УДК 519.633.6

РАЗНОСТНЫЕ И ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО СЛАБОСЖИМАЕМОГО ГАЗА

К. А. Жуков[1], А. В. Попов[2]

Рассмотрены конечно-разностные и проекционно-разностная схемы для линейной системы уравнений, описывающей нестационарное движение вязкого слабосжимаемого баротропного газа в случае двух пространственных переменных. Дан обзор теоретических оценок точности численных решений, а также приведены результаты численного эксперимента. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09–01–00625а).

Ключевые слова: конечно-разностная схема, проекционно-разностная схема, точность численного решения, вязкий слабосжимаемый газ.

1. Начально-краевая задача. Рассмотрим линейную систему уравнений, описывающую нестационарное движение вязкого слабосжимаемого баротропного газа:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + k \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla p = \mu \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}. \tag{1}$$

Здесь давление p и вектор скорости $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ являются функциями переменных Эйлера $(t, \boldsymbol{x}) \in Q = [0, T] \times \Omega$ и подлежат определению. Функция $\boldsymbol{f}$ (вектор внешних сил) является известной функцией переменных Эйлера. Через k обозначена положительная константа, характеризующая сжимаемость газа [7, 12]. Будем считать газ слабосжимаемым, если $k \gg 1$. Величина μ является известной положительной константой, характеризующей вязкость газа.

Дополним систему (1) начальными и граничными условиями

$$(p, \boldsymbol{u})\big|_{t=0} = (p_0, \boldsymbol{u}_0), \ \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = 0, \ (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \partial\Omega. \tag{2}$$

Задача (1), (2) тесно связана с нестационарной задачей Стокса и задачами, возникающими при решении задач Стокса с использованием возмущений за счет допущения слабой сжимаемости жидкости. Эти задачи рассмотрены в работах [6, 9, 11, 14]. Однако в указанных работах акцент сделан на изучение близости решения этих задач к решению задач Стокса для несжимаемой жидкости, поэтому построенные разностные схемы и полученные оценки точности сеточных решений непосредственно не применимы в динамике слабосжимаемого газа. Так, в [6] для неявных разностных схем переменных направлений доказаны оценки погрешности для функции скорости. В то же время, оценка для функции давления в этой работе нормирована на коэффициент $1/k$, что не дает возможности судить о точности расчетов давления при больших k.

В настоящей статье дается обзор полученных теоретических оценок погрешности для функции скорости и давления без указанной нормировки. В частности, для проекционно-разностной схемы приведена полная оценка погрешности, зависящая не только от шагов дискретизации, но и от параметров задачи k и μ. Кроме того, приведен сравнительный анализ используемых схем на основе результатов численного эксперимента.

2. Конечно-разностная схема. Пусть $\Omega = [0, l_1] \times [0, l_2]$, $h_x = l_1/M_1$, $h_y = l_2/M_2$, $h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$ и пусть

$$\Omega_0 = \Big\{ \big((i+0.5)h_x, (j+0.5)h_y\big) \, : \, 0 \leqslant i \leqslant M_1 - 1, \, 0 \leqslant j \leqslant M_2 - 1 \Big\},$$

$$\overline{\Omega}_1 = \Big\{ \big(ih_x, (j+0.5)h_y\big) \, : \, 0 \leqslant i \leqslant M_1, \, -1 \leqslant j \leqslant M_2 \Big\},$$

$$\overline{\Omega}_2 = \Big\{ \big((i+0.5)h_x, jh_y\big) \, : \, -1 \leqslant i \leqslant M_1, \, 0 \leqslant j \leqslant M_2 \Big\}.$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; научн. сотр., e-mail: zhukov_k@cs.msu.su

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; доцент, e-mail: popovav@mech.math.msu.su;

Через Ω_1 и Ω_2 будем обозначать множества внутренних точек $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ соответственно. Пусть U^h — линейное пространство вектор-функций $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, компоненты которых определены на $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$, а P^h — пространство функций, определенных на Ω_0.

