УДК 519.622

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

С. К. Татевян[1], Н. А. Сорокин[1], С. Ф. Залеткин[2]

Приводится теория метода численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка, основанного на приближении решения дифференциального уравнения алгебраическими многочленами. Приближения многочленами строятся на сегментах, длины которых равны шагу интегрирования, выбранному из условия достижения заданной точности. Для построения интерполяционного многочлена правой части дифференциального уравнения на каждом сегменте используется разбиение данного сегмента с помощью узлов квадратурных формул Маркова. Это означает, что разбиение шага интегрирования $[x, x+h]$ состоит из узлов квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности. Вычисление решения дифференциального уравнения и его производной на требуемом множестве точек, часто определяемых из условий эксперимента, сводится к вычислению значений многочлена. Такой подход особенно удобен и целесообразен в различных задачах астродинамики и космической геодезии, включающих в себя интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Введение. Бурное развитие наблюдательной и измерительной техники в таких областях науки, как звездная динамика, небесная механика, астродинамика, космическая геодезия, космическая навигация поставило проблему создания новых высокоточных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом точность интегрирования уравнений должна быть выше точности измеряемых величин. Использование явных методов Рунге–Кутта высокого порядка [1] замедляет вычислительный процесс из-за многократного вычисления правых частей дифференциальных уравнений. Методы численного интегрирования, в которых на каждом шаге используются производные высокого порядка от решения дифференциальных уравнений [2], также вызывают трудности, поскольку в реальных задачах не всегда можно легко вычислить эти производные аналитически.

В процессе численного интегрирования дифференциальных уравнений решение получают, как правило, в виде таблицы чисел, представляющих приближенные значения решения в узлах сетки, отстоящих друг от друга на величину шага интегрирования. Шаг интегрирования может быть постоянным или переменным. Часто необходимо знать решение уравнения в точках, расположенных через некоторые промежутки, известные только в процессе эксперимента. Однако в эксперименте промежутки могут быть намного меньше шага интегрирования, и использование их в качестве шага интегрирования нецелесообразно. Примером являются измерения дальностей с помощью лазерного дальномера от пункта наблюдения до искусственного спутника Земли. Интервалы между измерениями могут быть от 0,5 секунды до 1 минуты времени. Шаг интегрирования дифференциальных уравнений движения различных спутников при этом составляет от нескольких минут до 1 часа. Поэтому для вычисления значений функций в точках, не совпадающих с узлами сетки, используют интерполирование. Вычисленное значение содержит не только погрешность метода интегрирования, вычислительную погрешность, погрешности из-за несовершенства математической модели движения и неточности принятых астрономических и геодезических констант, но и дополнительную погрешность интерполирования.

Интересным и плодотворным является подход, позволяющий на каждом шаге интегрирования строить алгебраический многочлен, аппроксимирующий правую часть дифференциальных уравнений, и получать решение задачи также в виде многочлена. Одной из работ, посвященных этой идее, является работа Эверхарта [3], в которой излагается неявный одношаговый метод, разработанный специально для решения астрономических задач. Представляет интерес и заслуживает внимания также работа Плахова и др. [4].

Следует отметить, что, хотя существует необходимость применения высокоточных методов для решения многих задач в вышеуказанных естественно-научных областях, в отечественной научной и учебной литературе до сих пор нет достаточно глубокого и полного изложения метода, известного у астрономов как метод

[1] Институт астрономии РАН, ул. Пятницкая 48, 109017, Москва, e-mail: nsorokin@inasan.rssi.ru
[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский Государственный Университет, 119899, Москва, e-mail: arush@srcc.msu.su

Эверхарта. Выявляется потребность подробного и доступного описания данного метода не только для научных работников и инженеров, но и для студентов и аспирантов, занимающихся решением указанных задач. В настоящей работе мы постарались частично восполнить этот пробел.

Целью настоящей работы является теоретическая разработка метода численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка на основе аппроксимации правой части дифференциальных уравнений на шаге интегрирования алгебраическим многочленом и последующего его интегрирования. Алгоритм получения коэффициентов этого многочлена такой же, как в методе Эверхарта. Однако в отличие от работы [3], мы даем подробный вывод, а также свой подход к решению этой проблемы.

Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} y(x_0) \ = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{2}$$

и задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{1a}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2a}$$

Идея предлагаемого метода заключается в следующем.

Выберем шаг интегрирования $h < X$ и будем строить приближенное аналитическое решение задачи Коши (1), (2) и задачи Коши (1a), (2a) на сегменте $[x_0, x_0 + h]$ в виде многочлена некоторой степени. После определения коэффициентов этого многочлена вычисляются значения многочлена и его производной (для уравнений второго порядка) в конце сегмента $x_1 = x_0 + h$. Эти значения принимаются в качестве численных значений решения исходной задачи (1), (2) или (1a), (2a) и его производной в узле $x_1 = x_0 + h$.

Во втором разделе статьи дается вывод уравнений для коэффициентов многочлена приближенного решения на сегменте $[x_0, x_0 + h_0]$. В третьем разделе описываются алгоритмы решения этих уравнений. В четвертом разделе описывается выполнение первого шага интегрирования от начальной точки x_0 до узла $x_1 = x_0 + h_0$, т.е. вычисление решения y_1^h и его производной в узле $x_1 = x_0 + h_0$. В пятом разделе излагается переход к следующему шагу интегрирования, т.е. переход от узла x_1 к узлу $x_2 = x_1 + h_1$ и т.д. В шестом разделе рассматриваются способы выбора разбиения шага интегрирования h, которые используются при построении приближенного решения задачи (1), (2) и задачи (1a), (2a) в виде многочлена. Для этого в подразделе 6.1 излагаются квадратурные формулы для вычисления определенного интеграла, содержащие наперед заданные узлы, и некоторые формулы частного вида, а именно: формулы численного интегрирования Маркова. В подразделе 6.2 описывается выбор разбиения шага интегрирования с помощью узлов квадратурных формул Маркова. В подразделе 6.3 приводится второй способ получения специального разбиения шага интегрирования $x_1 = x_0 + h_0$ для повышения точности значения многочленного приближения y_1^h в точке $x_1 = x_0 + h_0$.

В седьмом и восьмом разделах рассматривается применение данного метода к интегрированию линейной системы с постоянными коэффициентами

$$y' = Ay.$$

Здесь показано,что один шаг метода приводит для такой системы к рациональной аппроксимации $F(Ah)$ матричной экспоненты e^{Ah}. Значение приближенного решения y_1^h в точке $x_1 = x_0 + h$, получаемое данным методом, выражается через $F(Ah)$ и является рациональной функцией от Ah, т.е.

$$y_1^h = F(Ah)\, y_0.$$

Для некоторых порядков обсуждаемого метода указаны интервалы численной устойчивости.

В разделе 9 приводится доказательство того, что данный метод является другой формой записи неявного метода типа Рунге–Кутта. Для задачи (1a), (2a) дается приведение формулы для приближенного решения y_1^h, получаемого этим методом, к неявной формуле типа Рунге–Кутта. В разделе 10 описывается один из алгоритмов автоматического выбора шага интегрирования, который может быть реализован при интегрировании с переменным шагом на ЭВМ.

Настоящая статья начинает цикл работ авторов по неявным одношаговым методам численного интегрирования на основе многочленных приближений. В последующих работах этого цикла будут приведены другие алгоритмы вычисления аппроксимирующего многочлена, например, безразностный способ, будут рассмотрены иные, отличные от интерполяционного, способы выбора многочленного приближения, а также вопросы сходимости итерационных процессов и другие вычислительные аспекты. Отдельная работа будет посвящена применению данного метода к решению задач астродинамики и космической геодезии, которые включают в себя численное интегрирование дифференциальных уравнений движения искусственных спутников Земли.

2. Вывод уравнений для коэффициентов многочленного приближения. На отрезке $[x_0, x_0+h]$ выберем вспомогательные точки $x_i{}^0 = x_0 + t_i = x_0 + \alpha_i h$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $\alpha_0 = 0$. Будем рассматривать их как узлы интерполирования. По значениям функции $F(x) = f(x, y(x), y'(x))$ в узлах $x = x_i{}^0$ составим разделенные разности

$$\left.\begin{aligned}
&F(x_0; x_1^0) = \frac{F(x_1^0) - F(x_0)}{x_1^0 - x_0}, \quad F(x_1^0; x_2^0) = \frac{F(x_2^0) - F(x_1^0)}{x_2^0 - x_1^0}, \ldots, \\
&F(x_0; x_1^0; x_2^0) = \frac{F(x_1^0; x_2^0) - F(x_0; x_1^0)}{x_2^0 - x_0}, \quad F(x_1^0; x_2^0; x_3^0) = \frac{F(x_2^0; x_3^0) - F(x_1^0; x_2^0)}{x_3^0 - x_1^0}, \ldots, \\
&F(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) = \frac{F(x_1^0; x_2^0; x_3^0) - F(x_0; x_1^0; x_2^0)}{x_3^0 - x_0}, \ldots, \\
&F(x_0; x_1^0; x_2^0; \ldots; x_k^0) = \frac{F(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_k^0) - F(x_0; x_1^0; \ldots; x_{k-1}^0)}{x_k^0 - x_0}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

С помощью этих разностей построим для функции

$$F(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

интерполяционный многочлен в форме интерполяционного многочлена Ньютона для неравных промежутков

$$\begin{aligned}
L_{k,0}(x) = F(x_0) &+ (x - x_0)F(x_0; x_1^0) + (x - x_0)(x - x_1^0)F(x_0; x_1^0; x_2^0) + \\
&+ (x - x_0)(x - x_1^0)(x - x_2^0)F(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + \cdots + (x - x_0)(x - x_1^0)\ldots(x - x_{k-1}^0)F(x_0; x_1^0; x_2^0; \ldots; x_k^0)
\end{aligned} \tag{4}$$

и представим $F(x)$ с помощью интерполяционной формулы Ньютона

$$F(x) = L_{k,0}(x) + (x - x_0)(x - x_1^0)(x - x_2^0)\ldots(x - x_k^0)F(x; x_0; x_1^0; x_2^0; \ldots; x_k^0). \tag{5}$$

Мы всегда будем предполагать, что правая часть дифференциального уравнения (1) и ($1a$) имеет столько непрерывных частных производных, сколько это необходимо для того, чтобы были справедливы приводимые ниже оценки для погрешности рассматриваемого метода.

Положим в (5) $x = x_i^0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$:

$$\begin{aligned}
F(x_1^0) &= F(x_0) + (x_1^0 - x_0)F(x_0; x_1^0), \\
F(x_2^0) &= F(x_0) + (x_2^0 - x_0)F(x_0; x_1^0) + (x_2^0 - x_0)(x_2^0 - x_1^0)F(x_0; x_1^0; x_2^0), \\
F(x_3^0) &= F(x_0) + (x_3^0 - x_0)F(x_0; x_1^0) + (x_3^0 - x_0)(x_3^0 - x_1^0)F(x_0; x_1^0; x_2^0) + \\
&\quad + (x_3^0 - x_0)(x_3^0 - x_1^0)(x_3^0 - x_2^0)F(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) \quad \text{и т.д.}
\end{aligned} \tag{6}$$

Из (6) последовательно находим следующие выражения для разделенных разностей:

$$\begin{aligned}
F(x_0; x_1^0) &= \frac{F(x_1^0) - F(x_0)}{x_1^0 - x_0}, \\
F(x_0; x_1^0; x_2^0) &= \frac{\dfrac{F(x_2^0) - F(x_0)}{x_2^0 - x_0} - F(x_0; x_1^0)}{x_2^0 - x_1^0}, \\
F(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) &= \frac{\dfrac{\dfrac{F(x_3^0) - F(x_0)}{x_3^0 - x_0} - F(x_0; x_1^0)}{x_3^0 - x_1^0} - F(x_0; x_1^0; x_2^0)}{x_3^0 - x_2^0} \quad \text{и т.д.}
\end{aligned} \tag{7}$$

Представим интерполяционный многочлен (4) в виде многочлена по степеням независимой переменной:

$$L_{k,0}(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)^2 + \cdots + B_k(x - x_0)^k. \tag{8}$$

Выразим коэффициенты этого многочлена через разделенные разности (7). Введем обозначение $t = x - x_0$ и перепишем интерполяционный многочлен (4) в виде

$$\begin{aligned} L_{k,0}(x) = L_{k,0}(x_0+t) = F(x_0) + tF(x_0;x_1^0) + t(t-t_1)F(x_0;x_1^0;x_2^0) + t(t-t_1)(t-t_2)F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0) + \cdots + \\ + t(t-t_1)\ldots(t-t_{k-1})F(x_0;x_1^0;x_2^0;\ \ldots;x_k^0), \end{aligned} \tag{9}$$

а многочлен (8) — в виде

$$L_{k,0}(x) = L_{k,0}(x_0+t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_k t^k. \tag{10}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в (10) и (9), получим:

$$\begin{aligned}
t^0 :\ B_0 =\ & F(x_0), \\
t^1 :\ B_1 =\ & F(x_0;x_1^0) + (-t_1)F(x_0;x_1^0;x_2^0) + (t_1t_2)F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0) + \\
& + (-t_1t_2t_3)F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0) + (t_1t_2t_3t_4)F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0;x_5^0) + \cdots, \\
t^2 :\ B_2 =\ & F(x_0;x_1^0;x_2^0) + (-t_1-t_2)F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0) + (t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0) + \\
& + (-t_1t_2t_3 - t_1t_2t_4 - t_2t_3t_4 - t_1t_3t_4)F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0;x_5^0) + \cdots, \\
t^3 :\ B_3 =\ & F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0) + (-t_1-t_2-t_3)F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0) + \\
& + (t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4)F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0;x_5^0) + \cdots, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
t^k :\ B_k =\ & F(x_0;x_1^0;x_2^0;\ \ldots;x_k^0).
\end{aligned} \tag{11}$$

Обозначим через b_{ij} коэффициент, который стоит в j-м уравнении в (11) перед разделенной разностью $F(x_0;x_1^0;x_2^0;\ \ldots;x_i^0)$. Эти коэффициенты удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
& b_{ii} = 1, \quad i \geqslant 0, \\
& b_{i1} = b_{i-1,1}(-t_{i-1}), \quad i > 1, \\
& b_{ij} = b_{i-1,j-1} - t_{i-1}b_{i-1,j}, \quad 1 < j < i.
\end{aligned} \tag{12}$$

Тогда система (11) для выражения коэффициентов B_j многочлена (8) через разделенные разности принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
& B_0 = F(x_0); \\
& B_1 = b_{11}F(x_0;x_1^0) + b_{21}F(x_0;x_1^0;x_2^0) + b_{31}F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0) + b_{41}F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0) + \cdots; \\
& B_2 = b_{22}F(x_0;x_1^0;x_2^0) + b_{32}F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0) + b_{42}F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0) + \cdots; \\
& B_3 = b_{33}F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0) + b_{43}F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0) + \ldots; \\
& B_4 = b_{44}F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0) + \cdots; \\
& B_5 = b_{55}F(x_0;x_1^0;x_2^0;x_3^0;x_4^0;x_5^0) + \cdots; \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& B_k = b_{kk}F(x_0;x_1^0;x_2^0;\ \ldots;x_k^0).
\end{aligned}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение

$$y''(x) = B_0 + B_1(x-x_0) + B_2(x-x_0)^2 + B_3(x-x_0)^3 + \cdots + B_k(x-x_0)^k + r_{k,0}(x),$$

где

$$r_{k,0}(x) = (x-x_0)(x-x_1^0)(x-x_2^0)\ \ldots\ (x-x_k^0)F(x;x_0;x_1^0;x_2^0;\ \ldots;x_k^0),$$

по сегменту $[x_0, x]$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$, имеем:

$$\begin{aligned} y'(x) - y'(x_0) = B_0(x-x_0) + B_1\frac{(x-x_0)^2}{2} + B_2\frac{(x-x_0)^3}{3} + B_3\frac{(x-x_0)^4}{4} + \cdots + B_k\frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} + \\ + \int\limits_{x_0}^{x} r_{k,0}(t)\,dt, \end{aligned} \tag{14}$$

$$y(x)-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)+B_0\frac{(x-x_0)^2}{2}+B_1\frac{(x-x_0)^3}{6}+B_2\frac{(x-x_0)^4}{12}+B_3\frac{(x-x_0)^5}{20}+\cdots+$$
$$+B_k\frac{(x-x_0)^{k+2}}{(k+1)(k+2)}+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} r_{k,0}(t)\,dtd\tau.$$

Отбросим в (14) остаточный член. Функцию, определяемую получившимися уравнениями, обозначим $U(x)$. Эту функцию примем за приближенное решение задачи Коши (1), (2) на сегменте $[x_0,x_0+h]$:

$$\begin{aligned}
y'(x)\approx U'(x)&=y'(x_0)+B_0(x-x_0)+B_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+\\
&+B_2\frac{(x-x_0)^3}{3}+B_3\frac{(x-x_0)^4}{4}+\cdots+B_k\frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1},\\
y(x)\approx U(x)&=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+B_0\frac{(x-x_0)^2}{2}+\\
&+B_1\frac{(x-x_0)^3}{6}+B_2\frac{(x-x_0)^4}{12}+B_3\frac{(x-x_0)^5}{20}+\cdots+B_k\frac{(x-x_0)^{k+2}}{(k+1)(k+2)}.
\end{aligned}\tag{15}$$

