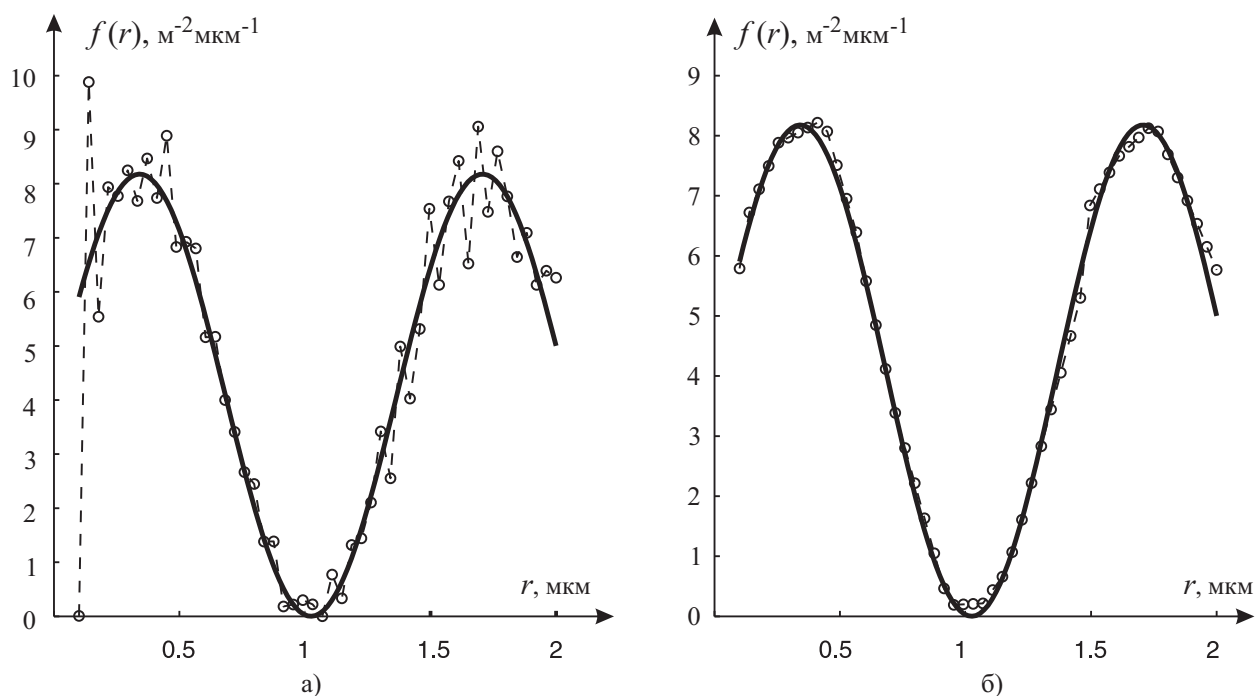


Рис. 9. Восстановление медленно меняющейся функции $f(r)$ в случае двух точек перегиба:
а) метод наименьших квадратов, б) метод точек перегиба