Теперь определим оператор $\operatorname{div}^h \boldsymbol{v} = \partial_x^{1,0} v_1 + \partial_y^{2,0} v_2$, действующий из U^h в P^h по правилу

$$\big(\partial_x^{1,0} v\big)_{(i+0.5)(j+0.5)} = \frac{v_{(i+1)(j+0.5)} - v_{i(j+0.5)}}{h_x}, \quad \big(\partial_y^{2,0} v\big)_{(i+0.5)(j+0.5)} = \frac{v_{(i+0.5)(j+1)} - v_{(i+0.5)j}}{h_y},$$

где $i = 0, 1, \ldots, M_1 - 1$ и $j = 0, 1, \ldots, M_2 - 1$, а также оператор $\nabla^h q = \big(\partial_x^{0,1} q, \partial_y^{0,2} q\big)$, действующий из P^h в U^h по правилу

$$\big(\partial_x^{0,1} q\big)_{i(j+0.5)} = \frac{q_{(i+0.5)(j+0.5)} - q_{(i-0.5)(j+0.5)}}{h_x}, \quad \big(\partial_y^{0,2} q\big)_{(i+0.5)j} = \frac{q_{(i+0.5)(j+0.5)} - q_{(i+0.5)(j-0.5)}}{h_y},$$

где $i = 1, 2, \ldots, M_1 - 1$ и $j = 1, 2, \ldots, M_2 - 1$. Под Δ^h будем понимать обычный пятиточечный сеточный оператор Лапласа.

В работах [7] и [12] для численного решения задачи (1), (2) предложено использовать разностную схему

$$q_t + k \operatorname{div}^h \widehat{\boldsymbol{v}} = 0, \quad \boldsymbol{v}_t + \nabla^h \widehat{q} = \mu \Delta^h \widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{f}}, \tag{3}$$

где через q и $\boldsymbol{v}$ обозначены разностные аналоги функций давления и скорости соответственно. Здесь и далее используются стандартные обозначения из [8]: $v \equiv v^n = v(t_n, \boldsymbol{x})$, $\widehat{v} = v^{n+1}$, $v_t \equiv v_t^n = \tau^{-1}\big(v^{n+1} - v^n\big)$, $v_{\overline{t}} \equiv v_{\overline{t}}^n = \tau^{-1}\big(v^n - v^{n-1}\big)$.

Начальные и граничные условия для схемы (3) задаются равенствами

$$\begin{aligned}
&(q, \boldsymbol{v})\big|_{n=0} = (p_0, \boldsymbol{u}_0);\\
&v_{1i(j+0.5)} = 0, \quad i = 0, M_1, \quad j = -1, \ldots, M_2;\\
&v_{1i(j-0.5)} + v_{1i(j+0.5)} = 0, \quad i = 1, \ldots, M_1 - 1, \quad j = 0, M_2;\\
&v_{2(i+0.5)j} = 0, \quad i = -1, \ldots, M_1, \quad j = 0, M_2;\\
&v_{2(i-0.5)j} + v_{2(i+0.5)j} = 0, \quad i = 0, M_1, \quad j = 1, \ldots, M_2 - 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Методом энергетических неравенств в [7] и [12] были доказаны оценки для численного решения, получаемого по схеме (3), (4). Приведем уточненную оценку, получаемую с учетом результатов работы [3]. Под $\|\cdot\|$ ниже понимается обычная сеточная L_{2h}-норма функции в соответствующем пространстве.

Теорема 1. *Пусть решение* $(\boldsymbol{u},\, p)$ *задачи* (1), (2) *гладкое и величина* $k\tau^2$ *ограничена. Тогда для погрешности задачи* (3), (4) *верна следующая оценка*:

$$\begin{aligned}
R \equiv \max_{n=1,\ldots,N} \big\|p^n - q^n\big\| + \mu \max_{n=1,\ldots,N} \big\|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v}^n\big\| + \frac{1}{\sqrt{k}} \max_{n=1,\ldots,N} \big\|p_{\overline{t}}^n - q_{\overline{t}}^n\big\| +\\
+ \max_{n=1,\ldots,N} \big\|\boldsymbol{u}_{\overline{t}}^n - \boldsymbol{v}_{\overline{t}}^n\big\| + \mu \max_{n=1,\ldots,N} \Big\|\nabla^h\big(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v}^n\big)\Big\| \leqslant C\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\tau + \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{k}\right)h^2\right).
\end{aligned}$$