Положим в (15) $x=x_i^0$. Тогда

$$y'(x_i^0)\approx U'(x_i^0)=y'(x_0)+B_0t_i+B_1\frac{t_i^2}{2}+B_2\frac{t_i^3}{3}+B_3\frac{t_i^4}{4}+\cdots+B_k\frac{t_i^{k+1}}{k+1},\tag{16}$$

$$y(x_i^0)\approx U(x_i^0)=y(x_0)+y'(x_0)t_i+B_0\frac{t_i^2}{2}+B_1\frac{t_i^3}{6}+B_2\frac{t_i^4}{12}+B_3\frac{t_i^5}{20}+\cdots+B_k\frac{t_i^{k+2}}{(k+1)(k+2)},\quad i=1,2,\ldots,k.\tag{17}$$

Если решается задача Коши для системы уравнений первого порядка ($1a$), ($2a$), то для ее решения на сегменте $[x_0,x_0+h]$ имеет место формула

$$y(x)\approx U(x)=y(x_0)+B_0(x-x_0)+B_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+B_2\frac{(x-x_0)^3}{3}+B_3\frac{(x-x_0)^4}{4}+\cdots+B_k\frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}.\tag{15a}$$

Отсюда следуют соотношения для значений решения в узлах x_i^0

$$y(x_i^0)\approx U(x_i^0)=y(x_0)+B_0t_i+B_1\frac{t_i^2}{2}+B_2\frac{t_i^3}{3}+B_3\frac{t_i^4}{4}+\cdots+B_k\frac{t_i^{k+1}}{k+1},\quad i=1,2,\ldots,k.\tag{16a}$$

Погрешность значений приближенного решения $U(x_i^0)$, определяемых по формуле (17), есть $O(h^{k+3})$, а погрешность приближенных значений производной $U'(x_i^0)$, определяемых по (16), — $O(h^{k+2})$. Погрешность приближенного решения задачи Коши ($1a$), ($2a$) $U(x_i^0)$, определяемого по ($16a$), имеет порядок $O(h^{k+2})$. Коэффициенты B_j определяются через разделенные разности функции $F(x)=f(x,y(x),y'(x))$. Так как точное решение дифференциального уравнения нам неизвестно, то точные значения коэффициентов B_j тоже неизвестны. Будем предполагать, что в формулах (15), (16), (17) коэффициенты B_j выражаются по (13) через разделенные разности, построенные по значениям $F(x_i^0)=f(x_i^0,U(x_i^0),U'(x_i^0))$, в которых $U(x_i^0)$, $U'(x_i^0)$ являются левыми частями равенств (16), (17), т.е. определяются по формулам (16), (17). Соответственно и для задачи Коши ($1a$), ($2a$) также предположим, что в формулах ($15a$), ($16a$) коэффициенты B_j выражаются по (13) через разделенные разности, построенные по значениям $F(x_i^0)=f(x_i^0,U(x_i^0))$, в которых $U(x_i^0)$ определяются по формулам ($16a$). Поэтому соотношения (16), (17) являются уравнениями относительно значений решения и производной $U(x_i^0)$, $U'(x_i^0)$, $i=1,2,\ldots,k$. Соотношения ($16a$) являются уравнениями относительно значений решения $U(x_i^0)$, $i=1,2,\ldots,k$.

Система уравнений (16), (17), а также система ($16a$) могут быть решены итерационным методом. При решении этой системы уравнений одновременно находятся коэффициенты B_j, $i=1,2,\ldots,k$.

Если подставить в (16), (17) и ($16a$) точное решение $y(x)$ задачи Коши (1), (2) и, соответственно, задачи ($1a$), ($2a$), то невязка будет равна остаточному члену в формуле (14) при $x=x_i^0$, т.е.

$$\int\limits_{x_0}^{x_i^0} r_{k,0}(t)\,dt=O\left(h^{k+2}\right)$$

для (16) и (16a) и

$$\int\limits_{x_0}^{x_i^0}\int\limits_{x_0}^{\tau} r_{k,0}(t)\,dtd\tau = O\left(h^{k+3}\right)$$

для (17).

3. Алгоритмы решения уравнений для определения коэффициентов многочленного приближения. Перейдем к описанию алгоритмов для трех видов дифференциальных уравнений.

3.1. Алгоритмы для дифференциальных уравнений с правой частью, не зависящей от производной. Если правая часть дифференциального уравнения (1) не зависит от производной, т.е.

$$y'' = f(x, y),$$

то для определения коэффициентов B_j многочлена (8) необходимо решать систему уравнений (17).

Рассмотрим итерационный процесс решения уравнений (17) более подробно. Один из подходов может быть таким.

Выбираем начальное приближение для $U(x_i)$ по формуле

$$U^{(0)}(x_i^0) = y(x_0) + y'(x_0)t_i + B_0\frac{t_i^2}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{18}$$

и находим значения правой части дифференциального уравнения

$$F(x_i^0) = f(x_i^0, U^{(0)}(x_i^0)), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

С этими значениями вычисляем по (7) начальное приближение для разделенных разностей

$$F^{(0)}(x_0; x_1^0),\ F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0),\ F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0), \ldots .$$

Затем, учитывая только что вычисленное начальное приближение для разделенных разностей, по (13) определяем начальное приближение для коэффициентов многочлена $B_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Используя построенное начальное приближение для коэффициентов многочлена B_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, находим следующее приближение для $U(x_i^0)$ по формуле

$$\begin{gathered}U^{(\nu+1)}(x_i^0) = y(x_0) + y'(x_0)t_i + B_0\frac{t_i^2}{2} + B_1^{(\nu)}\frac{t_i^3}{6} + B_2^{(\nu)}\frac{t_i^4}{12} + B_3^{(\nu)}\frac{t_i^5}{20} + \cdots + \\ + B_k^{(\nu)}\frac{t_i^{k+2}}{(k+1)(k+2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,\end{gathered} \tag{19}$$

при $\nu = 0$. С этими значениями вычисляем по (7) следующее (первое) приближение для разделенных разностей

$$F^{(1)}(x_0; x_1^0), \quad F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0), \quad F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0), \ldots .$$

Затем, используя только что вычисленное первое приближение для разделенных разностей, по (13) определяем первое приближение для коэффициентов многочлена $B_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Дальнейшие приближения для коэффициентов $B_j^{(\nu)}$, $\nu = 2, 3, \ldots$, строятся по такой же схеме. Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности (относительно h) очередного приближения $U^{(\nu+1)}(x_i^0)$ и $B_j^{(\nu+1)}$ на два до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения $U(x_i^0)$, равный порядку точности формулы (17). Итерации продолжаются до достижения максимального порядка точности решения $U(x_i^0)$ или до тех пор, пока не будет достигнута наперед заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций. В качестве значений коэффициентов B_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, многочлена (8) принимаются значения, полученные на последней выполненной итерации $\nu + 1$:

$$B_j = B_j^{(\nu+1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Рассмотрим другой вариант вычисления значений $U(x_i^0)$ и коэффициентов B_j, определяемых из системы уравнений (17).

Допустим, что мы имеем начальное приближение для разделенных разностей

$$F^{(0)}(x_0; x_1^0), \quad F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0), \quad F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0), \ldots .$$

Это начальное приближение может быть определено по (7) с использованием вычисленного по (18) начального приближения $U^{(0)}(x_i^0)$ либо получено каким-нибудь другим способом. Тогда по (13) определяем начальное приближение для коэффициентов многочлена $B_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. При выборе начального приближения для разделенных разностей можно также взять все разделенные разности равными нулю. В этом случае будет равно нулю и начальное приближение $B_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Далее находим первое приближение для $U(x_1^0)$ по формуле

$$U^{(1)}(x_1^0) = y(x_0) + y'(x_0)t_1 + B_0\frac{t_1^2}{2} + B_1^{(0)}\frac{t_1^3}{6} + B_2^{(0)}\frac{t_1^4}{12} + B_3^{(0)}\frac{t_1^5}{20} + \cdots + B_k^{(0)}\frac{t_1^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \tag{20}$$

и значение правой части дифференциального уравнения

$$F(x_1^0) = f(x_1^0, U^{(1)}(x_1^0)).$$

С этим значением вычисляем по первой формуле (7) первое приближение для разделенной разности первого порядка $F^{(1)}(x_0; x_1^0)$. Используя это первое приближение $F^{(1)}(x_0; x_1^0)$ и нулевые приближения для разделенных разностей второго и более высокого порядка, по второй формуле (13) определяем первое приближение для коэффициента B_1, а именно

$$B_1^{(1)} = b_{11}F^{(1)}(x_0; x_1^0) + b_{21}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{31}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + \cdots.$$

Это значение может быть вычислено также по более простой формуле

$$B_1^{(1)} = B_1^{(0)} - F^{(0)}(x_0; x_1^0) + F^{(1)}(x_0; x_1^0).$$

Затем, используя первое приближение $B_1^{(1)}$ для коэффициента B_1 и нулевое приближение для коэффициентов $B_2, \ldots, B_k$, находим первое приближение для $U(x_2^0)$ по формуле

$$U^{(1)}(x_2^0) = y(x_0) + y'(x_0)t_2 + B_0\frac{t_2^2}{2} + B_1^{(1)}\frac{t_2^3}{6} + B_2^{(0)}\frac{t_2^4}{12} + B_3^{(0)}\frac{t_2^5}{20} + \cdots + B_k^{(0)}\frac{t_2^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \tag{21}$$

и значение правой части дифференциального уравнения

$$F(x_2^0) = f(x_2^0, U^{(1)}(x_2^0)).$$

С этим значением вычисляем по второй формуле (7) первое приближение для разделенной разности второго порядка

$$F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) = \frac{\dfrac{F(x_2^0) - F(x_0)}{x_2^0 - x_0} - F^{(1)}(x_0; x_1^0)}{x_2^0 - x_1^0}.$$

Используя это первое приближение $F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0)$ и нулевые приближения для разделенных разностей третьего и более высокого порядка, по третьей формуле (13) определяем первое приближение для коэффициента B_2:

$$B_2^{(1)} = b_{22}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{32}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + +b_{42}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0) + \cdots.$$

Это значение может быть вычислено также по более простой формуле

$$B_2^{(1)} = B_2^{(0)} - F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0).$$

Затем, используя первое приближение для разделенной разности второго порядка $F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0)$, по второй формуле (13) определяем второе приближение для коэффициента B_1, а именно:

$$B_1^{(2)} = b_{11}F^{(1)}(x_0; x_1^0) + b_{21}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{31}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + \cdots$$

или по более простой формуле

$$B_1^{(2)} = B_1^{(1)} - b_{21}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{21}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) = B_1^{(1)} + b_{21}(F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) - F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0)).$$

Затем, используя первое приближение $B_2^{(1)}$ для коэффициента B_2, второе приближение $B_1^{(2)}$ для коэффициента B_1 и нулевое приближение для коэффициентов $B_3, B_4, \ldots, B_k$, находим первое приближение для $U(x_3^0)$ по формуле

$$U^{(1)}(x_3^0) = y(x_0) + y'(x_0)t_3 + B_0\frac{t_3^2}{2} + B_1^{(2)}\frac{t_3^3}{6} + B_2^{(1)}\frac{t_3^4}{12} + B_3^{(0)}\frac{t_3^5}{20} + \cdots + B_k^{(0)}\frac{t_3^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \tag{22}$$

и значение правой части дифференциального уравнения

$$F(x_3^0) = f(x_3^0, U^{(1)}(x_3^0)).$$

С этим значением вычисляем по третьей формуле (7) первое приближение для разделенной разности третьего порядка

$$F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) = \frac{\dfrac{\dfrac{F(x_3^0) - F(x_0)}{x_3^0 - x_0} - F^{(1)}(x_0; x_1^0)}{x_3^0 - x_1^0} - F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0)}{x_3^0 - x_2^0}.$$

Используя это первое приближение $F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0)$ и нулевое приближение для разделенных разностей четвертого и более высокого порядка, по четвертой формуле (13) определяем первое приближение для коэффициента B_3:

$$B_3^{(1)} = b_{33}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{43}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0) + b_{53}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0; x_5^0) + \cdots .$$

Это значение может быть вычислено по более простой формуле

$$B_3^{(1)} = B_3^{(0)} - F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0).$$

Используя первое приближение для разделенной разности третьего порядка $F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0)$, по третьей формуле (13) определяем второе приближение для коэффициента B_2, а именно:

$$B_2^{(2)} = b_{22}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{32}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{42}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0) + \cdots$$

или по более простой формуле

$$B_2^{(2)} = B_2^{(1)} - b_{32}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{32}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) = B_2^{(1)} + b_{32}(F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) - F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0)).$$

По второй формуле (13) определяем третье приближение для коэффициента B_1:

$$B_1^{(3)} = b_{11}F^{(1)}(x_0; x_1^0) + b_{21}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{31}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{41}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0) + \cdots$$

или по более простой формуле

$$B_1^{(3)} = B_1^{(2)} - b_{31}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{31}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) = B_1^{(2)} + b_{31}(F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) - F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0)).$$

Аналогично вычисляем остальные коэффициенты многочлена (8). Если, например, $k = 3$, то принимаем в качестве значений коэффициентов B_j многочлена (8) следующие значения:

$$B_1 = B_1^{(3)}, \quad B_2 = B_2^{(2)}, \quad B_3 = B_3^{(1)}.$$

После того как определены все коэффициенты $B_1, \ldots, B_k$ многочлена (8) и в качестве их значений приняты значения

$$B_1 = B_1^{(k)}, \quad B_2 = B_2^{(k-1)}, \quad \ldots \quad B_k = B_k^{(1)},$$

можно повторить описанный выше процесс. Для этого определяем второе приближение для $U(x_1^0)$ по формуле

$$U^{(2)}(x_1^0) = y(x_0) + y'(x_0)t_1 + B_0\frac{t_1^2}{2} + B_1^{(k)}\frac{t_1^3}{6} + B_2^{(k-1)}\frac{t_1^4}{12} + B_3^{(k-2)}\frac{t_1^5}{20} + \cdots + B_k^{(1)}\frac{t_1^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \tag{23}$$

и значение правой части дифференциального уравнения $F(x_1^0) = f(x_1^0, U^{(2)}(x_1^0))$. С этим значением вычисляем по первой формуле (7) второе приближение для разделенной разности первого порядка $F^{(2)}(x_0; x_1^0)$. Используя это второе приближение $F^{(2)}(x_0; x_1^0)$ и первые приближения для разделенных разностей второго и более высокого порядка, по второй формуле (13) определяем очередное приближение для коэффициента B_1, а именно:

$$B_1^{(k+1)} = b_{11}F^{(2)}(x_0; x_1^0) + b_{21}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{31}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + \cdots$$

или по более простой формуле

$$B_1^{(k+1)} = B_1^{(k)} - F^{(1)}(x_0; x_1^0) + F^{(2)}(x_0; x_1^0).$$

Затем, используя приближение $B_1^{(k+1)}$ для коэффициента B_1 и предыдущие приближения для остальных коэффициентов, находим второе приближение для $U(x_2^0)$ по формуле

$$U^{(2)}(x_2^0) = y(x_0) + y'(x_0)t_2 + B_0\frac{t_2^2}{2} + B_1^{(k+1)}\frac{t_2^3}{6} + B_2^{(k-1)}\frac{t_2^4}{12} + B_3^{(k-2)}\frac{t_2^5}{20} + \cdots + B_k^{(1)}\frac{t_2^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \qquad (24)$$

и значение правой части дифференциального уравнения $F(x_2^0) = f(x_2^0,\, U^{(2)}(x_2^0))$. С этим значением вычисляем по второй формуле (7) второе приближение для разделенной разности второго порядка

$$F^{(2)}(x_0; x_1^0; x_2^0) = \frac{\dfrac{F(x_2^0) - F(x_0)}{x_2^0 - x_0} - F^{(2)}(x_0; x_1^0)}{x_2^0 - x_1^0}.$$

Используя это второе приближение $F^{(2)}(x_0; x_1^0; x_2^0)$ и первые приближения для разделенных разностей третьего и более высокого порядка, по третьей формуле (13) определяем очередное приближение для коэффициента B_2:

$$B_2^{(k)} = b_{22}F^{(2)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{32}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{42}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0) + \cdots$$

или по более простой формуле

$$B_2^{(k)} = B_2^{(k-1)} - F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + F^{(2)}(x_0; x_1^0; x_2^0).$$

Затем по второй формуле (13) определяем очередное приближение для коэффициента B_1:

$$B_1^{(k+2)} = b_{11}F^{(2)}(x_0; x_1^0) + b_{21}F^{(2)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{31}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + \cdots$$

или по более простой формуле

$$B_1^{(k+2)} = B_1^{(k+1)} - b_{21}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{21}F^{(2)}(x_0; x_1^0; x_2^0) = B_1^{(k+1)} + b_{21}(F^{(2)}(x_0; x_1^0; x_2^0) - F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0)).$$

Далее вычисления продолжаем тем же способом, как изложено выше. В результате будут определены $B_1^{(2k)}$, $B_2^{(2k-2)}$, $B_3^{(2k-4)}$, …, $B_{k-1}^{(4)}$, $B_k^{(2)}$. Описанный процесс определения коэффициентов B_1, B_2, …, B_k можно снова повторить. После выполнения ν итераций будут получены такие значения:

$$U^{(\nu)}(x_i^0), \quad i = 1, \ldots, k,$$

и

$$B_j^{(\nu(k-j+1))}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Как и в первом подходе решения системы уравнений (17), каждая вновь выполняемая ν-я итерация после вычисления всех $U(x_i^0)$, $i = 1, \ldots, k$, и всех коэффициентов B_j, $j = 1, \ldots, k$, увеличивает порядок точности очередного приближения решения $U^{(\nu)}(x_i^0)$ и коэффициента $B_j^{(\nu(k-j+1))}$ на два, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения $U(x_i^0)$. Итерации продолжаются до достижения максимального порядка точности решения или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

Теперь сделаем замечание, относящееся к вычислению начального приближения для разделенных разностей

$$F^{(0)}(x_0; x_1^0), \quad F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0), \quad F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0), \ \ldots .$$

Допустим, что уравнения (1) описывают движение искусственного спутника Земли под действием гравитационных сил. Траектория спутника представляет собой сложную незамкнутую кривую. На коротком интервале времени, равном шагу интегрирования h, можно принять движение спутника как движение точки вокруг притягивающего центра, т.е. как движение по невозмущенному эллипсу. Тогда в точках x_i^0, $i = 1, 2, \ldots, k$, начальное приближение для $U(x_i^0)$ и значения правой части дифференциального уравнения $F(x_i^0) = f(x_i^0, U^{(0)}(x_i^0))$ можно вычислить по формулам классической задачи двух тел [5]. Если же движение спутника на шаге интегрирования h принять как движение по так называемой промежуточной орбите обобщенной задачи двух неподвижных центров [5, 6], в которую включены полностью возмущения от второй, третьей зональных гармоник и значительная часть возмущения от четвертой зональной гармоники геопотенциала, то начальное приближение для $F(x_i^0)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, будет еще точнее. Выражения для $F(x_i^0)$ в этом случае приводятся в работе [6].

