УДК 519.6

МАТРИЦЫ ДОБАВЛЕНИЯ И УДАЛЕНИЯ УЗЛОВ ДЛЯ НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

А. А. Макаров[1]

Построены непрерывно дифференцируемые сплайны второго порядка на неравномерной сетке. Приведены формулы для вычисления полиномиальных и неполиномиальных (тригонометрических и гиперболических) сплайнов. Найдены калибровочные соотношения, дающие представление сплайнов на исходной сетке в виде линейной комбинации такого же рода сплайнов на измельченной (плотной) сетке, и калибровочные соотношения, дающие представление сплайнов на укрупненной (разреженной) сетке в виде линейной комбинации такого же рода сплайнов на исходной сетке. Получены матрицы добавления и удаления узлов для сплайнов на интервале и на отрезке, ассоциированных с бесконечной и конечной неравномерными сетками соответственно. Работа частично поддержана грантом РФФИ (10–01–00245) и грантом Президента РФ (МК-5219.2011.1).

Ключевые слова: сплайны, всплески, вэйвлеты, биортогональные системы, матрицы декомпозиции, матрицы реконструкции, уточняющие схемы, алгоритмы добавления и удаления узлов, сплайновые кривые.

1. Введение. Геометрическое моделирование (Computer Aided Geometric Design, CAGD, компьютерная геометрия) широко используется при разработке CAD/CAM систем (систем автоматизированного проектирования, САПР) и связано с построением кривых и поверхностей по ограниченной информации. Методы построения кривых Безье и B-кривых (или их весового варианта — NURBS-кривых) являются дефакто стандартом при построении кривых и поверхностей для различных CAGD-систем. Однако используемые полиномиальные базисы не могут точно представить трансцендентные кривые, которые весьма часто используются в прикладном проектировании. Активно исследуются различные способы построения сплайнов, обладающих свойствами B-сплайнов [1–3]. Особый интерес здесь представляют алгоритмы удаления и добавления узлов к сплайнам и сплайновым кривым, связанные с укрупнением и измельчением исходной сетки.

Сплайны и вэйвлеты (всплески) нашли широкое применение в теории информации. Вэйвлетные разложения связаны с составлением эффективных алгоритмов обработки (сжатия) больших потоков информации [4]. В теории сплайнов наиболее важными являются интерполяционные и аппроксимационные свойства, свойства гладкости и устойчивости решения интерполяционных и аппроксимационных задач; важно также минимизировать вычислительную сложность (объем используемых ресурсов вычислительной системы: памяти, каналов передачи результатов, времени счета). Если удается установить вложенность пространств сплайнов на последовательности измельчающихся или укрупняющихся сеток и представить цепочку вложенных пространств в виде прямой суммы вэйвлетных пространств, а также реализовать базисные функции с минимальной длиной носителя, то вычислительная сложность оказывается приемлемой.

В настоящей статье рассматриваются аппроксимационные соотношения как система уравнений, из которой выводятся (как полиномиальные, так и неполиномиальные) минимальные сплайны максимальной гладкости произвольного порядка. Приведены формулы для вычисления полиномиальных, тригонометрических и гиперболических сплайнов. Для непрерывно дифференцируемых сплайнов второго порядка на неравномерной сетке найдены калибровочные соотношения, дающие представление сплайнов на исходной сетке в виде линейной комбинации такого же рода сплайнов на измельченной (плотной) сетке, и калибровочные соотношения, дающие представление сплайнов на укрупненной (разреженной) сетке в виде линейной комбинации такого же рода сплайнов на исходной сетке. Такие представления ведут к вэйвлетному разложению сигналов с быстро меняющимися характеристиками (см., например, [5–7]), что существенно экономит ресурсы вычислительных систем. Известные кратномасштабные уравнения (см., например, [8]) являются частным случаем полученных здесь калибровочных соотношений.

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Петродворец, Университетский просп., 28, 198504, Санкт-Петербург; ассистент, e-mail: Antony.Makarov@gmail.com
© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Цель данной работы — построить непрерывно дифференцируемые сплайны второго порядка на неравномерной сетке, привести формулы для вычисления полиномиальных, тригонометрических и гиперболических сплайнов, найти калибровочные соотношения, получить матрицы добавления и удаления узлов для сплайнов на интервале и на отрезке, ассоциированных с бесконечной и конечной неравномерными сетками соответственно.