Для поиска разностного решения на верхнем слое можно использовать различные итерационные процессы, разработанные для седловых задач (см. [1, 10]). Классическим алгоритмом считается метод Узавы, состоящий в следующем. Выразим $\widehat{\boldsymbol{v}}$ из второго уравнения (3) и подставим полученное выражение в первое уравнение:

$$\Big(E - \tau^2 k \operatorname{div}^h \big(E - \tau\mu\Delta^h\big)^{-1} \nabla^h\Big)\widehat{q} = -\tau \operatorname{div}^h \big(E - \tau\mu\Delta^h\big)^{-1}\Big(\tau\widehat{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{v}\Big) + q, \tag{5}$$

$$\widehat{\boldsymbol{v}} = -\tau\big(E - \tau\mu\Delta^h\big)^{-1}\nabla^h\widehat{q} + \big(E - \tau\mu\Delta^h\big)^{-1}\Big(\tau\widehat{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{v}\Big). \tag{6}$$

Тем самым задача сведена к последовательному решению уравнений (5) и (6). Обозначим

$$F = -\tau \operatorname{div}^h \big(E - \tau\mu\Delta^h\big)^{-1}\Big(\tau\widehat{\boldsymbol{f}} + \boldsymbol{v}\Big) + q, \quad B_0^h = \Big(E - \tau^2 k \operatorname{div}^h \big(E - \tau\mu\Delta^h\big)^{-1}\nabla^h\Big).$$

Из выписанных уравнений видно, что наиболее трудоемкой частью поиска разностного решения на верхнем временно́м слое является решение уравнения $B_0^h \widehat{q} = F$. Поэтому в работах [2, 3] была построена модификация схемы (3), основанная на замене оператора B_0^h расщепляющимся оператором

$$\Big(E - \tau^2 k\, \partial_x^{1,0}\big(E - \tau\mu\Delta^h\big)^{-1}\partial_x^{0,1}\Big) \times \Big(E - \tau^2 k\, \partial_y^{2,0}\big(E - \tau\mu\Delta^h\big)^{-1}\partial_y^{0,2}\Big)\widehat{q} = F. \tag{7}$$

После описанной выше замены оператора B_0^h расщепляющимся оператором разностная схема примет вид

$$q_t + k\operatorname{div}^h \widehat{\boldsymbol{v}} + k^2\tau^3 B^h \widehat{q} = 0, \quad \boldsymbol{v}_t + \nabla^h \widehat{q} = \mu\Delta^h \widehat{\boldsymbol{v}} + \widehat{\boldsymbol{f}}, \tag{8}$$

где $B^h q = \partial_x^{1,0}\bigl(E - \tau\mu\Delta^h\bigr)^{-1}\partial_x^{0,1}\partial_y^{2,0}\bigl(E - \tau\mu\Delta^h\bigr)^{-1}\partial_y^{0,2} q$.

Начальные и граничные условия, как и прежде, задаются равенствами (4).

В работах [2, 3] показано, что для решения уравнения (7) можно предложить точный метод. Идея его состоит в использовании быстрого дискретного преобразования Фурье по одной из переменных и метода прогонки по другой переменной. Кроме того, в этих работах доказано существование и единственность разностного решения задачи (8), (4). Более того, в работе [3] получены оценки точности разностной схемы в зависимости от параметров k и μ и параметров дискретизации.

Теорема 2. *Пусть решение* $(\boldsymbol{u},\ p)$ *задачи* (1), (2) *гладкое и величина* $k\tau^2$ *ограничена. Тогда для погрешности задачи* (8), (4) *верна следующая оценка*:

$$R \leqslant C\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\tau + \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{k}\right)\Bigl(h^2 + k\sqrt{\tau^3/\mu}\,\Bigr)\right).$$

Однако величина C в утверждениях теорем 1 и 2 зависит от норм точного решения дифференциальной задачи (1), (2), которые, в свою очередь, также зависят от параметров k и μ. Вывод окончательной оценки приводит к завышенным по строгости условиям на параметры τ, h, μ и k из-за того, что техника доказательства в конечно-разностном случае предъявляет бо́льшие требования к гладкости точного решения. С целью снижения строгости этих требований была рассмотрена схема, построенная методом Галеркина.