Использование данной методики позволяет ускорить итерационный процесс определения коэффициентов аппроксимирующего многочлена и сократить 1–2 итерации.

3.2. Алгоритмы для уравнений с правой частью, зависящей от производной. Рассмотрим итерационный процесс решения системы уравнений (16), (17).

Описанные в предыдущем подразделе алгоритмы также применимы и для задачи Коши (1), (2), но при этом их необходимо дополнить нахождением приближенных значений производной. Каждый раз, когда по (19) вычисляется очередное приближение для решения $U^{(\nu)}(x_i^0)$, нужно вычислить также очередное приближение для производной $U'^{(\nu)}(x_i^0)$ и только после этого можно будет вычислить правую часть

$$F^{(\nu)}(x_i^0) = f(x_i^0, U^{(\nu)}(x_i^0), U'^{(\nu)}(x_i^0))$$

и требуемые разделенные разности, а затем получить соответствующее приближение для коэффициентов B_j. При этом, если используется первый подход для определения коэффициентов B_j, то для вычисления производной применяются формулы: для начального приближения —

$$U'^{(0)}(x_i^0) = y'(x_0) + B_0 t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

для следующего приближения —

$$U'^{(\nu+1)}(x_i^0) = y'(x_0) + B_0 t_i + B_1^{(\nu)} \frac{t_i^2}{2} + B_2^{(\nu)} \frac{t_i^3}{3} + B_3^{(\nu)} \frac{t_i^4}{4} + \cdots + B_k^{(\nu)} \frac{t_i^{k+1}}{k+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Если используется второй вариант определения коэффициентов B_j, то для вычисления производной применяются ниже приводимые формулы.

После вычисления по (20) приближенного решения в узле x_1^0 значение производной в этом узле определяется по формуле

$$U'^{(1)}(x_1^0) = y'(x_0) + B_0 t_1 + B_1^{(0)} \frac{t_1^2}{2} + B_2^{(0)} \frac{t_1^3}{3} + B_3^{(0)} \frac{t_1^4}{4} + \cdots + B_k^{(0)} \frac{t_1^{k+1}}{k+1}.$$

После вычисления по (21) приближенного решения в узле x_2^0 значение производной в этом узле определяется по формуле

$$U'^{(1)}(x_2^0) = y'(x_0) + B_0 t_2 + B_1^{(1)} \frac{t_2^2}{2} + B_2^{(0)} \frac{t_2^3}{3} + B_3^{(0)} \frac{t_2^4}{4} + \cdots + B_k^{(0)} \frac{t_2^{k+1}}{k+1}.$$

После вычисления по (22) решения в узле x_3^0 значение производной в этом узле определяется по формуле

$$U'^{(1)}(x_3^0) = y'(x_0) + B_0 t_3 + B_1^{(2)} \frac{t_3^2}{2} + B_2^{(1)} \frac{t_3^3}{3} + B_3^{(0)} \frac{t_3^4}{4} + \cdots + B_k^{(0)} \frac{t_3^{k+1}}{k+1}.$$

После вычисления по (23) второго приближения для значения решения в узле x_1^0 второе приближение для значения производной в этом же узле определяется по формуле

$$U'^{(2)}(x_1^0) = y'(x_0) + B_0 t_1 + B_1^{(k)} \frac{t_1^2}{2} + B_2^{(k-1)} \frac{t_1^3}{3} + B_3^{(k-2)} \frac{t_1^4}{4} + \cdots + B_k^{(1)} \frac{t_1^{k+1}}{k+1}.$$

После вычисления по (24) второго приближения для значения решения в узле x_2^0 второе приближение для значения производной в этом узле определяется по формуле

$$U'^{(2)}(x_2^0) = y'(x_0) + B_0 t_2 + B_1^{(k+1)} \frac{t_2^2}{2} + B_2^{(k-1)} \frac{t_2^3}{3} + B_3^{(k-2)} \frac{t_2^4}{4} + \cdots + B_k^{(1)} \frac{t_2^{k+1}}{k+1}.$$

После выполнения ν итераций будут получены такие значения:

$$U^{(\nu)}(x_i^0), \quad U'^{(\nu)}(x_i^0), \quad i = 1, \ldots, k,$$

и

$$B_j^{(\nu(k-j+1))}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

В обоих вариантах итерационного процесса решения системы уравнений (16), (17) каждая вновь выполняемая ν-я итерация после вычисления всех $U(x_i^0)$, $U'(x_i^0)$, $i = 1, \ldots, k$, и всех B_j, $j = 1, \ldots, k$, увеличивает порядок точности очередного приближения $U^{(\nu)}(x_i^0)$, $U'^{(\nu)}(x_i^0)$ и $B_j^{(\nu(k-j+1))}$ на единицу, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения и производной, равный порядку точности формул (16) и (17). Итерации продолжаются до достижения максимального порядка точности решения и производной или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

Сделаем одно замечание. В работе [9] на стр. 70 говорится, что "алгоритм для решения уравнения общего вида $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$ мы подробно рассмотрели в разделах 6.1, 6.2". В разделе 6.2 под номером (6.9) приводятся три формулы, которые служат для определения решения y в промежуточные моменты времени t_2, t_3, t_4 (у нас эти моменты обозначены x_1^0, x_2^0, x_3^0). Далее на стр. 69 говорится, что "эти три предсказующих уравнения служат для определения коэффициентов A_i $(i = 1, 2, 3, \dots)$ ...". В действительности же этих трех формул под номером (6.9) отнюдь не достаточно для определения указанных коэффициентов, если правая часть дифференциального уравнения зависит от производной. Эти формулы следует дополнить формулами для определения производной решения в промежуточных точках.

3.3. Алгоритмы для уравнений первого порядка. Рассмотрим итерационный процесс решения системы уравнений (16a). Один из подходов может быть таким.

Выбираем начальное приближение для $U(x_i^0)$ по формуле

$$U^{(0)}(x_i^0) = y(x_0) + B_0 t_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

и находим значение правой части дифференциального уравнения $F(x_i^0) = f(x_i^0, U^{(0)}(x_i^0))$. Далее вычисляем по (7) начальное приближение для разделенных разностей

$$F^{(0)}(x_0; x_1^0), \quad F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0), \quad \dots$$

и по (13) начальное приближение для коэффициентов многочлена $B_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Используя построенное начальное приближение для коэффициентов, находим следующее приближение для $U(x_i^0)$ по формуле

$$U^{(\nu+1)}(x_i^0) = y(x_0) + B_0 t_i + B_1^{(\nu)} \frac{t_i^2}{2} + B_2^{(\nu)} \frac{t_i^3}{3} + B_3^{(\nu)} \frac{t_i^4}{4} + \dots + B_k^{(\nu)} \frac{t_i^{k+1}}{k+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

при $\nu = 0$. Далее вычисляем следующее (первое) приближение для разделенных разностей

$$F^{(1)}(x_0; x_1^0), \quad F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0), \quad \dots$$

и первое приближение для коэффициентов $B_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Дальнейшие приближения строятся по такой же схеме. В качестве значений коэффициентов B_j принимаются значения, полученные на последней выполненной итерации. Каждая итерация увеличивает порядок точности очередного приближения $U(x_i^0)$ и B_j на единицу до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности приближенного решения $U(x_i^0)$, равный порядку точности формулы (16a).

Рассмотрим другой возможный вариант итерационного процесса решения системы уравнений (16a).

Допустим, что мы имеем начальное приближение для разделенных разностей $F^{(0)}(x_0; x_1^0)$, $F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0)$ и т.д. Тогда по (13) определяем начальное приближение для коэффициентов многочлена $B_j^{(0)}$. При выборе начального приближения для разделенных разностей можно взять все разделенные разности равными нулю. В этом случае будет равно нулю и начальное приближение $B_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Далее находим первое приближение для $U(x_1^0)$ по формуле

$$U^{(1)}(x_1^0) = y(x_0) + B_0 t_1 + B_1^{(0)} \frac{t_1^2}{2} + B_2^{(0)} \frac{t_1^3}{3} + B_3^{(0)} \frac{t_1^4}{4} + \dots + B_k^{(0)} \frac{t_1^{k+1}}{k+1}$$

и значение правой части дифференциального уравнения $F(x_1^0) = f(x_1^0, U^{(1)}(x_1^0))$. С этим значением вычисляем по (7) первое приближение для разделенной разности первого порядка $F^{(1)}(x_0; x_1^0)$, а затем и первое приближение для B_1, а именно:

$$B_1^{(1)} = b_{11} F^{(1)}(x_0; x_1^0) + b_{21} F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + \dots$$

или

$$B_1^{(1)} = B_1^{(0)} - F^{(0)}(x_0; x_1^0) + F^{(1)}(x_0; x_1^0).$$

Используя первое приближение $B_1^{(1)}$ для коэффициента B_1 и нулевое приближение для остальных коэффициентов $B_2^{(0)}, \dots, B_k^{(0)}$, находим первое приближение для $U(x_2^0)$ по формуле

$$U^{(1)}(x_2^0) = y(x_0) + B_0 t_2 + B_1^{(1)} \frac{t_2^2}{2} + B_2^{(0)} \frac{t_2^3}{3} + B_3^{(0)} \frac{t_2^4}{4} + \dots + B_k^{(0)} \frac{t_2^{k+1}}{k+1}$$

и значение правой части дифференциального уравнения $F(x_2^0) = f(x_2^0, U^{(1)}(x_2^0))$. С этим значением вычисляем по (7) первое приближение для разделенной разности второго порядка

$$F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) = \frac{\dfrac{F(x_2^0) - F(x_0)}{x_2^0 - x_0} - F^{(1)}(x_0; x_1^0)}{x_2^0 - x_1^0},$$

а затем и первое приближение для B_2, а именно:

$$B_2^{(1)} = b_{22}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{32}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + \cdots$$

или

$$B_2^{(1)} = B_2^{(0)} - F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0).$$

Затем определяем второе приближение для коэффициента B_1:

$$B_1^{(2)} = b_{11}F^{(1)}(x_0; x_1^0) + b_{21}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{31}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + \cdots$$

или

$$B_1^{(2)} = B_1^{(1)} - b_{21}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{21}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0).$$

Используя первое приближение $B_2^{(1)}$ для коэффициента B_2, второе приближение $B_1^{(2)}$ для коэффициента B_1 и нулевое приближение для остальных коэффициентов $B_3^{(0)}, \ldots, B_k^{(0)}$, находим первое приближение для $U(x_3^0)$ по формуле

$$U^{(1)}(x_3^0) = y(x_0) + B_0 t_3 + B_1^{(2)}\frac{t_3^2}{2} + B_2^{(1)}\frac{t_3^3}{3} + B_3^{(0)}\frac{t_3^4}{4} + \cdots + B_k^{(0)}\frac{t_3^{k+1}}{k+1}$$

и значение правой части $F(x_3^0) = f(x_3^0, U^{(1)}(x_3^0))$. С этим значением вычисляем по (7) первое приближение для разделенной разности третьего порядка

$$F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) = \frac{\dfrac{\dfrac{F(x_3^0) - F(x_0)}{x_3^0 - x_0} - F^{(1)}(x_0; x_1^0)}{x_3^0 - x_1^0} - F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0)}{x_3^0 - x_2^0},$$

а затем и первое приближение для B_3:

$$B_3^{(1)} = b_{33}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{43}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0) + \cdots$$

или

$$B_3^{(1)} = B_3^{(0)} - F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0).$$

Далее определяем второе приближение для коэффициента B_2:

$$B_2^{(2)} = b_{22}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{32}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{42}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0) + \cdots$$

или

$$B_2^{(2)} = B_2^{(1)} - b_{32}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{32}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0)$$

и третье приближение для коэффициента B_1

$$B_1^{(3)} = b_{11}F^{(1)}(x_0; x_1^0) + b_{21}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{31}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{41}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0) + \cdots$$

или

$$B_1^{(3)} = B_1^{(2)} - b_{31}F^{(0)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) + b_{31}F^{(1)}(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0).$$

Аналогично вычисляем остальные коэффициенты. Если, например, $k = 3$, то в качестве значений коэффициентов принимаем

$$B_1 = B_1^{(3)}, \quad B_2 = B_2^{(2)}, \quad B_3 = B_3^{(1)}.$$

После того как определены все коэффициенты $B_1, \ldots, B_k$ и в качестве их значений приняты значения

$$B_1 = B_1^{(k)}, \quad B_2 = B_2^{(k-1)}, \quad \ldots, \quad B_k = B_k^{(1)},$$

можно повторить описанный выше процесс и получить новое приближение для всех коэффициентов:

$$B_1 = B_1^{(2k)}, \quad B_2 = B_2^{(2k-2)}, \quad \ldots, \quad B_{k-1} = B_{k-1}^{(4)}, \quad B_k = B_k^{(2)}.$$

После выполнения ν итераций будут получены такие значения:

$$U^{(\nu)}(x_i^0), \quad i = 1, \ldots, k, \quad \text{и} \quad B_j^{(\nu(k-j+1))}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Каждая вновь выполняемая ν-я итерация после вычисления всех $U(x_i^0)$, $i=1,\ldots,k$, и всех B_j, $j=1,\ldots,k$, увеличивает порядок точности очередного приближения $U^{(\nu)}(x_i^0)$ и $B_j^{(\nu(k-j+1))}$ на единицу, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения $U(x_i^0)$, равный порядку точности формулы (16a). Итерации продолжаются до достижения максимального порядка точности решения или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

4. Выполнение одного шага интегрирования $\mathbf{x_1=x_0+h_0}$. По найденным значениям коэффициентов $B_1,\ B_2,\ldots,B_k$ вычисляем по (15) приближенное значение производной решения задачи Коши (1), (2) в конце сегмента $[x_0,x_0+h]$:

$$y'(x_0+h)=y'(x_1)\approx U'(x_1)=y'(x_0)+B_0h+B_1\frac{h^2}{2}+B_2\frac{h^3}{3}+B_3\frac{h^4}{4}+\cdots+B_k\frac{h^{k+1}}{k+1} \tag{25}$$

и приближенное значение решения задачи Коши (1), (2) в конце сегмента $[x_0,x_0+h]$:

$$y(x_0+h)=y(x_1)\approx U(x_1)=y(x_0)+y'(x_0)h+B_0\frac{h^2}{2}+B_1\frac{h^3}{6}+B_2\frac{h^4}{12}+B_3\frac{h^5}{20}+\cdots+B_k\frac{h^{k+2}}{(k+1)(k+2)}. \tag{26}$$

При этом погрешность приближенного значения производной $U'(x_0+h)$ есть $O(h^{k+2})$, а погрешность приближенного значения решения $U(x_0+h)$ — $O(h^{k+3})$.

Если решается задача Коши для системы уравнений первого порядка (1a), (2a), то приближенное значение решения в конце сегмента $[x_0,x_0+h]$ вычисляется по формуле (15a) при $x=x_0+h$:

$$y(x_0+h)=y(x_1)\approx U(x_1)=y(x_0)+B_0h+B_1\frac{h^2}{2}+B_2\frac{h^3}{3}+B_3\frac{h^4}{4}+\cdots+B_k\frac{h^{k+1}}{k+1}. \tag{25a}$$

Погрешность приближенного значения решения $U(x_0+h)$ есть $O(h^{k+2})$.

Так как коэффициенты $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$ определяются приближенно с помощью описанного выше итерационного процесса, то указанные здесь оценки погрешности решения и производной будут справедливы тогда, когда погрешности вычисления коэффициентов $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$ имеют достаточный для этого порядок относительно h.

Ниже будет показано, что за счет специального выбора вспомогательных точек x_i^0 порядок точности приближенных значений решения и производной может быть увеличен.