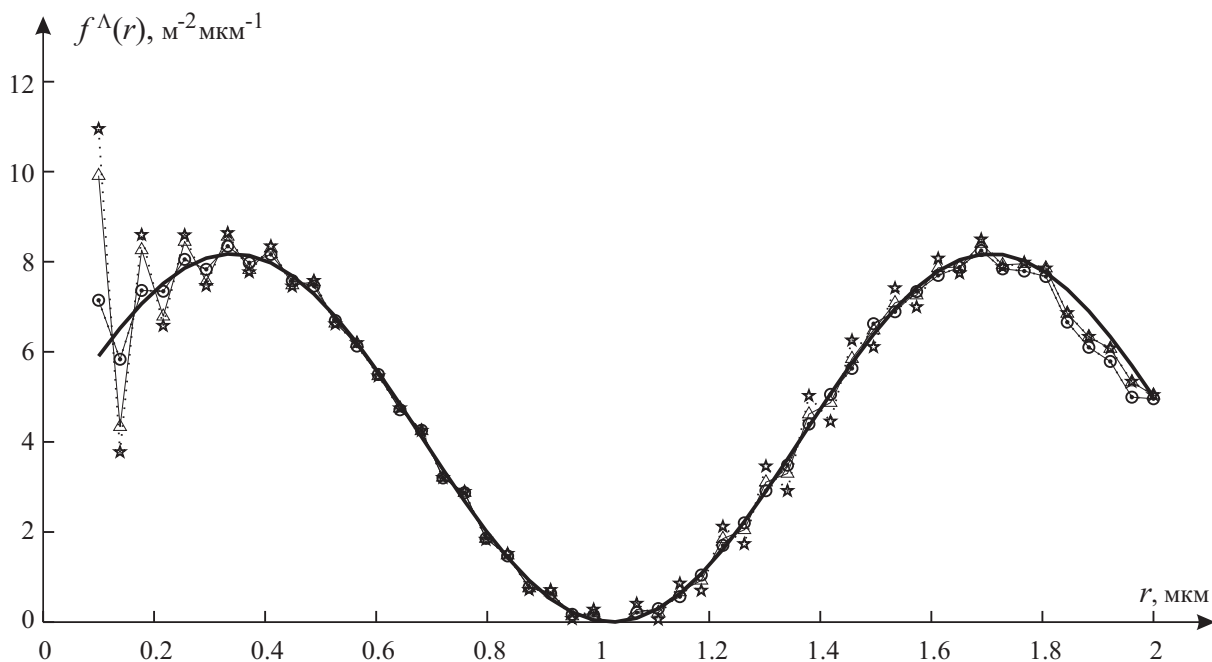


Рис. 10. Восстановление медленно меняющейся функции $f^\Lambda(r)$ в случае двух точек перегиба при разных типах параметра регуляризации Λ : 1) — точное решение; 2) — ● — метод ОПН; 3) — * — L-кривая; 4) — △ — метод ОПСФ; 5) — ○ — метод ПОВ

рых мы демонстрируем эффективность предложенного алгоритма, мы используем данные, полученные солнечным фотометром CE 318 (подробное описание и спецификации этого устройства приведены по ссылке [14]). Эксперимент, в результате которого были получены экспериментальные данные, продолжался с 17 по 31 октября 2005 г. Метеорологические данные были предоставлены Ying Tan Agricultural Ecological Station of CERN (Chinese Ecosystem Research Network).

В соответствующем численном эксперименте решалась обратная задача восстановления характеристик распределения аэрозоля в воздухе. В результате была получена информация о преимущественном