3. Проекционно-разностная схема. Пусть Ω — ограниченная односвязная область в пространстве R^2, граница которой — кусочно-гладкая кривая. Пусть на Ω задана триангуляция, удовлетворяющая обычным условиям квазиравномерности.

Узлами сетки будем называть вершины треугольников триангуляции. Через Ω_h будем обозначать совокупность узлов, принадлежащих области Ω. Разобьем каждый треугольник средними линиями на четыре части. Полученную в результате такой триангуляции сетку обозначим через $\Omega_{h/2}$. Будем считать, что для каждой сетки все узлы перенумерованы: k-му узлу сетки соответствует $\bigl(x^k, y^k\bigr)$.

Каждому внутреннему узлу $\bigl(x^k, y^k\bigr)$ сетки $\Omega_{h/2}$ поставим в соответствие функцию $\overline{\varphi}_k(x,y)$, равную 1 в данном узле, 0 во всех прочих и линейную в каждом "малом" треугольнике. Узлу $\bigl(x^k, y^k\bigr)$ сетки Ω_h поставим в соответствие некоторый "большой" треугольник, вершиной которого он является, так, чтобы различным узлам соответствовали различные "большие" треугольники. Теперь каждому такому треугольнику сопоставим функцию $\psi_k(x,y)$, равную 1, если (x,y) принадлежит "большому" треугольнику, и 0 в противном случае.

Множество линейных комбинаций пар функций $\overline{\varphi}_k(x,y)$ образуют конечномерное пространство. Обозначим его через $\overset{o}{U}_h$. Пары функций $\overline{\varphi}_k(x,y)$ образуют базис в этом пространстве. Аналогично определим пространство P_h как множество линейных комбинаций функций $\psi_k(x,y)$, которые образуют базис в этом пространстве.

Ниже выражение $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение, а $\|\cdot\|$ — норму в $L_2(\Omega)$.

Выполним дискретизацию по пространственным переменным, используя метод конечных элементов, а по времени — метод конечных разностей. Полученное дискретное решение задачи (1), (2) обозначим через $(q,\boldsymbol{v})$:

$$\begin{aligned} &(q_{\overline{t}}, \psi) + k(\operatorname{div}\boldsymbol{v}, \psi) = 0 \quad \forall\psi \in P_h,\\ &(\boldsymbol{v}_{\overline{t}}, \overline{\varphi}) - (q, \operatorname{div}\overline{\varphi}) + \mu(\nabla\boldsymbol{v}, \nabla\overline{\varphi}) = (\boldsymbol{f}, \overline{\varphi}) \quad \forall\overline{\varphi} \in \overset{o}{U}_h, \end{aligned} \tag{9}$$

где q и $\boldsymbol{v}$ на каждом временно́м слое принадлежат пространствам P_h и $\overset{o}{U}_h$ соответственно.

Начальные условия зададим в виде

$$\bigl(q^0, \boldsymbol{v}^0\bigr) = \bigl(\widetilde{p}, \widetilde{\boldsymbol{u}}\bigr), \tag{10}$$

где $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ находятся из следующей задачи

$$\begin{aligned} &\bigl(\operatorname{div}\widetilde{\boldsymbol{u}}, \psi\bigr) = \bigl(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0, \psi\bigr) \quad \forall\psi \in P_h,\\ &\mu\bigl(\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}}, \nabla\overline{\varphi}\bigr) - \bigl(\widetilde{p}, \operatorname{div}\overline{\varphi}\bigr) = \mu\bigl(\nabla\boldsymbol{u}_0, \nabla\overline{\varphi}\bigr) - \bigl(p_0, \operatorname{div}\overline{\varphi}\bigr) \quad \forall\overline{\varphi} \in \overset{o}{U}_h. \end{aligned} \tag{11}$$

Фактически, $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ являются проекционно-разностными приближениями тождеств

$$\big(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0, \widetilde{\eta}\big) = \big(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0, \widetilde{\eta}\big) \quad \forall \widetilde{\eta} \in L_2(\Omega),$$

$$\mu\big(\nabla\boldsymbol{u}_0, \nabla\widetilde{\vartheta}\big) - \big(p_0, \operatorname{div}\widetilde{\vartheta}\big) = \mu\big(\nabla\boldsymbol{u}_0, \nabla\widetilde{\vartheta}\big) - \big(p_0, \operatorname{div}\widetilde{\vartheta}\big) \quad \forall \widetilde{\vartheta} \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega),$$

которые рассматриваются при условии $\boldsymbol{u}_0\big|_{\partial\Omega} = 0$. Граничные условия для решения $\boldsymbol{v}$ будут выполняться автоматически. В работе [4] доказано существование и единственность решения проекционно-разностной схемы (9), (10) и получена следующая оценка погрешности.