5. Переход к следующему шагу интегрирования $\mathbf{x_2=x_1+h_1}$. Вычисленные значения решения и производной $y(x_0+h)$, $y'(x_0+h)$ и точку $x_1=x_0+h$ принимаем за новые начальные условия и переходим к вычислению решения и его производной в следующей точке $x_2=x_1+h_1$, причем величина шага h_1 может отличаться от величины ранее выполненного шага $h=h_0$. Снова возьмем на отрезке $[x_1,x_1+h_1]$ вспомогательные точки $x_i^1=x_1+t_i=x_1+\alpha_ih_1$, $i=0,1,\ldots,k$, и по этим точкам построим для функции $F(x)=f(x,y(x),y'(x))$ интерполяционный многочлен Ньютона для неравных промежутков:

$$\begin{aligned}L_{k,1}(x)=F(x_1)&+(x-x_1)F(x_1;x_1^1)+(x-x_1)(x-x_1^1)F(x_1;x_1^1;x_2^1)+\\&+(x-x_1)(x-x_1^1)(x-x_2^1)F(x_1;x_1^1;x_2^1;x_3^1)+\cdots+\\&+(x-x_1)(x-x_1^1)\ldots(x-x_{k-1}^1)F(x_1;x_1^1;x_2^1;\ldots;x_k^1).\end{aligned} \tag{27}$$

Представим этот многочлен в виде многочлена по степеням независимой переменной:

$$L_{k,1}(x)=B_0+B_1(x-x_1)+B_2(x-x_1)^2+\cdots+B_k(x-x_1)^k. \tag{28}$$

На втором шаге $x_2=x_1+h_1$ для определения коэффициентов B_j многочлена (28) мы можем в качестве начального приближения для разделенных разностей $F^{(0)}(x_1;x_1^1;x_2^1;\ldots;x_i^1)$, $i\leqslant k$, взять полученные на предыдущем шаге $h=h_0$ значения разделенных разностей на последней итерации, т.е.

$$F^{(0)}(x_1;x_1^1;x_2^1;\ldots;x_i^1)=F^{(\nu+1)}(x_0;x_1^0;x_2^0;\ldots;x_i^0),\quad i\leqslant k. \tag{29}$$

Используя эти начальные приближения, вычисляем по (13) начальное приближение для коэффициентов B_j, $j=1,2,\ldots,k$, многочлена (28). При этом в (13) разделенные разности $F(x_0;x_1^0;x_2^0;\ldots;x_i^0)$, $i\leqslant k$, надо заменить на $F(x_1;x_1^1;x_2^1;\ldots;x_i^1)$, $i\leqslant k$, а в (12) величины t_i равны

$$t_i=\alpha_ih_1.$$

Далее итерационный процесс определения коэффициентов B_j многочлена (28) продолжается таким же способом, как и на начальном шаге $[x_0,x_0+h_0]$.

Здесь можно сделать замечание, аналогичное тому, которое было сделано в конце подраздела 3.1 в том случае, когда уравнения (1) описывают движение искусственного спутника Земли под действием гравитационных сил.

6. Повышение порядка точности многочленного приближения с помощью выбора специального разбиения шага интегрирования. Рассмотрим, каким способом можно выбрать разбиение шага интегрирования h, т.е. как распределить вспомогательные промежуточные точки $x_i^0 = x_0 + t_i = x_0 + \alpha_i h$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, которые являются узлами интерполирования, на сегменте $[x_0, x_0 + h]$.

Можно выбрать равномерное разбиение шага интегрирования h, т.е. вспомогательные промежуточные точки равномерно распределить на сегменте $[x_0, x_0 + h]$:

$$x_i^0 = x_0 + \frac{i}{k} h.$$

Здесь $\alpha_i = i/k$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

Можно выбрать неравномерное разбиение шага интегрирования h. В этом случае вспомогательные точки x_i^0, являющиеся узлами интерполирования, будут неравномерно распределены на сегменте $[x_0, x_0 + h]$.

Рассмотрим этот последний случай более подробно. Для этого перейдем сначала к численному интегрированию функции одной переменной.

6.1. Квадратурные формулы с наперед заданными узлами. Остановимся на задаче вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx, \tag{30}$$

где $p(x)$ — некоторая фиксированная функция, удовлетворяющая условию $p(x) > 0$ на $[a, b]$, $f(x)$ — определенная на $[a, b]$ функция. Рассмотрим квадратурную формулу, содержащую наперед заданные узлы $a_1, \dots, a_m$ и имеющую вид

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{l=1}^{m} D_l f(a_l). \tag{31}$$

Эта формула содержит параметры A_i, x_i, $i = 1, \dots, n$, и D_l, $l = 1, \dots, m$. При любом расположении узлов x_i можно за счет выбора коэффициентов A_i и D_l достигнуть того, чтобы квадратурная формула (31) была точна для всех алгебраических многочленов степени не выше $n + m - 1$. Для этого достаточно, чтобы она была интерполяционной. Для того чтобы квадратурная формула (31) оставалась верной для многочленов более высокой степени, необходимо специальным образом выбирать узлы x_i. В (31) коэффициенты A_i, D_l и узлы x_i выбирают таким образом, чтобы формула была точна для многочленов возможно более высокой степени.

Обозначим

$$\Omega(x) = (x - a_1) \dots (x - a_m), \quad \omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Справедлива теорема из [7]:

Теорема. *Для того чтобы квадратурная формула* (31) *была точной для многочленов степени* $2n + m - 1$, *необходимо и достаточно, чтобы формула была интерполяционной и чтобы многочлен* $\omega(x)$ *был ортогонален на отрезке* $[a, b]$ *с весом* $p(x)\Omega(x)$ *к любому многочлену* $q(x)$ *степени, не превосходящей* $n - 1$.

Доказательство теоремы приведено в [7].

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ производную порядка $2n + m$, то остаточный член формулы (31) будет равен [7]:

$$R(f) = \int_a^b p(x)\, \Omega(x)\, \omega^2(x)\, \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!}\, dx, \quad a < \xi < b. \tag{32}$$

Из теоремы следует, что для того, чтобы построить квадратурную формулу (31) при любом n, надо построить многочлен $\omega(x)$, ортогональный на отрезке $[a, b]$ с весом $p(x)\Omega(x)$ ко всем многочленам степени не выше $n - 1$.

Рассмотрим квадратурные формулы частного вида, а именно: формулы численного интегрирования Маркова.

Пусть $m = 1$ и $a_1 = a$. Предположим также, что $p(x) \equiv 1$, отрезок $[a, b]$ совпадает с отрезком $[-1, 1]$. Тогда квадратурная формула (31) будет иметь вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = D \cdot f(-1) + \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R(f). \tag{33}$$

Алгебраическая степень точности этой формулы равна $2n$. Многочлен $\omega(x)$ будет принадлежать системе многочленов, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом $\Omega(x) = x - a = x + 1$. Многочленами, ортогональными на $[-1,1]$ с таким весом, являются многочлены Якоби, которые могут быть представлены в виде следующей формулы Родрига:

$$P_n^{(0,1)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{1}{1+x}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^n(1+x)^{1+n}\right]. \tag{34}$$

Таким образом, узлы x_i, $i = 1, \ldots, n$, квадратурной формулы (33) должны совпадать с корнями многочлена Якоби

$$P_n^{(0,1)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{1}{1+x}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n(1+x)\right]. \tag{35}$$

Для многочленов Якоби $P_n^{(0,1)}(x)$ справедлива рекуррентная формула

$$(2n+1)(2n+3)xP_n^{(0,1)}(x) = (n+2)(2n+1)P_{n+1}^{(0,1)}(x) + P_n^{(0,1)}(x) + n(2n+3)P_{n-1}^{(0,1)}(x).$$

Покажем, что многочлен Якоби $P_n^{(0,1)}(x)$ можно выразить через многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right], \tag{36}$$

ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $p(x) \equiv 1$, следующим образом:

$$P_n^{(0,1)}(x) = \frac{P_n(x) + P_{n+1}(x)}{x+1}. \tag{37}$$

В самом деле, применим формулу Лейбница для n-й производной произведения двух функций в (35) и получим:

$$P_n^{(0,1)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{1}{x+1}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \cdot (x+1) + n\,,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\right]. \tag{38}$$

Подставляя (36) в (37) имеем:

$$\frac{P_n(x) + P_{n+1}(x)}{x+1} = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{1}{x+1}\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n + \frac{1}{2(n+1)}\,\frac{d^n}{dx^n}[(n+1)\left(x^2-1\right)^n \cdot 2x]\right\}.$$

Опять применим формулу Лейбница для n-й производной произведения двух функций во втором слагаемом в фигурных скобках предыдущего равенства и получим:

$$\frac{P_n(x) + P_{n+1}(x)}{x+1} = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{1}{x+1}\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \cdot (x+1) + n\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\right\}. \tag{39}$$

Правые части равенств в (38) и (39) равны. Следовательно, равны и левые части этих равенств. Таким образом, формула (37) доказана.

Итак, узел x_i квадратурной формулы (33) есть i-й корень ортогонального многочлена Якоби $P_n^{(0,1)}(x)$, или, что то же самое, многочлена

$$\frac{P_n(x) + P_{n+1}(x)}{x+1}.$$

Можно также сказать, что все узлы квадратурной формулы (33), включая и левую границу отрезка интегрирования, являются нулями многочлена

$$P_n(x) + P_{n+1}(x).$$

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[-1,1]$ непрерывную производную порядка $2n+1$, то остаточный член в (33) может быть, согласно (32) и формуле среднего значения, представлен в виде [7]:

$$R(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\int_{-1}^{1}(1+x)\,\omega^2(x)\,dx = \frac{2}{n+1}\left[\frac{2^n n!(n+1)!}{(2n+1)!}\right]^2\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \quad (-1 < \eta < 1). \tag{40}$$

Такое представление остаточного члена позволяет легко судить об алгебраической степени точности формулы (33). Коэффициент D в (33) равен [7]:

$$D = \frac{2}{(n+1)^2}.$$

Рассмотрим другой частный случай квадратурных формул с заданными узлами, когда $m = 2$ и $a_1 = a$, $a_2 = b$. Пусть $p(x) \equiv 1$, отрезок $[a, b]$ совпадает с отрезком $[-1, 1]$. Тогда квадратурная формула (31) будет иметь вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = D_1 f(-1) + D_2 f(1) + \sum_{i=1}^{n} A'_i f(x'_i) + R(f). \tag{41}$$

Алгебраическая степень точности этой формулы равна $2n + 1$. Многочлен

$$\omega(x) = (x - x'_1)(x - x'_2)\dots(x - x'_n)$$

будет принадлежать системе многочленов, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\Omega(x) = (x - a)(x - b) = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$. Многочленами, ортогональными на $[-1, 1]$ с весом $1 - x^2$, являются многочлены Якоби, которые могут быть представлены в виде формулы Родрига

$$P_n^{(1,1)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{1}{1 - x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1 - x^2\right)^{n+1}\right] = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{1}{x^2 - 1}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^{n+1}\right]. \tag{42}$$

Таким образом, узлы x'_i, $i = 1, \dots, n$, квадратурной формулы (41) должны совпадать с корнями многочлена Якоби $P_n^{(1,1)}(x)$. Для многочленов Якоби $P_n^{(1,1)}(x)$ справедлива рекуррентная формула

$$(n + 2)(2n + 3)xP_n^{(1,1)}(x) = (n + 1)(n + 3)P_{n+1}^{(1,1)}(x) + (n + 1)(n + 2)P_{n-1}^{(1,1)}(x).$$

Покажем, что многочлен Якоби $P_n^{(1,1)}(x)$ можно выразить через производную многочлена Лежандра $P_{n+1}(x)$.

Используем для этого функциональные соотношения между ортогональными многочленами. Для производной многочлена Лежандра справедливо соотношение (см. формулу 22.5.37 в [8])

$$\frac{d}{dx}\,P_n(x) = C_{n-1}^{(3/2)}(x), \tag{43}$$

где $C_{n-1}^{(3/2)}(x)$ – ультрасферический многочлен (многочлен Гегенбауэра) переменной x степени $n - 1$. Для ультрасферического многочлена $C_n^{(\alpha)}(x)$ имеет место соотношение (см. формулу 22.5.27 в [8])

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)\Gamma(2\alpha + n)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha + n + 1/2)}\,P_n^{(\alpha-1/2,\alpha-1/2)}(x), \tag{44}$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлен Якоби, который может быть представлен в виде следующей формулы Родрига [8] $(\alpha, \beta > -1)$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,(1 - x)^{-\alpha}(1 + x)^{-\beta}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1 - x)^{\alpha+n}(1 + x)^{\beta+n}\right], \tag{45}$$

Подставляя (44) в (43) и заменяя при этом n на $n - 1$ и полагая $\alpha = 3/2$, получаем:

$$\frac{d}{dx}\,P_n(x) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(n + 2)}{\Gamma(3)\Gamma(n + 1)}\,P_{n-1}^{(1,1)}(x) = \frac{(n + 1)!}{2n!}\,P_{n-1}^{(1,1)}(x) = \frac{n + 1}{2}\,P_{n-1}^{(1,1)}(x). \tag{46}$$

Из (46) имеем:

$$P_n^{(1,1)}(x) = \frac{2}{n + 2}\,\frac{d}{dx}P_{n+1}(x). \tag{47}$$

Таким образом, многочлен Якоби $P_n^{(1,1)}(x)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с производной многочлена Лежандра $P_{n+1}(x)$.

Итак, узел x'_i квадратурной формулы (41) есть i-й корень ортогонального многочлена Якоби $P_n^{(1,1)}(x)$, или, что то же самое, i-й корень многочлена $\dfrac{d}{dx}P_{n+1}(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ непрерывную производную порядка $2n + 2$, то остаточный член в (41) может быть, согласно (32) и формуле среднего значения, представлен в виде [7] $(-1 < \eta < 1)$

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n + 2)!}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - 1\right)\omega^2(x)\,dx = \frac{8(n + 1)}{(2n + 3)(n + 2)}\left[\frac{2^n n!(n + 2)!}{(2n + 2)!}\right]^2 \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n + 2)!}. \tag{48}$$

Такое представление остаточного члена позволяет легко судить об алгебраической степени точности (41). Коэффициенты D_1 и D_2 в (41) равны [7]:

$$D_1 = D_2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Если отрезок интегрирования $[a,b]$ в (31) не совпадает с отрезком $[-1,1]$, то необходимо перейти к $[-1,1]$, используя преобразование

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,\xi, \tag{49}$$

где $x \in [a,b]$, $\xi \in [-1,1]$. Обратное преобразование дается формулой

$$\xi = \frac{2}{b-a}\,x - \frac{a+b}{b-a}. \tag{50}$$

Узлы x_i квадратурных формул Маркова

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = D\cdot f(a) + \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R(f) \tag{51}$$

и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = D_1 f(a) + D_2 f(b) + \sum_{i=1}^n A_i' f(x_i) + R(f) \tag{52}$$

должны вычисляться по следующей формуле:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,\xi_i, \quad i = 1,\,\ldots,\,n, \tag{53}$$

где ξ_i — корни соответствующего ортогонального на $[-1,1]$ полинома, т.е. корни полинома $P_n^{(0,1)}(\xi)$ для (51) и корни полинома $P_n^{(1,1)}(\xi)$ для (52).

Пусть $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную порядка $2n+1$. Тогда остаточный член $R(f)$ формулы (51), согласно (32) и формуле среднего значения, может быть представлен в виде

$$R_1(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\int\limits_a^b (x-a)\,\omega^2(x)\,dx, \quad a < \eta < b, \tag{51a}$$

а остаточный член $R(f)$ формулы (52) — в виде

$$R_2(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int\limits_a^b (x-a)(x-b)\,\omega^2(x)\,dx, \quad a < \eta < b, \tag{52a}$$

(в предположении, что $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную порядка $2n+2$). Вычислим интегралы, входящие в (51a) и (52a) с помощью замены переменной (49). Так как

$$x - a = (b-a)\,\frac{1+\xi}{2}, \qquad x - b = (b-a)\,\frac{\xi-1}{2},$$
$$\omega(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \prod_{i=1}^n (\xi - \xi_i), \quad dx = \frac{b-a}{2}\,d\xi,$$

то

$$\begin{aligned} R_1(f) &= \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+2}\int\limits_{-1}^{1}(1+\xi)\left[\prod_{i=1}^n(\xi-\xi_i)\right]^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!}\right]^2 (b-a)^{2n+2}\,\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \quad a < \eta < b, \end{aligned} \tag{51б}$$

$$R_2(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+3} \int\limits_{-1}^{1} (\xi-1)(\xi+1) \left[\prod_{i=1}^{n}(\xi-\xi_i)\right]^2 d\xi =$$
$$= \frac{n+1}{(n+2)(2n+3)} \left[\frac{n!(n+2)!}{(2n+2)!}\right]^2 (b-a)^{2n+3} \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}, \quad a < \eta < b. \tag{52б}$$

6.2. Выбор разбиения шага интегрирования с помощью узлов квадратурной формулы Маркова. Вернемся теперь к вопросу о распределении вспомогательных промежуточных точек x_i^0 на сегменте $[x_0, x_0+h]$ для решения исходной задачи Коши (1), (2) и задачи Коши (1a), (2a).

Пусть вспомогательные точки $x_i^0 = x_0 + t_i = x_0 + \alpha_i h$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, $\alpha_0 = 0$, задающие неравномерное разбиение шага интегрирования h и являющиеся узлами интерполирования, совпадают с узлами квадратурной формулы Маркова (51) на сегменте $[x_0, x_0+h]$ при $n = k$ или с узлами квадратурной формулы Маркова (52) на сегменте $[x_0, x_0+h]$ при $n = k-1$. Это означает, что разбиение $\{x_i^0\}$ сегмента $[x_0, x_0+h]$ состоит из узлов квадратурной формулы, имеющей наивысшую алгебраическую степень точности.

Представим независимую переменную x в виде

$$x = x_0 + \alpha h.$$

На сегменте $[x_0, x_0+h]$ переменная α изменяется от 0 до 1. Переменная $\xi = 2\alpha - 1$ изменяется от -1 до 1. Значения величины α, соответствующие искомым узлам x_i квадратурной формулы, находятся по формулам

$$\alpha_i = \frac{\xi_i + 1}{2}, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{54}$$

где ξ_i — корни соответствующего ортогонального на $[-1,1]$ многочлена Якоби $P_k^{(0,1)}(\xi)$ или $P_k^{(1,1)}(\xi)$. Значения α_i являются корнями многочлена $P_k^{(0,1)}(2\alpha-1)$ или $P_k^{(1,1)}(2\alpha-1)$ переменной α. Вспомогательные точки x_i^0 через значения α_i определяются по формуле

$$x_i^0 = x_0 + \alpha_i h, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{55}$$

Рассмотрим узлы x_i квадратурной формулы (51) при $n = 3$. Эти узлы вычисляются по формуле (53), в которой ξ_i являются корнями многочлена Якоби $P_3^{(0,1)}(\xi)$, или, что то же самое, многочлена

$$\frac{P_3(\xi) + P_4(\xi)}{\xi + 1} = \frac{1}{8}\left(35\xi^3 - 15\xi^2 - 15\xi + 3\right). \tag{56}$$

Эти узлы, являющиеся разбиением сегмента $[x_0, x_0+h]$, могут быть определены также по (55), в которой значения α_i являются корнями многочлена $P_3^{(0,1)}(2\alpha-1)$ переменной α.