2. Предварительные обозначения. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}^1$ — множество вещественных чисел. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$. Векторное (линейное) пространство $(m+1)$-мерных вектор-столбцов обозначим через $\mathbb{R}^{m+1}$, причем векторы в нем будем отождествлять с одностолбцовыми матрицами и применять к ним обычные матричные операции; в частности, для двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m+1}$ выражение $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ представляет собой евклидово скалярное произведение этих векторов. Компоненты векторов выделяются квадратными скобками и снабжаются индексами $0, 1, \ldots, m$: например, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, \ldots, [\mathbf{a}]_m)^T$.

Квадратная матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^{m+1}$ (в указанном порядке), обозначается символом $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$, а выражение $\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ обозначает ее определитель. Упорядоченное множество $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m+1}$ будем называть *цепочкой векторов.* Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если $\det(\mathbf{a}_{j-m}, \mathbf{a}_{j-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_j) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Совокупность всех полных цепочек будем обозначать через $\mathbb{A}$. Множество всех функций, непрерывных на интервале (α, β), обозначим через $C(\alpha, \beta)$; для любого числа $S \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение $C^S(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)} \in C(\alpha, \beta)\ \forall\, i = 0, 1, 2, \ldots, S\}$, полагая $C^0(\alpha, \beta) = C(\alpha, \beta)$. Если компоненты вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m+1}$ непрерывно дифференцируемы S раз на интервале (α, β), то будем писать $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^S(\alpha, \beta)$. Аналогичные обозначения $C^S[a, b]$ и $\mathbf{C}^S[a, b]$ будем использовать для соответствующих пространств на отрезке $[a, b]$.

3. Пространство минимальных сплайнов. На интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим следующую сетку $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$:

$$X:\ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \tag{1}$$

где $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{j\to-\infty} x_j$ и $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{j\to+\infty} x_j$ (случаи $\alpha = -\infty$ и $\beta = +\infty$ не исключаются).

Введем обозначения $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}}(x_j, x_{j+1})$, $S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j, x_{j+m+1}]$, $J_k \stackrel{\text{def}}{=} \{k-m, k-m+1, \ldots, k\}$, где $k, j \in \mathbb{Z}$.

При $K_0 \geqslant 1$, $K_0 \in \mathbb{R}^1$ обозначим через $\mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$ класс сеток вида (1) со свойством *локальной квазиравномерности* (подробнее о таких сетках см. [9]):

$$K_0^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \leqslant K_0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

и положим $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} (x_{j+1} - x_j)$.

Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^{m+1}$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$.

Если цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}$ полная, то из условий

$$\begin{gathered} \sum_{j'\in J_k} \mathbf{a}_{j'}\, \omega_{j'}(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t)\, \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}),\ \forall\, k \in \mathbb{Z}, \\ \omega_j(t) \equiv 0 \qquad \forall\, t \notin S_j \cap M \end{gathered} \tag{2}$$

однозначно определяются функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $\operatorname{supp} \omega_j(t) \subset S_j$.

По формулам Крамера из системы линейных алгебраических уравнений (2) находим

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k, j'\neq j} \ \ \|\ \ '^j\, \boldsymbol{\varphi}(t)\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_{k-m}, \mathbf{a}_{k-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k\Big)} \qquad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}),\ \ \forall\, j \in J_k, \tag{3}$$

где символьная запись $\ \|\ '^j$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $\mathbf{a}_j$ на столбец $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов).

Линейная оболочка функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ называется *пространством минимальных* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов порядка* m на сетке X и обозначается через

$$\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\, \omega_j \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Условия (2) называются *аппроксимационными соотношениями*, вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей* для $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$-сплайнов.

В дальнейшем для вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^S(\alpha, \beta)$ положим

$$\boldsymbol{\varphi}_k \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}(x_k), \qquad \boldsymbol{\varphi}_k^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(x_k), \quad i = 0, 1, \ldots, S, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$, определяемую тождеством

$$\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{m-1})\, \mathbf{z} \equiv \det\bigl(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{m-1}, \mathbf{z}\bigr) \tag{4}$$

для всех $\mathbf{z}, \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{m-1} \in \mathbb{R}^{m+1}$. Вектор-функцию $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{m-1})$ называют (подробнее см. [10]) *m-местным векторным произведением* в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ и обозначают через $\mathbf{z}_0 \times \mathbf{z}_1 \times \ldots \times \mathbf{z}_{m-1}$.