Теорема 3. *Пусть решение* $(\boldsymbol{u}, p)$ *задачи* (1), (2) *гладкое. Тогда для разности между решениями задач* (1), (2) *и* (9), (10) *верна следующая оценка*:

$$\max_{n=1,\dots,N} \big\|p^n - q^n\big\| + \mu \max_{n=1,\dots,N} \big\|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v}^n\big\| + \frac{1}{\sqrt{k}} \max_{n=1,\dots,N} \left\|\frac{\partial p^n}{\partial t} - q^n_{\bar{t}}\right\| +$$

$$+ \max_{n=1,\dots,N} \left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial t} - \boldsymbol{v}^n_{\bar{t}}\right\| + \mu \max_{n=1,\dots,N} \left\|\nabla\big(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v}^n\big)\right\| \leqslant C(\tau + h).$$

Здесь и далее h — наибольшая сторона треугольника триангуляции Ω_h, а τ — шаг по времени ($\tau = T/N$).

Замечание. Под гладким решением задачи (1), (2) имеются в виду трижды дифференцируемые по времени функции $(\boldsymbol{u}, p)$, которые обладают следующими ограниченными нормами: $\sup\limits_{[0,T]} \|p\|_{W^1_2(\Omega)}$,

$$\sup_{[0,T]}\left\|\frac{\partial p}{\partial t}\right\|_{W^1_2(\Omega)},\ \sup_{[0,T]}\left\|\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right\|_{W^1_2(\Omega)},\ \sup_{[0,T]}\left\|\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}\right\|,\ \sup_{[0,T]}\|\boldsymbol{u}\|_{W^2_2(\Omega)},\ \sup_{[0,T]}\left\|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right\|_{W^2_2(\Omega)},\ \sup_{[0,T]}\left\|\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right\|_{W^2_2(\Omega)},\ \sup_{[0,T]}\left\|\frac{\partial^3 \boldsymbol{u}}{\partial t^3}\right\|.$$

Заметим, что в теореме 3 константа C зависит от k и μ через нормы решения задачи (1), (2), указанные при описании требований гладкости. С целью получения окончательной оценки погрешности воспользуемся результатами работ [5, 13] для оценки норм производных функций скорости и давления, входящих в константу C. В итоге получим следующую оценку.

Теорема 4. *Пусть граница области* Ω *— кривая класса* C^5 *и пусть решение* $(\boldsymbol{u}, p)$ *задачи* (1), (2), *а также функция* $\boldsymbol{f}$ *гладкие. Тогда для погрешности задачи* (9), (10) *верна следующая оценка:*

$$\max_{n=1,\dots,N} \big\|p^n - q^n\big\| + \mu \max_{n=1,\dots,N} \big\|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v}^n\big\| + \frac{1}{\sqrt{k}} \max_{n=1,\dots,N} \left\|\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^n - q^n_{\bar{t}}\right\| +$$

$$+ \max_{n=1,\dots,N} \left\|\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)^n - \boldsymbol{v}^n_{\bar{t}}\right\| + \mu \max_{n=1,\dots,N} \left\|\nabla\big(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{v}^n\big)\right\| \leqslant C\left(\tau k\sqrt{k} + h\,\frac{k^2\sqrt{k}}{\mu\sqrt{\mu}}\right).$$

В теореме 4 константа C не зависит от параметров k и μ.