В [7] приведены численные значения узлов квадратурной формулы Маркова (33). Для $n = 3$ эти значения равны:

$$\xi_1 = -0{,}575\,318\,9, \quad \xi_2 = 0{,}181\,066\,3, \quad \xi_3 = 0{,}822\,824\,1. \tag{57}$$

Соответствующие им значения α, определяемые по (54):

$$\alpha_1 = 0{,}212\,340\,538, \quad \alpha_2 = 0{,}590\,533\,136, \quad \alpha_3 = 0{,}911\,412\,040. \tag{58}$$

Сделаем одно замечание. В [9] на стр. 69 говорится, что величины h_2, h_3, h_4 (у нас эти величины обозначены α_1, α_2, α_3) "совпадают с корнями полинома Лежандра $P_3(2h-1) = 0$". Как мы теперь видим, эти величины совпадают с корнями полинома Якоби $P_3^{(0,1)}(2h-1)$, или, что то же самое, полинома

$$\frac{P_3(2h-1) + P_4(2h-1)}{(2h-1)+1},$$

а не полинома Лежандра $P_3(2h-1)$. Здесь мы использовали вместо греческой буквы α принятое в [9] обозначение h.

Рассмотрим узлы x_i квадратурной формулы (52) при $n = 3$. Эти узлы вычисляются по (53), где ξ_i являются корнями многочлена Якоби $P_3^{(1,1)}(\xi)$, или, что то же самое, корнями многочлена

$$\frac{d}{d\xi} P_4(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{35\xi^4 - 30\xi^2 + 3}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(35\xi^3 - 15\xi\right) = \frac{5}{2}\,\xi\left(7\xi^2 - 3\right). \tag{59}$$

Эти узлы, являющиеся разбиением сегмента $[x_0, x_0+h]$, могут быть определены также по (55), где значения α_i являются корнями многочлена $P_3^{(1,1)}(2\alpha-1)$ переменной α.

Корни многочлена (59) есть:

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{7}} = -0{,}654\ 653\ 67, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \sqrt{\frac{3}{7}} = 0{,}654\ 653\ 67. \tag{59a}$$

Соответствующие им значения α, определяемые по (54):

$$\alpha_1 = 0{,}172\ 673\ 165, \quad \alpha_2 = 0{,}5, \quad \alpha_3 = 0{,}827\ 326\ 835. \tag{60}$$

Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка (1*а*), (2*а*) вычисляется по формуле (25*а*)

$$y(x_0+h) \approx y_1 = y(x_0) + B_0 h + B_1\frac{h^2}{2} + B_2\frac{h^3}{3} + B_3\frac{h^4}{4} + \cdots + B_k\frac{h^{k+1}}{k+1}, \tag{61}$$

где коэффициенты $B_1, \ldots, B_k$ зависят от выбора разбиения шага интегрирования $[x_0, x_0+h]$. Если разбиение сегмента $[x_0, x_0+h]$ состоит из абсцисс квадратурной формулы Маркова (51), применяемой на этом сегменте при $n=k$, то погрешность приближенного решения y_1 на шаге h определяется формулой (51*б*) при $n=k$ и равна $O(h^{2k+2})$. Поэтому говорят, что метод имеет порядок точности $2k+1$. Если разбиение сегмента $[x_0, x_0+h]$ состоит из абсцисс квадратурной формулы Маркова (52), применяемой на этом сегменте при $n=k-1$, то погрешность приближенного решения y_1 на шаге h определяется формулой (52*б*) при $n=k-1$ и равна $O(h^{2k+1})$. Поэтому говорят, что метод имеет порядок точности $2k$.

Следует также иметь в виду, что данная оценка погрешности решения справедлива, например, тогда, когда коэффициенты $B_1, B_2, \ldots, B_k$ известны точно. Но так как эти коэффициенты определяются приближенно, то к указанной здесь погрешности решения необходимо прибавить вычислительную погрешность, которая, в частности, вызывается погрешностью определения коэффициентов $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

6.3. Второй способ получения специального разбиения шага интегрирования. Приведенное в подразделе 6.2 разбиение сегмента $[x_0, x_0+h]$ может быть получено и другим путем [3].

Пусть разбиение сегмента $[x_0, x_0+h]$ включает начальную точку x_0 и три внутренние точки

$$x_1^0 = x_0 + \alpha_1 h, \quad x_2^0 = x_0 + \alpha_2 h, \quad x_3^0 = x_0 + \alpha_3 h.$$

По этим точкам составляем разделенные разности (7) функции $F(x) = f(x, y(x))$:

$$\beta_1 = F(x_0; x_1^0), \quad \beta_2 = F(x_0; x_1^0; x_2^0), \quad \beta_3 = F(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0)$$

и находим по (12) коэффициенты b_{11}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32}, b_{33}. По (13), учитывая только разделенные разности β_1, β_2, β_3, вычисляем коэффициенты B_0, B_1, B_2, B_3 многочлена (8). По вычисленным значениям коэффициентов B_0, B_1, B_2, B_3 находим по (25), (26) при $k=3$ приближенное значение производной решения задачи (1), (2) в конце сегмента $[x_0, x_0+h]$:

$$y'(x_0+h) = y'(x_1) \approx U'(x_1) = y'(x_0) + B_0 h + B_1\frac{h^2}{2} + B_2\frac{h^3}{3} + B_3\frac{h^4}{4} \tag{62}$$

и приближенное значение решения задачи (1), (2) в конце сегмента $[x_0,\ x_0+h]$:

$$y(x_0+h) = y(x_1) \approx U(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)h + B_0\frac{h^2}{2} + B_1\frac{h^3}{6} + B_2\frac{h^4}{12} + B_3\frac{h^5}{20}. \tag{63}$$

Рассмотрим новое разбиение сегмента $[x_0, x_0+h]$, которое состоит из точек первоначального разбиения сегмента x_0, x_1^0, x_2^0, x_3^0 и включает еще две дополнительные точки x_4^0, x_5^0. Для дополнительных точек составляем разделенные разности

$$\beta_4 = F(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0), \quad \beta_5 = F(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0; x_5^0)$$

и находим из (12) коэффициенты b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44}, b_{51}, b_{52}, b_{53}, b_{54}, b_{55}. Из (13) с учетом разделенных разностей β_1, β_2, β_3, β_4, β_5 определяем коэффициенты многочлена (8), которые в отличие от ранее вычисленных коэффициентов B_0, B_1, B_2, B_3 обозначим теми же буквами, но с чертой сверху: B_0, $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, $\bar{B}_3$, $\bar{B}_4$, $\bar{B}_5$. Новые приближенные значения производной и решения в конце сегмента $[x_0, x_0+h]$ находим из (25), (26) при $k=5$:

$$y'(x_0+h) = y'(x_1) \approx \bar{U}'(x_1) = y'(x_0) + B_0 h + \bar{B}_1\frac{h^2}{2} + \bar{B}_2\frac{h^3}{3} + \bar{B}_3\frac{h^4}{4} + \bar{B}_4\frac{h^5}{5} + \bar{B}_5\frac{h^6}{6}, \tag{64}$$

$$y(x_0+h)=y(x_1)\approx \bar U(x_1)=y(x_0)+y'(x_0)h+B_0\frac{h^2}{2}+\bar B_1\frac{h^3}{6}+\bar B_2\frac{h^4}{12}+\bar B_3\frac{h^5}{20}+\bar B_4\frac{h^6}{30}+\bar B_5\frac{h^7}{42}. \tag{65}$$

Найдем разность между новым приближенным значением решения $\bar U(x_0+h)$ и ранее найденным приближенным значением $U(x_0+h)$ в одной и той же точке $x_1=x_0+h$:

$$\Delta U=\bar U(x_0+h)-U(x_0+h)=\left(\bar B_1-B_1\right)\frac{h^3}{6}+\left(\bar B_2-B_2\right)\frac{h^4}{12}+\left(\bar B_3-B_3\right)\frac{h^5}{20}+\bar B_4\frac{h^6}{30}+\bar B_5\frac{h^7}{42}. \tag{66}$$

Аналогичную разность составим для производной

$$\Delta U'=\bar U'(x_0+h)-U'(x_0+h)=\left(\bar B_1-B_1\right)\frac{h^2}{2}+\left(\bar B_2-B_2\right)\frac{h^3}{3}+\left(\bar B_3-B_3\right)\frac{h^4}{4}+\bar B_4\frac{h^5}{5}+\bar B_5\frac{h^6}{6}. \tag{67}$$

Подставим в (66) и (67) выражения для коэффициентов B_j из (13):

$$\Delta U=(b_{41}\beta_4+b_{51}\beta_5)\frac{h^3}{6}+(b_{42}\beta_4+b_{52}\beta_5)\frac{h^4}{12}+(b_{43}\beta_4+b_{53}\beta_5)\frac{h^5}{20}+(b_{44}\beta_4+b_{54}\beta_5)\frac{h^6}{30}+b_{55}\beta_5\frac{h^7}{42}, \tag{68}$$

$$\Delta U'=(b_{41}\beta_4+b_{51}\beta_5)\frac{h^2}{2}+(b_{42}\beta_4+b_{52}\beta_5)\frac{h^3}{3}+(b_{43}\beta_4+b_{53}\beta_5)\frac{h^4}{4}+(b_{44}\beta_4+b_{54}\beta_5)\frac{h^5}{5}+b_{55}\beta_5\frac{h^6}{6}. \tag{69}$$

Из (12) имеем:

$$b_{51}=-b_{41}t_4,\quad b_{52}=b_{41}-t_4b_{42},\quad b_{53}=b_{42}-t_4b_{43},\quad b_{54}=b_{43}-t_4,\quad b_{55}=1. \tag{70}$$

Подставим (70) в (68) и (69), тогда получим:

$$\begin{aligned}\Delta U=&(b_{41}\beta_4-b_{41}\beta_5t_4)\frac{h^3}{6}+(b_{42}\beta_4+b_{41}\beta_5-b_{42}\beta_5t_4)\frac{h^4}{12}+(b_{43}\beta_4+b_{42}\beta_5-b_{43}\beta_5t_4)\frac{h^5}{20}+\\&+(\beta_4+b_{43}\beta_5-\beta_5t_4)\frac{h^6}{30}+\beta_5\frac{h^7}{42},\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}\Delta U'=&(b_{41}\beta_4-b_{41}\beta_5t_4)\frac{h^2}{2}+(b_{42}\beta_4+b_{41}\beta_5-b_{42}\beta_5t_4)\frac{h^3}{3}+(b_{43}\beta_4+b_{42}\beta_5-b_{43}\beta_5t_4)\frac{h^4}{4}+\\&+(\beta_4+b_{43}\beta_5-\beta_5t_4)\frac{h^5}{5}+\beta_5\frac{h^6}{6}.\end{aligned} \tag{72}$$

Преобразуем (71) и (72):

$$\Delta U=(\beta_4-\beta_5t_4)\left(b_{41}\frac{h^3}{6}+b_{42}\frac{h^4}{12}+b_{43}\frac{h^5}{20}+\frac{h^6}{30}\right)+\beta_5\left(b_{41}\frac{h^4}{12}+b_{42}\frac{h^5}{20}+b_{43}\frac{h^6}{30}+\frac{h^7}{42}\right), \tag{73}$$

$$\Delta U'=(\beta_4-\beta_5t_4)\left(b_{41}\frac{h^2}{2}+b_{42}\frac{h^3}{3}+b_{43}\frac{h^4}{4}+\frac{h^5}{5}\right)+\beta_5\left(b_{41}\frac{h^3}{3}+b_{42}\frac{h^4}{4}+b_{43}\frac{h^5}{5}+\frac{h^6}{6}\right). \tag{74}$$

Из (12) имеем:

$$\begin{aligned}&b_{21}=-b_{11}t_1=-t_1=-\alpha_1h=b'_{21}h,\\&b_{31}=-b_{21}t_2=t_1t_2=\alpha_1\alpha_2h^2=b'_{31}h^2,\\&b_{41}=-b_{31}t_3=-t_1t_2t_3=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3h^3=b'_{41}h^3,\\&b_{32}=b_{21}-t_2b_{22}=-t_1-t_2=\left(-\alpha_1-\alpha_2\right)h=b'_{32}h,\\&b_{42}=b_{31}-t_3b_{32}=t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=\left(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\right)h^2=b'_{42}h^2,\\&b_{43}=b_{32}-t_3b_{33}=-t_1-t_2-t_3=\left(-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\right)h=b'_{43}h,\end{aligned} \tag{75}$$

где

$$\begin{aligned}&b'_{21}=-\alpha_1,\\&b'_{31}=\alpha_1\alpha_2,\\&b'_{41}=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\\&b'_{32}=-\alpha_1-\alpha_2,\\&b'_{42}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3,\\&b'_{43}=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3.\end{aligned} \tag{76}$$

Коэффициенты b'_{ij} в (75), определяемые (76), удовлетворяют рекуррентным соотношениям, аналогичным (12):

$$\begin{aligned} &b'_{ii} = 1, \\ &b'_{i1} = b'_{i-1,1} \cdot (-\alpha_{i-1}), \quad i > 1, \\ &b'_{ij} = b'_{i-1,j-1} - \alpha_{i-1} b'_{i-1,j}, \quad 1 < j < i. \end{aligned} \tag{77}$$

После подстановки (75) в (73) и (74) имеем:

$$\Delta U = (\beta_4 - \beta_5 t_4)\left(b'_{41}\frac{h^6}{6} + b'_{42}\frac{h^6}{12} + b'_{43}\frac{h^6}{20} + \frac{h^6}{30}\right) + \beta_5\left(b'_{41}\frac{h^7}{12} + b'_{42}\frac{h^7}{20} + b'_{43}\frac{h^7}{30} + \frac{h^7}{42}\right), \tag{78}$$

$$\Delta U' = (\beta_4 - \beta_5 t_4)\left(b'_{41}\frac{h^5}{2} + b'_{42}\frac{h^5}{3} + b'_{43}\frac{h^5}{4} + \frac{h^5}{5}\right) + \beta_5\left(b'_{41}\frac{h^6}{3} + b'_{42}\frac{h^6}{4} + b'_{43}\frac{h^6}{5} + \frac{h^6}{6}\right). \tag{79}$$

Выражение для $\Delta U'$ в (79) содержит члены до шестого порядка по h, а выражение для ΔU в (78) — до седьмого порядка по h. Для того чтобы иметь выражение для $\Delta U'$, содержащее, как и выражение для ΔU, члены седьмого порядка по h, введем еще одну дополнительную точку x_6^0, составим разделенную разность $\beta_6 = F(x_0; x_1^0; \ldots; x_6^0)$ и определим коэффициент $\bar{B}_6 = \beta_6$. Приближенное значение производной в конце сегмента $[x_0, x_0 + h]$ найдем по (25) при $k = 6$:

$$y'(x_0 + h) = y'(x_1) \approx \bar{U}(x_1) = y'(x_0) + B_0 h + \bar{B}_1\frac{h^2}{2} + \bar{B}_2\frac{h^3}{3} + \bar{B}_3\frac{h^4}{4} + \bar{B}_4\frac{h^5}{5} + \bar{B}_5\frac{h^6}{6} + \bar{B}_6\frac{h^7}{7}. \tag{80}$$

Тогда вместо (69) для $\Delta U'$ мы получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta U' = {} & (b_{41}\beta_4 + b_{51}\beta_5 + b_{61}\beta_6)\frac{h^2}{2} + (b_{42}\beta_4 + b_{52}\beta_5 + b_{62}\beta_6)\frac{h^3}{3} + \\ & + (b_{43}\beta_4 + b_{53}\beta_5 + b_{63}\beta_6)\frac{h^4}{4} + (b_{44}\beta_4 + b_{54}\beta_5 + b_{64}\beta_6)\frac{h^5}{5} + (b_{55}\beta_5 + b_{65}\beta_6)\frac{h^6}{6} + b_{66}\beta_6\frac{h^7}{7}. \end{aligned} \tag{81}$$

Используя равенства (12)

$$\begin{aligned} &b_{61} = -b_{51}t_5 = b_{41}t_4t_5, \\ &b_{62} = b_{51} - t_5 b_{52} = -b_{41}t_4 - b_{41}t_5 + b_{42}t_4t_5, \\ &b_{63} = b_{52} - t_5 b_{53} = b_{41} - b_{42}t_4 - b_{42}t_5 + b_{43}t_4t_5, \\ &b_{64} = b_{53} - t_5 b_{54} = b_{42} - b_{43}t_4 - b_{43}t_5 + t_4t_5, \\ &b_{65} = b_{54} - t_5 b_{55} = b_{43} - t_4 - t_5, \\ &b_{66} = 1, \end{aligned}$$

получаем для $\Delta U'$ вместо (72) выражение

$$\begin{aligned} \Delta U' = {} & (b_{41}\beta_4 - b_{41}\beta_5 t_4 + b_{41}t_4t_5\beta_6)\frac{h^2}{2} + \big(b_{42}\beta_4 + b_{41}\beta_5 - b_{42}\beta_5 t_4 - (b_{41}t_4 + b_{41}t_5)\beta_6 + b_{42}t_4t_5\beta_6\big)\frac{h^3}{3} + \\ & + \big(b_{43}\beta_4 + b_{42}\beta_5 - b_{43}\beta_5 t_4 + b_{41}\beta_6 - (b_{42}t_4 + b_{42}t_5)\beta_6 + b_{43}t_4t_5\beta_6\big)\frac{h^4}{4} + \\ & + \big(\beta_4 + b_{43}\beta_5 - \beta_5 t_4 + b_{42}\beta_6 - (b_{43}t_4 + b_{43}t_5)\beta_6 + t_4t_5\beta_6\big)\frac{h^5}{5} + \big(\beta_5 + b_{43}\beta_6 - (t_4 + t_5)\beta_6\big)\frac{h^6}{6} + \beta_6\frac{h^7}{7}. \end{aligned} \tag{82}$$

Окончательно вместо равенства (79) приходим к равенству

$$\begin{aligned} \Delta U' = {} & (\beta_4 - \beta_5 t_4 + \beta_6 t_4 t_5)\left(b'_{41}\frac{h^5}{2} + b'_{42}\frac{h^5}{3} + b'_{43}\frac{h^5}{4} + \frac{h^5}{5}\right) + \\ & + \big(\beta_5 - (t_4 + t_5)\beta_6\big)\left(b'_{41}\frac{h^6}{3} + b'_{42}\frac{h^6}{4} + b'_{43}\frac{h^6}{5} + \frac{h^6}{6}\right) + \beta_6\left(b'_{41}\frac{h^7}{4} + b'_{42}\frac{h^7}{5} + b'_{43}\frac{h^7}{6} + \frac{h^7}{7}\right). \end{aligned} \tag{83}$$

Пусть значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ таковы, что выражения, стоящие в скобках в (78), равны нулю, т.е.

$$\frac{1}{6}b'_{41} + \frac{1}{12}b'_{42} + \frac{1}{20}b'_{43} + \frac{1}{30} = 0, \tag{84}$$

$$\frac{1}{12}b'_{41}+\frac{1}{20}b'_{42}+\frac{1}{30}b'_{43}+\frac{1}{42}=0. \tag{85}$$

Тогда, каковы бы ни были разделенные разности β_4, β_5 и величина t_4, разность ΔU между двумя приближенными значениями $\bar{U}(x_0+h)$ и $U(x_0+h)$ решения $y(x_0+h)$ в одной и той же точке $x_1=x_0+h$ будет равна нулю.