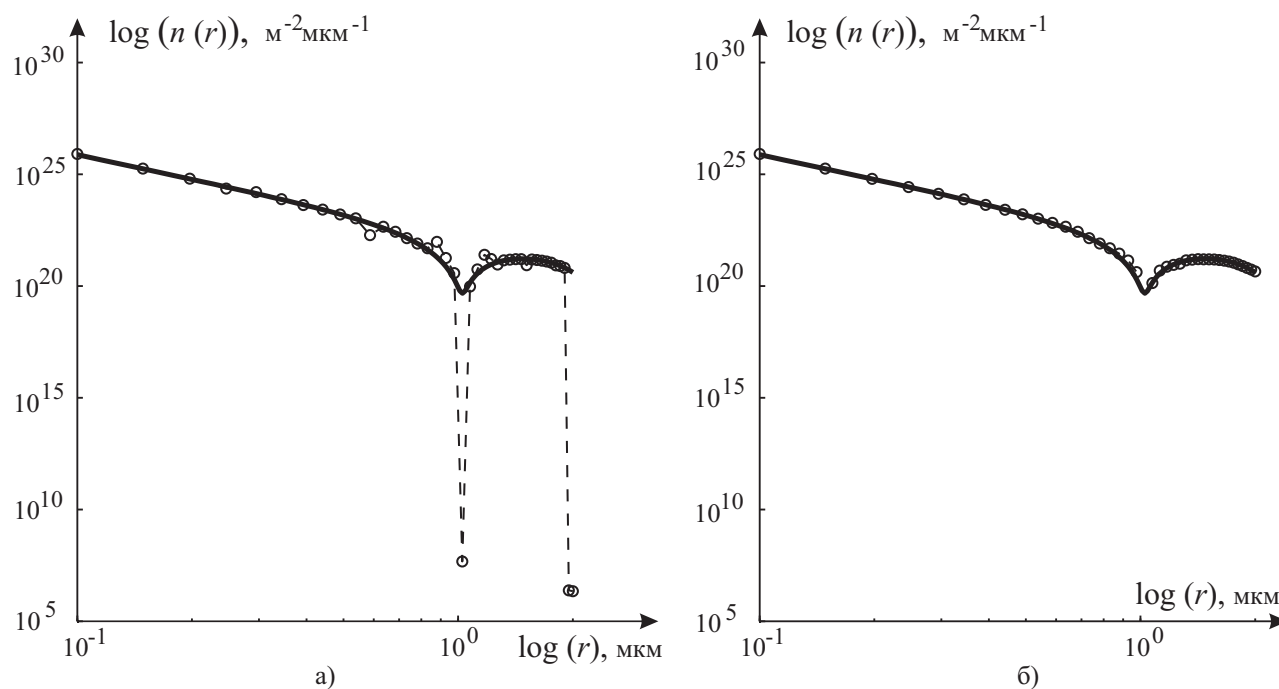


Рис. 11. Восстановление логарифмической функции распределения размеров частиц аэрозоля $\log n(\log(r))$ в случае двух точек перегиба: а) регуляризирующий алгоритм Тихонова с выбором параметра регуляризации по методу ОПН, б) метод точек перегиба

содержании в воздухе частиц аэрозоля с характеристическим размером $[0.1, 10.0]$ мкм. Для иллюстрации данных о параметрах воздушных масс можно использовать материалы, доступные в [14]. Как показали эксперимент, в дни 17 и 18 октября содержание аэрозоля в воздухе было аномально большим, что было связано с антропогенным фактором. В связи с этим для обработки мы использовали экспериментальные данные, полученные в другие дни.

7. Заключение. Разработаны эффективные методы решения некорректных задач на множестве кусочно-выпуклых функций. Предложен регуляризирующий алгоритм, основанный на поиске оптимального числа и положения точек перегиба при априорном условии на принадлежность искомого решения множеству кусочно-выпуклых функций. Эффективность предложенных методов продемонстрирована на примере решения задачи восстановления функции распределения размеров частиц аэрозоля в атмосфере. Эти методы могут быть успешно применены для решения любой прикладной задачи, множество решений которой является кусочно-выпуклыми функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Houghton J.T., Meira Filho L.G., Callander B.A., Harris N., Kattenberg A., Maskell K. Climate change 1995. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
2. Junge C.E. The size distribution and aging of natural aerosols as determined from electrical and optical data on the atmosphere // J. Meteor. 1955. N 12. 13–25.
3. Deirmendjian D. Electromagnetic scattering on spherical polydispersions. New York: Elsevier, 1969.
4. Heintzenberg J. Properties of Log-normal particle size distributions // Aerosol Sci. Tech. 1994. N 21. 46–48.
5. Woodcock A.H. Salt nuclei in marine air as a function of altitude and wind force // J. Meteor. 1953. N 10. 362–371.
6. Twomey S. Atmospheric aerosols. Amsterdam: Elsevier, 1977.
7. Bohren G.F., Huffman D.R. Absorption and scattering of light by small particles. New York: Wiley, 1983.
8. Angström A.A. On the atmospheric transmission of Sun radiation and on dust in the air // Geografiska Annaler. 1929. N 11. 156–166.
9. King M.D., Byrne D.M., Herman B.M., Reagan J.A. Aerosol size distributions obtained by inversion of spectral optical depth measurements // J. Atmos. Sci. 1978. N 35. 2153–2167.
10. Stratton J.A. Electromagnetic theory. New York: McGraw-Hill, 1941.
11. Twomey S. Comparison of constrained linear inversion and an iterative nonlinear algorithm applied to the indirect estimation of particle size distribution // J. Comput. Phys. 1975. N 18. 188–200.
12. Bockmann C., Kirsche A. Iterative regularization method for lidar remote sensing // Computer Physics Communications. 2006. N 174. 607–615.

13. *Voutilainen A., Kaipio J.P.* Statistical inversion of aerosol size distribution data // *J. Aerosol Sci.* 2000. N 31. 767–768.
14. *Wang Y.F., Fan S.F., Feng X.* Retrieval of the aerosol particle size distribution function by incorporating a priori information // *J. of Aerosol Science.* 2007. N 38. 885–901.
15. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
16. *Танана В.П.* Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981.
17. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
18. *Николаева Н.Н., Титаренко В.Н., Ягола А.Г.* Оценка погрешности решения уравнения Абеля на множествах монотонных и выпуклых функций // *Сибирский журнал вычислительной математики.* 2003. **6**. 171–180.
19. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1986.
20. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
21. *Магарил-Ильев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
22. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: Изд-во “Факториал”, 1998.
23. *Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C.* Introduction to algorithms. New York: McGraw-Hill, 2002.
24. *Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Обобщенный принцип невязки // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1973. **13**, № 2. 294–302.
25. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
26. *Леонов А.С.* Псевдооптимальный выбор параметра в методе регуляризации // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1995. **35**, № 7. 1034–1049.

Поступила в редакцию
17.11.2011