4. Результаты численных экспериментов. Для иллюстрации теоретических результатов были проведены численные эксперименты по решению задачи (1), (2) для области $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ при различных величинах k и μ. Функция $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ задана в виде

$$f_1 = \pi \cos\left(\frac{k\pi}{t+2.5}\right)\big[\sin(\pi x)\sin(2\pi y) - 2\cos(2\pi x)\cos(\pi y)\big] +$$

$$+ \left[\left(\frac{5\mu\pi^2}{(t+2.5)^2} - \frac{2}{(t+2.5)^3}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{t+2.5}\right) - \frac{k\pi}{(t+2.5)^4}\cos\left(\frac{k\pi}{t+2.5}\right)\right]\sin(\pi x)\sin(2\pi y),$$

$$f_2 = \pi \cos\left(\frac{k\pi}{t+2.5}\right)\Big[\sin(2\pi x)\sin(\pi y) - 2\cos(\pi x)\cos(2\pi y)\Big] +$$

$$+ \left[\left(\frac{5\mu\pi^2}{(t+2.5)^2} - \frac{2}{(t+2.5)^3}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{t+2.5}\right) - \frac{k\pi}{(t+2.5)^4}\cos\left(\frac{k\pi}{t+2.5}\right)\right]\sin(2\pi x)\sin(\pi y).$$

Начальные условия имеют вид

$$p_0 = -\cos\left(\frac{k\pi}{2.5}\right)\big[\cos(\pi x)\sin(2\pi y) + \sin(2\pi x)\cos(\pi y)\big],$$

$$u_0 = \frac{1}{6.25}\sin\left(\frac{k\pi}{2.5}\right)\sin(\pi x)\sin(2\pi y),$$

$$v_0 = \frac{1}{6.25}\sin\left(\frac{k\pi}{2.5}\right)\sin(2\pi x)\sin(\pi y).$$

В этом случае задача (1), (2) имеет известное гладкое решение

$$p = -\cos\left(\frac{k\pi}{t+2.5}\right)\bigl[\cos(\pi x)\sin(2\pi y) + \sin(2\pi x)\cos(\pi y)\bigr],$$
$$u = \frac{1}{(t+2.5)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{t+2.5}\right)\sin(\pi x)\sin(2\pi y),$$
$$v = \frac{1}{(t+2.5)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{t+2.5}\right)\sin(2\pi x)\sin(\pi y).$$

Были реализованы схемы (3), (8) и (9). Для вычисления решения при помощи схем (3) и (9) был использован метод бисопряженных градиентов с предобусловливателем SSOR (для вычисления решения алгебраической системы использован пакет LASPack версии 1.12.2). Результаты счета показали, что схема с расщепляющимся оператором особенно эффективно работает по сравнению с описанными реализациями неявных схем (3), (9) при больших параметрах k. Результаты счета при $k = 50$, $\mu = 10^{-2}$ приведены в табл. 1, в которой содержатся значения норм $L_{2,h}$ погрешности численного интегрирования функции давления и первой компоненты скорости.

Таблица 1

$k = 50$, $\mu = 10^{-2}$

h, τ	1/64, 1/128		
схема	8	3	9
$\lVert p-q\rVert$	2.2×10^{-2}	1.5×10^{-1}	1.7×10^{-1}
$\lVert u_1-v_1\rVert$	7.5×10^{-2}	1.2×10^{-1}	2.0×10^{-1}
h, τ	1/128, 1/256		
схема	8	3	9
$\lVert p-q\rVert$	2.2×10^{-3}	5.8×10^{-2}	6.4×10^{-2}
$\lVert u_1-v_1\rVert$	1.4×10^{-2}	3.7×10^{-2}	6.1×10^{-2}
h, τ	1/256, 1/512		
схема	8	3	9
$\lVert p-q\rVert$	3.4×10^{-3}	2.2×10^{-2}	2.3×10^{-2}
$\lVert u_1-v_1\rVert$	1.7×10^{-2}	1.1×10^{-2}	1.2×10^{-2}