Предположим также, что равны нулю выражения, стоящие в скобках в (83), т.е.

$$\frac{1}{2}b'_{41}+\frac{1}{3}b'_{42}+\frac{1}{4}b'_{43}+\frac{1}{5}=0, \tag{86}$$

$$\frac{1}{3}b'_{41}+\frac{1}{4}b'_{42}+\frac{1}{5}b'_{43}+\frac{1}{6}=0, \tag{87}$$

$$\frac{1}{4}b'_{41}+\frac{1}{5}b'_{42}+\frac{1}{6}b'_{43}+\frac{1}{7}=0. \tag{88}$$

Тогда, каковы бы ни были разделенные разности β_4, β_5, β_6 и величины t_4, t_5, разность $\Delta U'$ между двумя приближенными значениями $\bar{U}'(x_0+h)$ и $U'(x_0+h)$ производной $y'(x_0+h)$ в одной и той же точке $x_1=x_0+h$ будет равна нулю.

Заметим, что (84) является разностью уравнений (86) и (87), а (85) — разностью уравнений (87) и (88). Таким образом, для того, чтобы разности ΔU и $\Delta U'$ в точке $x_1=x_0+h$ были равны нулю, достаточно потребовать, чтобы значения b'_{41}, b'_{42}, b'_{43} удовлетворяли системе трех уравнений (86), (87), (88). Решение данной системы уравнений $b'_{41}=-4/35$, $b'_{42}=6/7$, $b'_{43}=-12/7$. В силу (76), $b'_{41}=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $b'_{42}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3$, $b'_{43}=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$. Следовательно, по теореме Виета величины α_1, α_2, α_3 являются корнями многочлена

$$\alpha^3+b'_{43}\alpha^2+b'_{42}\alpha+b'_{41}=\alpha^3-\frac{12}{7}\alpha^2+\frac{6}{7}\alpha-\frac{4}{35}. \tag{89}$$

Многочлен (89) переменной α получается из многочлена Якоби $P_3^{(0,1)}(\xi)$ заменой переменной ξ по формуле $\xi=2\alpha-1$. Итак, искомые величины α_1, α_2, α_3 должны быть корнями многочлена $P_3^{(0,1)}(2\alpha-1)$ переменной α.

Таким образом, если в качестве значений α_1, α_2, α_3 взять корни многочлена $P_3^{(0,1)}(2\alpha-1)$ переменной α, то приближенное решение $U(x_0+h)$, задаваемое разложением (63), будет иметь точность до седьмого порядка по h включительно; приближенное значение производной $U'(x_0+h)$, задаваемое разложением (62), также будет иметь точность до седьмого порядка по h включительно. Это следует из совпадения разложений (63) и (65), (62) и (80), представляющих приближенные значения решения и производной в точке $x_1=x_0+h$.

7. Применение к интегрированию линейной системы первого порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим применение описанного выше метода к решению задачи Коши для системы M линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$y'=Ay, \qquad A=(a_{ij}), \qquad i,j=1,\dots,M, \tag{90}$$

$$y(0)=y_0, \qquad y_0=(y_0^i), \qquad i=1,\dots,M, \tag{91}$$

$$0\leqslant x<\infty.$$

Получим другой вид формул (7) для разделенных разностей функции

$$F(x)=f(x,y(x))=A\cdot y(x). \tag{92}$$

В силу (16a) имеем

$$y(x_i^0)-y_0=\sum_{j=0}^{k}B_j\cdot\frac{t_i^{j+1}}{j+1}.$$

Для разделенной разности первого порядка получаем:

$$F(x_0;x_1^0)=A\cdot\sum_{j=0}^{k}B_j\cdot\frac{t_1^j}{j+1}=A\cdot\sum_{j=0}^{k}B_j\cdot\frac{\alpha_1^j}{j+1}\cdot h^j. \tag{93}$$

Для разделенной разности второго порядка:

$$\begin{aligned}F(x_0;x_1^0;x_2^0)&=A\cdot\sum_{j=1}^{k}B_j\cdot\frac{1}{j+1}\cdot\frac{\alpha_2^j-\alpha_1^j}{\alpha_2-\alpha_1}\,h^{j-1}=\\&=A\left[\frac{1}{2}\,B_1+\frac{1}{3}\,B_2\,(\alpha_2+\alpha_1)\,h+\frac{1}{4}\,B_3\left(\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2\right)h^2+\,\cdots\right].\end{aligned} \tag{94}$$

Для разделенной разности третьего порядка

$$F(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0) = A \cdot \sum_{j=2}^{k} B_j \cdot \frac{1}{j+1} \cdot \frac{\dfrac{\alpha_3^j - \alpha_1^j}{\alpha_3 - \alpha_1} - \dfrac{\alpha_2^j - \alpha_1^j}{\alpha_2 - \alpha_1}}{\alpha_3 - \alpha_2}\, h^{j-2} = A \left[\frac{1}{3}\, B_2 + \frac{1}{4}\, B_3\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\, h + \cdots\right]. \quad (95)$$

7.1. Метод третьего порядка. Рассмотрим метод третьего порядка. Положим в формуле (25a) $k = 1$. Неизвестным коэффициентом в (25a) будет B_1. В качестве разбиения сегмента $[x_0, x_0 + h]$ возьмем точки x_0, $x_1^0 = x_0 + t_1 = x_0 + \alpha_1 h$, где α_1 — корень полинома $P_1^{(0,1)}(2\alpha - 1)$ переменной α. Определяя нуль многочлена Якоби

$$P_1^{(0,1)}(\xi) = \frac{3}{2}\,\xi - \frac{1}{2},$$

находим

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} \quad (96)$$

и

$$t_1 = \frac{2}{3}\, h.$$

В силу второго уравнения (13) с учетом разделенной разности первого порядка

$$B_1 = F(x_0; x_1^0). \quad (97)$$

Подставляя в (97) выражение разделенной разности (93), получаем уравнение для определения коэффициента B_1:

$$B_1 = A \cdot \left(A y_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\, B_1 h\right)$$

или

$$B_1 = A^2 y_0 + \frac{1}{3} A h B_1.$$

Откуда

$$B_1 = \left(E - \frac{1}{3} A h\right)^{-1} \cdot A^2 y_0.$$

Зная коэффициент B_1, можем найти по формуле (61) при $k = 1$:

$$y(x_0 + h) \approx y_1 = y_0 + A h y_0 + \left(E - \frac{1}{3} A h\right)^{-1} \frac{A^2 h^2}{2}\, y_0 = \left(E - \frac{1}{3}\, A h\right)^{-1} \cdot \left(E + \frac{2}{3}\, A h + \frac{1}{6}\, A^2 h^2\right) y_0.$$

Итак, применение метода третьего порядка, определяемого значением (96), к линейной системе (90), (91) приводит к соотношению

$$y_1 = F(Ah) \cdot y_0, \quad (98)$$

где

$$F(Ah) = \left(E - \frac{1}{3}\, A h\right)^{-1} \cdot \left(E + \frac{2}{3}\, A h + \frac{1}{6}\, A^2 h^2\right). \quad (99)$$

7.2. Метод четвертого порядка. Рассмотрим метод четвертого порядка. Положим в формуле (25a) $k = 2$. Неизвестными коэффициентами являются B_1 и B_2. В качестве разбиения сегмента $[x_0, x_0 + h]$ возьмем точки x_0, $x_1^0 = x_0 + t_1 = x_0 + \alpha_1 h$, $x_2^0 = x_0 + h$, где α_1 — корень полинома $P_1^{(1,1)}(2\alpha - 1)$ переменной α. Определяя нуль многочлена Якоби

$$P_1^{(1,1)}(\xi) = \frac{2}{3}\, \frac{d}{d\xi}\, P_2(\xi) = \frac{2}{3}\, \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{2}\,(3\xi^2 - 1)\right] = 2\xi,$$

находим величину α_1. В данном случае

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 1 \quad (100)$$

и

$$t_1 = \frac{1}{2} h, \quad t_2 = h.$$

В силу второго уравнения (13) с учетом разделенных разностей первого и второго порядка имеем

$$B_1 = F(x_0; x_1^0) + b_{21} B_2, \quad (101)$$

где b_{21} определяется по (12):

$$b_{21} = -\frac{1}{2}\,h.$$

Подставляя в (101) выражение разделенной разности первого порядка (93) при $k = 2$, получаем уравнение

$$B_1 = A \cdot \left(Ay_0 + B_1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,h + B_2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\,h^2\right) - \frac{1}{2}\,hB_2. \tag{102}$$

В силу третьего уравнения (13) с учетом разделенной разности второго порядка

$$B_2 = F(x_0; x_1^0; x_2^0). \tag{103}$$

Подставляя в (103) выражение разделенной разности второго порядка (94) при $k = 2$, получаем уравнение

$$B_2 = A \cdot \left(\frac{1}{2}\,B_1 + \frac{1}{2}\,B_2 h\right). \tag{104}$$

Итак, для определения неизвестных коэффициентов B_1 и B_2 мы получили два уравнения (102) и (104) с двумя неизвестными. Из (104) имеем

$$B_2 = (2E - Ah)^{-1}AB_1. \tag{105}$$

Подставляя это выражение для B_2 в уравнение (102), находим

$$B_1 = (12E - 6Ah + A^2h^2)^{-1}(12E - 6Ah)A^2y_0. \tag{106}$$

Из (105) окончательно находим

$$B_2 = 6\left(12E - 6Ah + A^2h^2\right)^{-1} A^3y_0. \tag{107}$$

Зная коэффициенты B_1 и B_2, можем найти по формуле (61) при $k = 2$:

$$\begin{gathered} y(x_0 + h) \approx y_1 = y_0 + Ahy_0 + \left(12E - 6Ah + A^2h^2\right)^{-1}(12E - 6Ah)\,\frac{A^2h^2}{2}\,y_0 + \\ + 6\left(12E - 6Ah + A^2h^2\right)^{-1}\frac{A^3h^3}{3}\,y_0 = \left(12E - 6Ah + A^2h^2\right)^{-1}\left(12E + 6Ah + A^2h^2\right)y_0. \end{gathered} \tag{108}$$

Таким образом, применение метода четвертого порядка, определяемого значениями (100), к линейной системе (90), (91) приводит к соотношению (98), в котором

$$F(Ah) = \left(12E - 6Ah + A^2h^2\right)^{-1}\left(12E + 6Ah + A^2h^2\right). \tag{109}$$

7.3. Метод пятого порядка. Рассмотрим метод пятого порядка. Положим в формуле (25a) $k = 2$. Неизвестными коэффициентами являются B_1 и B_2. В качестве разбиения сегмента $[x_0, x_0+h]$ возьмем точки x_0, $x_1^0 = x_0 + t_1 = x_0 + \alpha_1 h$, $x_2^0 = x_0 + t_2 = x_0 + \alpha_2 h$, где α_1 и α_2 — корни многочлена $P_2^{(0,1)}(2\alpha - 1)$ переменной α. Определяя нули многочлена Якоби

$$P_2^{(0,1)}(\xi) = \frac{1}{2}\left(5\xi^2 - 2\xi - 1\right),$$

находим

$$\alpha_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}, \qquad \alpha_2 = \frac{6+\sqrt{6}}{10} \tag{110}$$

и

$$t_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}\,h, \qquad t_2 = \frac{6+\sqrt{6}}{10}\,h.$$

В силу второго уравнения (13) с учетом разделенных разностей первого и второго порядка имеем

$$B_1 = F(x_0; x_1^0) + b_{21}B_2, \tag{111}$$

где b_{21} определяется по (12):

$$b_{21} = -\frac{6-\sqrt{6}}{10}\,h.$$

Подставляя в (111) выражение разделенной разности первого порядка (93) при $k = 2$, получаем уравнение

$$B_1 = A \cdot \left(Ay_0 + B_1 \frac{6-\sqrt{6}}{10}\,\frac{1}{2}\,h + B_2 \left(\frac{6-\sqrt{6}}{10}\right)^2 \frac{1}{3}\,h^2 \right) - \frac{6-\sqrt{6}}{10}\,hB_2 \tag{112}$$

или, упрощая,

$$B_1 = A^2 y_0 + \frac{6-\sqrt{6}}{10}\,\frac{1}{2}\,AhB_1 + \left(\frac{14-4\sqrt{6}}{100}\,Ah^2 - \frac{6-\sqrt{6}}{10}\,Eh \right) B_2. \tag{112a}$$

В силу третьего уравнения (13) с учетом разделенной разности второго порядка

$$B_2 = F(x_0; x_1^0; x_2^0). \tag{113}$$

Подставляя в (113) выражение разделенной разности второго порядка (94) при $k = 2$, получаем второе уравнение

$$B_2 = A \cdot \left(\frac{1}{2}\,B_1 + \frac{2}{5}\,B_2 h \right). \tag{114}$$

Итак, для определения неизвестных коэффициентов B_1 и B_2 мы получили два уравнения (112a) и (114) с двумя неизвестными. Из (114) имеем

$$B_2 = 5\,(10E - 4Ah)^{-1} AB_1. \tag{115}$$

Подставляя это выражение для B_2 в уравнение (112a), находим

$$B_1 = \left(20E - 8Ah + A^2h^2\right)^{-1} (20E - 8Ah)\,A^2 y_0. \tag{116}$$

Из (115) окончательно находим

$$B_2 = 10\left(20E - 8Ah + A^2h^2\right)^{-1} A^3 y_0. \tag{117}$$

Зная коэффициенты B_1 и B_2, можем найти по формуле (61) при $k = 2$:

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) \approx y_1 = y_0 + Ahy_0 + \left(20E - 8Ah + A^2h^2\right)^{-1} (20E - 8Ah) \times \\ \times \tfrac{A^2h^2}{2}\,y_0 + 10\left(20E - 8Ah + A^2h^2\right)^{-1} \frac{A^3h^3}{3}\,y_0 = \\ = \left(60E - 24Ah + 3A^2h^2\right)^{-1} \left(60E + 36Ah + 9A^2h^2 + A^3h^3\right) y_0. \end{aligned} \tag{118}$$

Таким образом, применение метода пятого порядка, определяемого значениями (110), к линейной системе (90), (91) приводит к соотношению (98), в котором

$$F(Ah) = \left(60E - 24Ah + 3A^2h^2\right)^{-1} \left(60E + 36Ah + 9A^2h^2 + A^3h^3\right). \tag{119}$$

7.4. Метод шестого порядка. Рассмотрим метод шестого порядка. Положим в формуле (25a) $k = 3$. Неизвестными коэффициентами являются B_1, B_2 и B_3. В качестве разбиения сегмента $[x_0, x_0 + h]$ возьмем точки x_0, $x_1^0 = x_0 + t_1 = x_0 + \alpha_1 h$, $x_2^0 = x_0 + t_2 = x_0 + \alpha_2 h$, $x_3^0 = x_0 + t_3 = x_0 + h$, где α_1 и α_2 — корни многочлена $P_2^{(1,1)}(2\alpha - 1)$ переменной α. Определяя нули многочлена Якоби

$$P_2^{(1,1)}(\xi) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{2}\left(5\xi^3 - 3\xi\right)\right] = \frac{1}{4}\left(15\xi^2 - 3\right),$$

находим величины α_1, α_2. В данном случае

$$\alpha_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \qquad \alpha_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \qquad \alpha_3 = 1 \tag{120}$$

и

$$t_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\,h, \qquad t_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,h, \qquad t_3 = h.$$

В силу второго уравнения (13) с учетом разделенных разностей первого, второго и третьего порядка имеем

$$B_1 = F(x_0; x_1^0) + b_{21}F(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{31}B_3, \tag{121}$$

где b_{21}, b_{31} определяется по (12):

$$b_{21} = -\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,h, \qquad b_{31} = \frac{1}{5}\,h^2.$$

Подставляя в (121) выражения разделенных разностей первого порядка (93) и второго порядка (94) при $k=3$, получаем уравнение

$$B_1 = A\left(Ay_0 + B_1\frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{2}\,h + B_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^2\frac{1}{3}\,h^2 + B_3\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^3\frac{1}{4}\,h^3\right) -$$
$$-\frac{5-\sqrt{5}}{10}\,hA\left(\frac{1}{2}\,B_1 + \frac{1}{3}\,B_2h + \frac{1}{4}\,B_3\cdot\frac{4}{5}\,h^2\right) + \frac{1}{5}\,h^2B_3$$

или, упрощая,

$$B_1 = A^2y_0 - \frac{1}{15}\,h^2AB_2 - \left(\frac{1}{20}\,h^3A - \frac{1}{5}\,h^2E\right)B_3. \tag{122}$$

В силу третьего уравнения (13) с учетом разделенных разностей второго и третьего порядка имеем

$$B_2 = F(x_0; x_1^0; x_2^0) + b_{32}B_3, \tag{123}$$

где b_{32} определяется по (12):

$$b_{32} = -h.$$

Подставляя в (123) выражение разделенной разности второго порядка (94) при $k=3$, получаем второе уравнение

$$B_2 = A\left(\frac{1}{2}\,B_1 + \frac{1}{3}\,B_2h + \frac{1}{5}\,B_3h^2\right) - hB_3$$

или

$$B_2 = \frac{1}{2}\,AB_1 + \frac{1}{3}\,AhB_2 + \left(\frac{1}{5}\,Ah^2 - hE\right)B_3. \tag{124}$$

В силу четвертого уравнения (13) с учетом разделенной разности третьего порядка имеем

$$B_3 = F(x_0; x_1^0; x_2^0; x_3^0). \tag{125}$$

Подставляя в (125) выражение разделенной разности третьего порядка (95) при $k=3$, получаем третье уравнение

$$B_3 = \frac{1}{3}\,AB_2 + \frac{1}{2}\,AhB_3. \tag{126}$$

Итак, для определения неизвестных коэффициентов B_1, B_2 и B_3 мы получили три уравнения (122), (124) и (126) с тремя неизвестными. Из (126) имеем

$$B_3 = 2\,(6E - 3Ah)^{-1}AB_2.$$

Подставляя это выражение для B_3 в уравнение (124), находим

$$B_2 = 5\left(20E - 10Ah + 2A^2h^2\right)^{-1}(2E - Ah)\,AB_1. \tag{127}$$

Выразим B_3 через B_1:

$$B_3 = \frac{10}{3}\left(20E - 10Ah + 2A^2h^2\right)^{-1}A^2B_1. \tag{128}$$

Подставляя полученные выражения (127), (128) для B_2 и B_3 в уравнение (122), находим

$$B_1 = 12\left(120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3\right)^{-1}\left(10E - 5Ah + A^2h^2\right)A^2y_0. \tag{129}$$

Из (127), (128) окончательно находим

$$B_2 = 30\left(120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3\right)^{-1}(2E - Ah)\,A^3y_0, \tag{130}$$

$$B_3 = 20\left(120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3\right)^{-1}A^4y_0. \tag{131}$$

Зная коэффициенты B_1, B_2 и B_3, можем найти по формуле (61) при $k=3$:

$$\begin{aligned}y(x_0+h)\approx y_1 = y_0 + Ahy_0 &+ 12\left(120E-60Ah+12A^2h^2-A^3h^3\right)^{-1}\left(10E-5Ah+A^2h^2\right)\frac{A^2h^2}{2}y_0+\\&+30\left(120E-60Ah+12A^2h^2-A^3h^3\right)^{-1}\left(2E-Ah\right)\frac{A^3h^3}{3}y_0+\\&+20\left(120E-60Ah+12A^2h^2-A^3h^3\right)^{-1}\frac{A^4h^4}{4}y_0=\\&=\left(120E-60Ah+12A^2h^2-A^3h^3\right)^{-1}\left(120E+60Ah+12A^2h^2+A^3h^3\right)y_0.\end{aligned} \tag{132}$$

Таким образом, применение метода шестого порядка, определяемого значения (120), к линейной системе (90), (91) приводит к соотношению (98), в котором

$$F(Ah)=\left(120E-60Ah+12A^2h^2-A^3h^3\right)^{-1}\left(120E+60Ah+12A^2h^2+A^3h^3\right). \tag{133}$$

7.5. Метод седьмого порядка. Приведем без вывода аналогичный результат для метода седьмого порядка.

Применение метода седьмого порядка, определяемого значениями (58), к линейной системе (90), (91) приводит к соотношению (98), в котором

$$F(Ah)=\left(840E-360Ah+60A^2h^2-4A^3h^3\right)^{-1}\left(840E+480Ah+120A^2h^2+16A^3h^3+A^4h^4\right). \tag{134}$$

8. Исследование численной устойчивости метода для линейных систем первого порядка с постоянными коэффициентами. Из соотношения (98) получаем для постоянного шага интегрирования

$$y_{n+1}=F(Ah)\cdot y_n,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{135}$$

Во всех рассмотренных в предыдущем разделе случаях применение метода к линейной системе (90), (91) приводит к разностному уравнению (135), в котором $F(Ah)$ – рациональная функция матрицы, зависящая от выбора разбиения шага интегрирования. Решение, вычисляемое данным методом, удовлетворяет разностному уравнению (135).

Предположим, что матрица A линейной системы (90) является матрицей простой структуры, т.е. имеет M линейно независимых собственных векторов. Пусть λ_j, $\mathbf{e}_j$ — собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы A. Тогда общее решение задачи (90), (91) может быть представлено в виде

$$y(x)=\sum_{j=1}^{M}C_je^{\lambda_jx}\mathbf{e}_j. \tag{136}$$

Разложим y_n по собственным векторам $\mathbf{e}_j$ матрицы A:

$$y_n=\sum_{j=1}^{M}C_n^j\mathbf{e}_j. \tag{137}$$

Учитывая свойства функции матрицы [10] и, в частности, рациональной функции матрицы, имеем соотношение

$$F(Ah)\,\mathbf{e}_j=F(\lambda_jh)\,\mathbf{e}_j, \tag{138}$$

благодаря которому выражение для y_{n+1} можно представить следующим образом, если подставим (137) в (135):

$$y_{n+1}=F(Ah)\sum_{j=1}^{M}C_n^j\mathbf{e}_j=\sum_{j=1}^{M}F(Ah)C_n^j\mathbf{e}_j=\sum_{j=1}^{M}F(\lambda_jh)C_n^j\mathbf{e}_j. \tag{139}$$

Из (139) получается формула преобразования коэффициентов C_n^j

$$C_{n+1}^j=F(\lambda_jh)\,C_n^j. \tag{140}$$

Заметим, что если интегрировать линейное уравнение

$$y'=\lambda y,\quad 0\leqslant x,\quad \lambda\in\mathbf{C}, \tag{141}$$

$$y(0) = y_0, \tag{142}$$

любым из описанных выше методов, то для приближенного решения, вычисляемого каждым из этих методов, справедливо разностное уравнение

$$y_{n+1} = F(\lambda h)\, y_n. \tag{143}$$

Из (137), (140) и (143) видно, что каждая составляющая

$$C_j e^{\lambda_j x} \mathbf{e}_j \tag{144}$$

решения (136), пропорциональная одному из собственных векторов, интегрируется данным методом независимо от остальных компонент. Составляющая

$$C_n^j \mathbf{e}_j \tag{145}$$

решения y_n (137) соответствует составляющей (144) решения (136) дифференциального уравнения (90), причем формула преобразования коэффициентов C_n^j совпадает с разностной формулой численного интегрирования (143) задачи (141), (142) с $\lambda = \lambda_j$. Поэтому, если уравнение (141), (142) проинтегрировано с достаточной точностью при всех $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, M$, то с достаточной точностью будет найдена каждая составляющая (145), соответствующая собственному значению λ_j и, следовательно, будет обеспечена достаточная точность решения системы (90), (91) данным методом.

Обсудим случай действительных отрицательных λ и комплексных $\lambda = a + bi$ с отрицательной действительной частью $a < 0$. При этих λ уравнение (141) является асимптотически устойчивым и любое его решение стремится к нулю при $x \to \infty$. Если собственные числа матрицы A линейной системы (90) имеют отрицательные действительные части, то линейная система (90) также является асимптотически устойчивой и все ее решения стремятся к нулевому решению при $x \to \infty$.

Рассмотрим методы четвертого и шестого порядка (109), (133). Для этих методов функция $F(\lambda h)$, называемая функцией устойчивости метода, соответственно равна

$$F(\lambda h) = \frac{P(\lambda h)}{Q(\lambda h)} = \frac{12 + 6\lambda h + \lambda^2 h^2}{12 - 6\lambda h + \lambda^2 h^2}, \tag{146}$$

$$F(\lambda h) = \frac{P(\lambda h)}{Q(\lambda h)} = \frac{120 + 60\lambda h + 12\lambda^2 h^2 + \lambda^3 h^3}{120 - 60\lambda h + 12\lambda^2 h^2 - \lambda^3 h^3}. \tag{147}$$

Показано (см., например, теорему и следствие в параграфе 4 главы 10 в [11] или теорему 3.4.8 и следствие 3.4.9 в [12]), что для указанных λ и любого $h > 0$ выполняется неравенство

$$| F(\lambda h) | < 1. \tag{148}$$

Отсюда следует, что решение уравнения (143) для произвольного $h > 0$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Тем самым обеспечивается стремление к нулю всех тех составляющих (145) решения (137) разностного уравнения (135), которые соответствуют отрицательным собственным значениям матрицы A. Если среди собственных чисел матрицы A имеются комплексные, то будут стремиться к нулю также и те составляющие решения разностного уравнения (135), которые соответствуют комплексным собственным значениям с отрицательной реальной частью. Отсюда следует, что при интегрировании асимптотически устойчивой линейной системы (90), (91) любое решение разностного уравнения (135) для произвольного $h > 0$ также стремится к нулевому решению при $n \to \infty$. Поэтому применение данных методов для численного решения устойчивых систем позволяет произвольно увеличивать длину шага интегрирования, сохраняя численную устойчивость приближенного решения. Единственным ограничением шага интегрирования является требование достижения заданной точности приближенного решения.

Теперь рассмотрим методы третьего и пятого порядка (99), (119). Для этих методов функция устойчивости $F(\lambda h)$ соответственно равна

$$F(\lambda h) = \frac{P(\lambda h)}{Q(\lambda h)} = \frac{6 + 4\lambda h + \lambda^2 h^2}{6 - 2\lambda h}, \tag{149}$$

$$F(\lambda h) = \frac{P(\lambda h)}{Q(\lambda h)} = \frac{60 + 36\lambda h + 9\lambda^2 h^2 + \lambda^3 h^3}{60 - 24\lambda h + 3\lambda^2 h^2}. \tag{150}$$

Пусть $\lambda < 0$. Для того, чтобы решение уравнения (143) стремилось к нулю при $n \to \infty$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$| F(\lambda h) | < 1. \tag{151}$$

Подставляя выражение (149) для $F(\lambda h)$, получаем неравенство

$$6+4\lambda h+\lambda^2h^2<6-2\lambda h,$$

решая которое относительно λh, находим

$$-6<\lambda h<0. \tag{152}$$

Подставляя в (151) выражение (150) для $F(\lambda h)$, получаем неравенство

$$\left|\frac{60+36\lambda h+9\lambda^2h^2+\lambda^3h^3}{60-24\lambda h+3\lambda^2h^2}\right|<1. \tag{153}$$

Пусть λh уменьшается от нуля в сторону отрицательных значений. Если при этом $P(\lambda h)\geqslant 0$, то $P(\lambda h)<Q(\lambda h)$ и, следовательно, $F(\lambda h)<1$. При дальнейшем изменении λh многочлен $P(\lambda h)<0$ и начинает расти по модулю (после прохождения нулевого значения). Найдем значение λh, при котором $\mid P(\lambda h)\mid = Q(\lambda h)$, т.е.

$$-60-36\lambda h-9\lambda^2h^2-\lambda^3h^3=60-24\lambda h+3\lambda^2h^2$$

или

$$\lambda^3h^3+12\lambda^2h^2+12\lambda h+120=0. \tag{154}$$

Будем рассматривать (154) как алгебраическое уравнение относительно λh. Вещественный корень уравнения (154) равен

$$\lambda h\approx -11{,}842\ 35. \tag{155}$$

Других вещественных корней уравнения (154) нет.

Таким образом, чтобы выполнялось (153) при $\lambda h<0$, необходимо, чтобы величина λh удовлетворяла неравенству

$$-11{,}842\ 35<\lambda h<0. \tag{156}$$

Для метода седьмого порядка (134) функция устойчивости равна

$$F(\lambda h)=\frac{840+480\lambda h+120\lambda^2h^2+16\lambda^3h^3+\lambda^4h^4}{840-360\lambda h+60\lambda^2h^2-4\lambda^3h^3}. \tag{157}$$

Из неравенства (151) имеем

$$840+480\lambda h+120\lambda^2h^2+16\lambda^3h^3+\lambda^4h^4<840-360\lambda h+60\lambda^2h^2-4\lambda^3h^3$$

или

$$\lambda^3h^3+20\lambda^2h^2+60\lambda h+840>0. \tag{158}$$

Чтобы выполнялось (158) при $\lambda h<0$, необходимо, чтобы величина λh удовлетворяла неравенству

$$-19{,}156\ 88<\lambda h<0. \tag{159}$$

Таким образом, при положительных значениях h, которые удовлетворяют неравенству (152) для метода третьего порядка, неравенству (156) для метода пятого порядка, неравенству (159) для метода седьмого порядка, решение разностного уравнения (143) стремится к нулю при $n\to\infty$. Тем самым обеспечивается стремление к нулю всех тех составляющих (145) решения (137) разностного уравнения (135), которые соответствуют отрицательным собственным значениям матрицы A. Отсюда следует, что при интегрировании асимптотически устойчивой линейной системы (90), (91) с отрицательными собственными значениями матрицы A любое решение разностного уравнения (135) также стремится к нулевому решению при $n\to\infty$, если положительный шаг интегрирования удовлетворяет указанным неравенствам.

9. Приведение к методу типа Рунге–Кутта. Поясним теперь, как рассматриваемый метод интегрирования дифференциальных уравнений может быть приведен к другой форме записи, а именно, к форме метода типа Рунге–Кутта.

9.1. Приведение в общем виде. Покажем, что формулу (61) можно преобразовать к виду формулы типа Рунге–Кутта. Для этого воспользуемся представлением разделенной разности в виде линейной комбинации значений функции $F(x)$ в точках, по которым эта разделенная разность построена (см., например, лемму в § 4 главы II в [13] или п. 1 в § 5 главы 2 в [14])

$$\begin{aligned} F(x_0;x_1^0;x_2^0;\ldots;x_{i-1}^0;x_i^0) &= \frac{F(x_0)}{(x_0-x_1^0)(x_0-x_2^0)\ldots(x_0-x_i^0)} + \\ &+ \frac{F(x_1^0)}{(x_1^0-x_0)(x_1^0-x_2^0)\ldots(x_1^0-x_i^0)} + \cdots + \frac{F(x_i^0)}{(x_i^0-x_0)(x_i^0-x_1^0)\ldots(x_i^0-x_{i-1}^0)} = \\ &= \frac{1}{h^i}\left(\frac{F(x_0)}{\prod\limits_{l=1}^{i}(-\alpha_l)} + \frac{F(x_1^0)}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)\ldots(\alpha_1-\alpha_i)} + \cdots + \frac{F(x_i^0)}{\alpha_i(\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})}\right). \end{aligned} \tag{160}$$

Учитывая, что входящие в (13) коэффициенты b_{ij}, стоящие перед разделенной разностью $F(x_0;x_1^0;\ldots;x_i^0)$, являются в силу (75) величинами, пропорциональными степени h, из (13) получаем следующее выражение для коэффициента B_j:

$$\begin{aligned} B_j &= \sum_{i=j}^{k} b_{ij}F(x_0;x_1^0;\ldots;x_i^0) = \sum_{i=j}^{k} b'_{ij}h^{i-j}F(x_0;x_1^0;\ldots;x_i^0) = \\ &= \sum_{i=j}^{k} b'_{ij}h^{-j}\left(\frac{F(x_0)}{\prod\limits_{l=1}^{i}(-\alpha_l)} + \sum_{l=1}^{i}\frac{F(x_l^0)}{\alpha_l\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{i}(\alpha_l-\alpha_m)}\right) = \\ &= h^{-j}F(x_0)\sum_{i=j}^{k} b'_{ij}\frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{i}(-\alpha_l)} + h^{-j}\sum_{i=j}^{k} b'_{ij}\sum_{l=1}^{i}\frac{F(x_l^0)}{\alpha_l\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{i}(\alpha_l-\alpha_m)}. \end{aligned} \tag{161}$$

Отсюда можно получить представление коэффициента B_j через линейную комбинацию значений функции $F(x)$. Приведем представление нескольких первых коэффициентов B_j. Обозначим

$$\gamma_{il} = \frac{1}{\alpha_l\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq l}}^{i}(\alpha_l-\alpha_m)}, \quad \gamma_{i0} = \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{i}(-\alpha_l)}. \tag{162}$$