Таблица 2

$k = 100$, $\mu = 10^{-1}$

h, τ	1/64, 1/256		
схема	8	3	9
$\lVert p-q\rVert$	2.2×10^{-1}	6.3×10^{-1}	6.4×10^{-1}
$\lVert u_1-v_1\rVert$	4.8×10^{-2}	7.5×10^{-2}	8.4×10^{-2}
h, τ	1/512, 1/256		
схема	8	3	9
$\lVert p-q\rVert$	9.0×10^{-2}	3.0×10^{-1}	3.0×10^{-1}
$\lVert u_1-v_1\rVert$	2.4×10^{-2}	3.6×10^{-2}	3.8×10^{-2}
h, τ	1/256, 1/1024		
схема	8	3	9
$\lVert p-q\rVert$	3.7×10^{-2}	1.4×10^{-1}	1.4×10^{-1}
$\lVert u_1-v_1\rVert$	1.5×10^{-2}	2.0×10^{-2}	2.0×10^{-2}

Аналогичные результаты приведены в табл. 2 для $k = 100$ и $\mu = 10^{-1}$.

Вместе с тем, метод расщепления оператора при небольших параметрах k ведет себя не хуже, чем рассмотренные реализации неявной схемы при $k = 1$ и $\mu = 10^{-1}$, что видно из табл. 3, в которой также приведены значения норм $L_{2,h}$ погрешности численного интегрирования соответственно функции давления и первой компоненты скорости.

Из сказанного выше следует, что схема (8) с расщепляющимся оператором при больших параметрах k более предпочтительна, чем просто неявные схемы (3) и (9), решение которых ищется методом бисопряженных градиентов, а при небольших значениях k результаты расчетов всех трех схем примерно одинаковы.

Был проведен численный эксперимент для решения задачи о каверне. Рассмотрим систему (1) для области $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ со следующими начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}
&(p,\boldsymbol{u})\big|_{t=0} = (0,\mathbf{0}), && (x_1,x_2)\in\Omega,\\
&u_1(t,x_1,x_2) = 1, && (t,x_1,x_2)\in[0,T]\times\Gamma, \quad \Gamma\equiv\bigl\{(x_1,x_2)\in\partial\Omega,\ x_2=1\bigr\},\\
&u_1(t,x_1,x_2) = 0, && (t,x_1,x_2)\in[0,T]\times(\partial\Omega\setminus\Gamma),\\
&u_2(t,x_1,x_2) = 0, && (t,x_1,x_2)\in[0,T]\times\partial\Omega.
\end{aligned}$$

Функция $\boldsymbol{f}$ предполагается тождественно равной нулю.

При решении этой задачи разностными схемами (8), (3) и (9) было получено стационарное решение. Для вычисления решения схем (3) и (9) также был использован метод бисопряженных градиентов с предообусловливателем SSOR.

В качестве точного решения, необходимого для сравнения точности указанных выше схем, было использовано численное решение задачи Стокса в области Ω. Это решение было получено методом конечных элементов на равномерной сетке с шагом $h = 2^{-10}$. Программа, решающая данную задачу, предоставлена М. А. Ольшанским.

Результаты счета на сетке с $h = 1/256$ при $k = 10$, $\mu = 10^{-1}$ и при $k = 100$, $\mu = 10^{-2}$ приведены в табл. 4. В ней содержатся значения норм $L_{2,h}$ разностей между функцией давления и первой компоненты скорости, полученными по одной из трех указанных схем, и соответствующими величинами численного решения задачи Стокса. Из представленных результатов видно, что функцию давления наиболее точно удается посчитать схемой (9), что связано с эффективностью проекционно-разностных схем для вычисления негладких функций. В то же время функцию скорости, особенно при больших k, наиболее эффективно удается посчитать на основе схемы (8).

Таблица 3

$k = 1$, $\mu = 10^{-1}$

h, τ	1/64, 1/256		
схема	8	3	9
$\|p - q\|$	2.0×10^{-4}	6.7×10^{-4}	1.7×10^{-3}
$\|u_1 - v_1\|$	2.3×10^{-3}	9.0×10^{-3}	1.7×10^{-2}
h, τ	1/128, 1/512		
схема	8	3	9
$\|p - q\|$	4.2×10^{-5}	5.5×10^{-4}	8.2×10^{-4}
$\|u_1 - v_1\|$	1.1×10^{-3}	3.7×10^{-3}	5.4×10^{-3}
h, τ	1/256, 1/1024		
схема	8	3	9
$\|p - q\|$	2.1×10^{-5}	3.3×10^{-4}	4.0×10^{-4}
$\|u_1 - v_1\|$	5.4×10^{-4}	1.6×10^{-3}	2.0×10^{-3}