Тогда

$$B_1 = \frac{1}{h}\left\{F(x_0)\sum_{i=1}^{k} b'_{i1}\gamma_{i0} + F(x_1^0)\sum_{i=1}^{k} b'_{i1}\gamma_{i1} + F(x_2^0)\sum_{i=2}^{k} b'_{i1}\gamma_{i2} + F(x_3^0)\sum_{i=3}^{k} b'_{i1}\gamma_{i3} + \cdots + F(x_k^0)b'_{k1}\gamma_{kk}\right\}, \tag{163}$$

$$B_2 = \frac{1}{h^2}\left\{F(x_0)\sum_{i=2}^{k} b'_{i2}\gamma_{i0} + F(x_1^0)\sum_{i=2}^{k} b'_{i2}\gamma_{i1} + F(x_2^0)\sum_{i=2}^{k} b'_{i2}\gamma_{i2} + F(x_3^0)\sum_{i=3}^{k} b'_{i2}\gamma_{i3} + \cdots + F(x_k^0)b'_{k2}\gamma_{kk}\right\}, \tag{164}$$

$$B_3 = \frac{1}{h^3}\left\{F(x_0)\sum_{i=3}^{k} b'_{i3}\gamma_{i0} + F(x_1^0)\sum_{i=3}^{k} b'_{i3}\gamma_{i1} + F(x_2^0)\sum_{i=3}^{k} b'_{i3}\gamma_{i2} + F(x_3^0)\sum_{i=3}^{k} b'_{i3}\gamma_{i3} + \cdots + F(x_k^0)b'_{k3}\gamma_{kk}\right\} \tag{165}$$

и т.д. Обозначим числовой множитель, на который умножается значение функции $F(x_l^0)$ в выражении для коэффициента B_j, через ξ_{jl}. Пусть

$$\xi_{j0} = \sum_{i=j}^{k} b'_{ij}\gamma_{i0}.$$

Тогда ξ_{jl}, ξ_{j0} являются вполне определенными числами, зависящими от способа разбиения шага интегрирования, т.е. от конкретного метода. Они не зависят от правой части дифференциального уравнения, независимой переменной x и шага интегрирования h. Теперь имеем более простой вид для коэффициентов:

$$B_1 = \frac{1}{h}\left\{F(x_0)\xi_{10} + F(x_1^0)\xi_{11} + F(x_2^0)\xi_{12} + F(x_3^0)\xi_{13} + \cdots + F(x_k^0)\xi_{1k}\right\}, \tag{166}$$

$$B_2 = \frac{1}{h^2}\left\{F(x_0)\xi_{20} + F(x_1^0)\xi_{21} + F(x_2^0)\xi_{22} + F(x_3^0)\xi_{23} + \cdots + F(x_k^0)\xi_{2k}\right\}, \tag{167}$$

$$B_3 = \frac{1}{h^3}\left\{F(x_0)\xi_{30} + F(x_1^0)\xi_{31} + F(x_2^0)\xi_{32} + F(x_3^0)\xi_{33} + \cdots + F(x_k^0)\xi_{3k}\right\} \tag{168}$$

и т.д. Подставляя эти выражения в формулу ($16a$), имеем

$$\begin{aligned} y(x_i^0) \approx U(x_i^0) &= y(x_0) + h\Bigg[\alpha_i F(x_0) + \frac{1}{2}\,\alpha_i^2\xi_{10}F(x_0) + \frac{1}{2}\,\alpha_i^2\sum_{l=1}^{k}F(x_l^0)\xi_{1l} + \frac{1}{3}\,\alpha_i^3\xi_{20}F(x_0) + \\ &+ \frac{1}{3}\,\alpha_i^3\sum_{l=1}^{k}F(x_l^0)\xi_{2l} + \cdots + \frac{1}{k+1}\,\alpha_i^{k+1}\xi_{k0}F(x_0) + \frac{1}{k+1}\,\alpha_i^{k+1}\sum_{l=1}^{k}F(x_l^0)\xi_{kl}\Bigg] = \\ &= y(x_0) + h\Bigg[\left(\alpha_i + \frac{1}{2}\,\alpha_i^2\xi_{10} + \frac{1}{3}\,\alpha_i^3\xi_{20} + \cdots + \frac{1}{k+1}\,\alpha_i^{k+1}\xi_{k0}\right)F(x_0) + \\ &+ \left(\frac{1}{2}\,\alpha_i^2\xi_{11} + \frac{1}{3}\,\alpha_i^3\xi_{21} + \cdots + \frac{1}{k+1}\,\alpha_i^{k+1}\xi_{k1}\right)F(x_1^0) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{1}{2}\,\alpha_i^2\xi_{1k} + \frac{1}{3}\,\alpha_i^3\xi_{2k} + \cdots + \frac{1}{k+1}\,\alpha_i^{k+1}\xi_{kk}\right)F(x_k^0)\Bigg]. \end{aligned} \tag{169}$$

Выражения, стоящие в круглых скобках перед значениями $F(x_i^0)$, являются вполне определенными числами. Введем для них следующие обозначения:

$$\beta_{i0} = \alpha_i + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m+1}\,\alpha_i^{m+1}\xi_{m0}, \quad \beta_{il} = \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m+1}\,\alpha_i^{m+1}\xi_{ml}, \quad l = 1, \ldots, k. \tag{170}$$

Так как

$$F(x_l^0) = f(x_l^0, U(x_l^0)) = f(x_0 + \alpha_l h, U(x_0 + \alpha_l h)), \tag{171}$$

то

$$\begin{aligned} y(x_i^0) \approx U(x_i^0) &= y(x_0) + h\big[\beta_{i0}f(x_0, y_0) + \beta_{i1}f(x_0 + \alpha_1 h, U(x_0 + \alpha_1 h)) + \\ &+ \beta_{i2}f(x_0 + \alpha_2 h, U(x_0 + \alpha_2 h)) + \cdots + \beta_{ik}f(x_0 + \alpha_k h, U(x_0 + \alpha_k h))\big]. \end{aligned} \tag{172}$$

Обозначим

$$hf(x_0, y_0) = K_0(h), \quad hf(x_0 + \alpha_l h, U(x_0 + \alpha_l h)) = K_l(h), \quad l = 1, \ldots, k. \tag{173}$$

Тогда формулу для значений решения в промежуточных точках можно представить в следующем виде:

$$y(x_i^0) \approx U(x_i^0) = y(x_0) + \beta_{i0}K_0(h) + \beta_{i1}K_1(h) + \beta_{i2}K_2(h) + \cdots + \beta_{ik}K_k(h), \tag{174}$$

причем величины $K_l(h)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &K_0(h) = hf(x_0, y_0), \\ &K_1(h) = hf(x_0 + \alpha_1 h, y_0 + \beta_{10}K_0(h) + \beta_{11}K_1(h) + \beta_{12}K_2(h) + \cdots + \beta_{1k}K_k(h)), \\ &K_2(h) = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{20}K_0(h) + \beta_{21}K_1(h) + \beta_{22}K_2(h) + \cdots + \beta_{2k}K_k(h)), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &K_k(h) = hf(x_0 + \alpha_k h, y_0 + \beta_{k0}K_0(h) + \beta_{k1}K_1(h) + \beta_{k2}K_2(h) + \cdots + \beta_{kk}K_k(h)). \end{aligned}\right\} \tag{175}$$

Подставляя полученные выражения для коэффициентов B_j в формулу (61), имеем

$$\begin{aligned} y(x_0+h) \approx U(x_0+h) = y_1 = y(x_0) + h\biggl[F(x_0) + \frac{1}{2}\,\xi_{10}F(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k} F(x_l^0)\,\xi_{1l} + \frac{1}{3}\,\xi_{20}F(x_0) + {} \\ + \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{k} F(x_l^0)\,\xi_{2l} + \dots + \frac{1}{k+1}\,\xi_{k0}F(x_0) + \frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k} F(x_l^0)\,\xi_{kl}\biggr] = \\ = y(x_0) + h\biggl[\left(1 + \frac{1}{2}\,\xi_{10} + \frac{1}{3}\,\xi_{20} + \dots + \frac{1}{k+1}\,\xi_{k0}\right) F(x_0) + {} \\ + \left(\frac{1}{2}\,\xi_{11} + \frac{1}{3}\,\xi_{21} + \dots + \frac{1}{k+1}\,\xi_{k1}\right) F(x_1^0) + \dots + {} \\ + \left(\frac{1}{2}\,\xi_{1k} + \frac{1}{3}\,\xi_{2k} + \dots + \frac{1}{k+1}\,\xi_{kk}\right) F(x_k^0)\biggr]. \end{aligned} \tag{176}$$

Выражения, стоящие в круглых скобках перед значениями $F(x_i^0)$, являются вполне определенными числами. Введем для них обозначения

$$p_{k0} = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j+1}\,\xi_{j0}, \quad p_{ki} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j+1}\,\xi_{ji}, \quad i = 1, \dots, k. \tag{177}$$

Тогда формулу (176) для значения решения в узле $x_1 = x_0 + h$ можно представить в следующем виде:

$$y(x_1) = y(x_0+h) \approx U(x_0+h) = y_1 = y(x_0) + h\bigl[p_{k0}F(x_0) + p_{k1}F(x_1^0) + p_{k2}F(x_2^0) + \dots + p_{kk}F(x_k^0)\bigr]$$

или

$$y(x_0+h) \approx y_1 = y(x_0) + p_{k0}K_0(h) + p_{k1}K_1(h) + p_{k2}K_2(h) + \dots + p_{kk}K_k(h), \tag{178}$$

где $K_0(h)$, $K_1(h)$, …, $K_k(h)$ удовлетворяют соотношениям (175). Формулы (178), (175) являются $(k+1)$-членной неявной формулой типа Рунге–Кутта. Таким образом, формула (61) и формула типа Рунге–Кутта (178), (175) являются разными способами записи одного и того же приближенного значения y_1 решения $y(x_1)$ дифференциального уравнения. Можно также сказать, что метод, определяемый формулой (61), совпадает с неявным методом Рунге–Кутта (178), (175).

9.2. Приведение метода четвертого порядка. Рассмотрим метод четвертого порядка

$$y_1 = y_0 + B_0 h + B_1\frac{h^2}{2} + B_2\frac{h^3}{3}, \tag{179}$$

определяемый значениями (100)

$$k = 2, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 1. \tag{180}$$

Коэффициенты B_1 и B_2 равны

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{h}\,[-3F(x_0) + 4F(x_1^0) - F(x_2^0)], \\ B_2 &= 2\,\frac{1}{h^2}\,[F(x_0) - 2F(x_1^0) + F(x_2^0)]. \end{aligned}\right\} \tag{181}$$

Данный метод совпадает с неявным методом типа Рунге–Кутта четвертого порядка, который задается трехчленной формулой

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\,K_0 + \frac{2}{3}\,K_1 + \frac{1}{6}\,K_2, \tag{182}$$

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= hf(x_0, y_0), \\ K_1 &= hf\left(x_0 + \frac{1}{2}\,h, y_0 + \frac{5}{24}\,K_0 + \frac{1}{3}\,K_1 - \frac{1}{24}\,K_2\right), \\ K_2 &= hf\left(x_0 + h, y_0 + \frac{1}{6}\,K_0 + \frac{2}{3}\,K_1 + \frac{1}{6}\,K_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{183}$$

Метод (182), (183) совпадает с методом (3.3.20) в [12].

9.3. Приведение метода пятого порядка. Рассмотрим метод пятого порядка

$$y_1 = y_0 + B_0 h + B_1 \frac{h^2}{2} + B_2 \frac{h^3}{3},$$

определяемый значениями (110)

$$k = 2, \quad \alpha_1 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}, \quad \alpha_2 = \frac{6+\sqrt{6}}{10}. \tag{184}$$

Коэффициенты B_1 и B_2 равны

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{h}\left[-4F(x_0) + \left(2+\frac{7}{6}\sqrt{6}\right)F(x_1^0) + \left(2-\frac{7}{6}\sqrt{6}\right)F(x_2^0)\right], \\ B_2 &= \frac{5}{3}\,\frac{1}{h^2}\left[2F(x_0) - \left(1+\sqrt{6}\right)F(x_1^0) + \left(-1+\sqrt{6}\right)F(x_2^0)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{185}$$

Данный метод совпадает с неявным методом типа Рунге–Кутта пятого порядка, который задается трехчленной формулой

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{9}K_0 + \frac{16+\sqrt{6}}{36}K_1 + \frac{16-\sqrt{6}}{}36K_2, \tag{186}$$

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= hf(x_0, y_0), \\ K_1 &= hf\left(x_0 + \frac{6-\sqrt{6}}{10}h, y_0 + \frac{9+\sqrt{6}}{75}K_0 + \frac{24+\sqrt{6}}{120}K_1 + \frac{168-73\sqrt{6}}{600}K_2\right), \\ K_2 &= hf\left(x_0 + \frac{6+\sqrt{6}}{10}h, y_0 + \frac{9-\sqrt{6}}{75}K_0 + \frac{168+73\sqrt{6}}{600}K_1 + \frac{24-\sqrt{6}}{120}K_2\right). \end{aligned}\right\} \tag{187}$$

Метод (186), (187) совпадает с трехстадийным методом I типа (по классификации Батчера), указанным в табл. 1 на стр. 235 в [15].

10. Интегрирование с переменным шагом. Автоматический выбор шага интегрирования. Если есть оценка локальной погрешности метода, то величину шага интегрирования h можно выбирать автоматически в процессе счета. При этом будем исходить из того, чтобы на каждый шаг h приходилась приблизительно одинаковая погрешность. Опишем один из возможных алгоритмов выбора шага.

В качестве оценки локальной погрешности метода возьмем величину члена наиболее высокого порядка (относительно h) в разложении приближенного решения по степеням независимой переменной вида (26) для уравнений второго порядка (1), (2), т.е.

$$\rho = B_k \frac{h^{k+2}}{(k+1)(k+2)}, \tag{188}$$

или вида (25a) для уравнений первого порядка (1a), (2a), т.е.

$$\rho = B_k \frac{h^{k+1}}{k+1}. \tag{189}$$

Если разбиение шага интегрирования состоит из узлов квадратурной формулы Маркова, то локальная погрешность приближенного решения на шаге h равна $O(h^{2k+2})$ или $O(h^{2k+1})$. Величина ρ, определяемая по (188) или (189), не является локальной погрешностью метода, так как она является величиной более низкого порядка малости относительно h. Однако она может быть принята в качестве оценки локальной погрешности решения.

Если оценка погрешности приближенного решения $y_1 \approx y(x_0+h)$ в точке x_0+h превосходит заданную границу ошибки ε

$$\mid \rho \mid > \varepsilon, \tag{190}$$

то считается, что на данном шаге h метод не достигает требуемой точности и вычисленное значение решения y_1 вместе с точкой $x_1 = x_0 + h$ исключаются из рассмотрения. В этом случае выбирается новый размер шага с помощью соотношения

$$h_\varepsilon = \alpha h, \tag{191}$$

где α находится из условия

$$\left| B_k \frac{h_\varepsilon^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \right| = \varepsilon. \tag{192}$$

Из (188) и (192) получаем, что

$$\alpha^{k+2} = \frac{\varepsilon}{|\,\rho\,|}$$

и

$$\alpha = \sqrt[k+2]{\frac{\varepsilon}{|\,\rho\,|}}. \tag{193}$$

Здесь $\alpha < 1$ и новое значение шага

$$h_\varepsilon = \sqrt[k+2]{\frac{\varepsilon}{|\,\rho\,|}} \cdot h \tag{194}$$

меньше предыдущего. Далее по формуле (26) из точки x_0 выполняется один шаг h_ε и вычисляется приближение y_1 к решению дифференциального уравнения в точке $x_0 + h_\varepsilon$.

Если первоначальная оценка ρ локальной погрешности не превосходит заданную границу ε, т.е.

$$|\,\rho\,| \leqslant \varepsilon, \tag{195}$$

то считается, что полученное приближение y_1 к решению удовлетворяет требуемой точности и значение $x_1 = x_0 + h$ независимой переменной принимается в качестве следующего узла интервала интегрирования. Дальнейшее интегрирование уравнения осуществляется из точки x_1 с шагом h_ε, который определяется с помощью соотношений (191), (193). Теперь $\alpha \geqslant 1$ и $h_\varepsilon \geqslant h$.

Для уравнений первого порядка новое значение шага интегрирования определяется по формуле

$$h_\varepsilon = \sqrt[k+1]{\frac{\varepsilon}{|\,\rho\,|}} \cdot h. \tag{196}$$

Описанный алгоритм выбора шага позволяет изменять шаг интегрирования в зависимости от характера поведения решения, сохраняя при этом требуемую точность приближенного решения и сокращая общее количество шагов и вычислительные затраты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
2. *Яров-Яровой М.С.* О применении уточненных методов численного интегрирования в небесной механике // Труды Гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. 1974. **45**. 179–200.
3. *Everhart E.* Implicit single-sequence methods for integrating orbits // Celestial Mechanics. 1974. **10**. 35–55.
4. *Плахов Ю.В., Мыценко А.В., Шельпов В.А.* О методике численного интегрирования уравнений возмущенного движения ИСЗ в задачах космической геодезии // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1989. № 4. 61–67.
5. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.
6. *Сорокин Н.А.* Уравнения Энке в обобщенной задаче двух неподвижных центров // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1994. № 4–5. 88–95.
7. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.
8. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М.: Наука, 1979.
9. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
11. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. М.: Мир, 1979.
12. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.
13. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
14. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
15. *Butcher J.C.* Integration processes based on Radau quadrature formulas // Math. Comp. 1964. **18**. 233–244.

Поступила в редакцию
15.06.2000