Таблица 4

$h = 1/256$

	$k = 10$, $\mu = 10^{-1}$		
схема	8	3	9
$\|p - q\|$	1.124×10^{-1}	1.755×10^{-1}	9.914×10^{-2}
$\|u_1 - v_1\|$	3.359×10^{-3}	4.148×10^{-3}	5.427×10^{-3}
	$k = 100$, $\mu = 10^{-2}$		
схема	8	3	9
$\|p - q\|$	1.796×10^{-1}	1.739×10^{-1}	1.228×10^{-1}
$\|u_1 - v_1\|$	8.919×10^{-3}	1.200×10^{-2}	1.464×10^{-2}

Заключение. В представленной работе описаны две конечно-разностные и проекционно-разностная схемы для линейной начально-краевой задачи, описывающей нестационарное двумерное движение слабосжимаемого вязкого баротропного газа. Для всех схем справедливы оценки точности численных решений, доказанные методом энергетических неравенств в предшествующих работах авторов. Поскольку исследуемая начально-краевая задача анализировалась во многих работах, хотелось бы отметить важные отличия приведенных результатов от результатов других авторов:

1) полученные оценки отражают близость численных решений и точного решения начально-краевой задачи, а не задачи Стокса;

2) оценки для погрешности вычисления функции давления не нормированы на величину, обратную коэффициенту, характеризующему сжимаемость газа;

3) константа в оценке для погрешности проекционно-разностной схемы не зависит от параметров задачи (вязкости и сжимаемости газа), для чего потребовалось провести отдельное исследование зависимости точного решения от этих величин.

Все схемы являются неявными, поэтому для вычисления решений одной из конечно-разностных схем и проекционно-разностной схемы предлагается использовать метод бисопряженных градиентов. Вторая конечно-разностная схема имеет расщепляющийся оператор, что дает возможность в области прямоугольной формы найти ее решение на верхнем слое за $O(n)$ арифметических действий, где n — число неизвестных. Это преимущество схемы с расщепляющимся оператором особенно сказывается при больших величинах параметра сжимаемости, что видно из приведенных выше результатов численного эксперимента: точность получается выше, а время счета уменьшается на одинаковых сетках. Однако возможность применения схемы расщепления лишь в областях прямоугольной формы делает это преимущество ограниченным.

В заключение хотелось бы выразить надежду, что исследования способов решения линейной задачи для динамики вязкого слабосжимаемого газа позволят построить обоснованные эффективные методы решения нелинейных задач вязкого газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Быченков Ю.В., Чижонков Е.В.* Итерационные методы решения седловых задач. М.: БИНОМ, 2010.
2. *Жуков К.А., Попов А.В.* Экономичная разностная схема для нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. **20**. Казань: Казан. матем. об-во, 2003. 119–128.
3. *Жуков К.А., Попов А.В.* Исследование экономичной разностной схемы для нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. **45**, № 4. 677–693.
4. *Жуков К.А.* Проекционно-разностная схема для нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. **33**. Казань: Казан. матем. об-во, 2006. 141–148.
5. *Жуков К.А., Попов А.В.* Исследование производных функций скорости и давления для задачи нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. **33**. Казань: Казан. матем. об-во, 2006. 45–73.
6. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
7. *Попов А.В.* Разностная схема для нестационарного движения вязкого слабосжимаемого газа // Оптимизация численных методов. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2000. 151–160.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
9. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
10. *Чижонков Е.В.* Релаксационные методы решения седловых задач. М.: ИВМ РАН, 2002.
11. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1966.
12. *Popov A.V.* On a finite difference scheme for a viscous weakly compressible gas problem // Department of Mathematics, University of Nijmengen. The Netherlands. Report N 9617. Nijmengen, 1996.
13. *Popov A.V., Zhukov K.A.* Properties of a solution to a nonstationary flow for a viscous weakly compressible gas // Lithuanian Math. J. 2010. **50**, N 3. 344–366.
14. *Prohl A.* Projection and quasi-compressibility methods for solving the imcompressible Navie–Stokes equations. Stuttgard: Teubner, 1997.

Поступила в редакцию
05.12.2011