При $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^{m-1}(\alpha, \beta)$ рассмотрим векторы, определяемые формулой

$$\mathbf{d}_j \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_j \times \boldsymbol{\varphi}'_j \times \ldots \times \boldsymbol{\varphi}_j^{(m-1)}. \tag{5}$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^m(\alpha, \beta)$. Введем следующее обозначение для вронскиана

$$W(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det\Bigl(\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\varphi}'(t), \ldots, \boldsymbol{\varphi}^{(m-1)}(t), \boldsymbol{\varphi}^{(m)}(t)\Bigr).$$

Определим цепочку векторов $\mathbf{A}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j^*\}$ формулой

$$\mathbf{a}_j^* \stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{d}_{j+1} \times \mathbf{d}_{j+2} \times \ldots \times \mathbf{d}_{j+m}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^m(\alpha, \beta)$. Если выполнено условие*

$$|W(t)| \geqslant c = \mathrm{const} > 0 \qquad \forall\, t \in (\alpha, \beta) \tag{7}$$

и сетка $X \in \mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$ для некоторого $K_0 \geqslant 1$, то при достаточно малом h_X пространство $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi})$ лежит в пространстве $C^{m-1}(\alpha, \beta)$.

Доказательство см. в работе [11]. □

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 цепочка векторов $\{\mathbf{d}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ является полной, при этом справедливы соотношения*

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^* \neq 0, \qquad \mathbf{d}_{j+m+1}^T \mathbf{a}_j^* \neq 0.$$

Пространство $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi})$ называется *пространством минимальных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов порядка m* на сетке X. Сами сплайны будем называть *минимальными сплайнами максимальной гладкости.*

Пусть $m = 2$. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^3$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$. При $p = 1, 2$, благодаря свойствам m-местного векторного произведения, справедливы соотношения

$$\mathbf{d}_{j+p}^T\, \mathbf{a}_j^* = 0 \qquad \forall\, p = 1, 2, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Теорема 2. *Если $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^2(\alpha, \beta)$ и выполнено условие* (7), *то $\omega_j(t) \in C^1(\alpha, \beta)$ и справедливы формулы*

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^*}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\[2ex] \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^*} - \dfrac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^*}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^*} \dfrac{\mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^*}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\[2ex] \dfrac{\mathbf{d}_{j+3}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^*}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство равенства (9) получается подстановкой доказываемых формул в аппроксимационные соотношения (2) с использованием определения векторов $\mathbf{d}_j$ и $\mathbf{a}_j^*$ (см. (5) и (6)). Непрерывность функции $\omega_j(t)$ и ее первой производной проверяется в узлах x_{j+i}, $i = 0, 1, 2, 3$, непосредственным применением доказываемых формул. В остальных точках интервала (α, β) их непрерывность очевидна. □

Теорема 3. *Пусть* $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 \equiv 1$ *для всех* $t \in (\alpha, \beta)$. *Если цепочку векторов* $\mathbf{A}^N \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j^N\}$ *определить формулой*

$$\mathbf{a}_j^N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{d}_{j+1} \times \mathbf{d}_{j+2}}{[\mathbf{d}_{j+1} \times \mathbf{d}_{j+2}]_0}, \tag{10}$$

то справедливо тождество

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega_j(t) \equiv 1 \quad \forall\, t \in (\alpha, \beta).$$

Доказательство равенства получается рассмотрением аппроксимационных соотношений (2) с вектором $\mathbf{a}_j^N$ в покомпонентном виде. $\square$

Пространство $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^N, \boldsymbol{\varphi})$ называется *пространством нормализованных* $B_{\boldsymbol{\varphi}}$*-сплайнов второго порядка* на сетке X.

Рассмотрим конечномерные пространства сплайнов, получаемых для $m = 2$. Введем обозначения

$$a \stackrel{\text{def}}{=} x_0, \quad b \stackrel{\text{def}}{=} x_n, \quad J_{2,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{-2, \ldots, n-1, n\}.$$

Из бесконечной сетки X выделим конечную сетку $X_n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$:

$$X_n : x_{-2} < \ldots < a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b < \ldots < x_{n+2};$$

из полной бесконечной цепочки $\mathbf{A}^* \in \mathbb{A}$ выделим конечную цепочку $\mathbf{A}_n^*$:

$$\mathbf{A}_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_{-3}^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}.$$

Для измеримого по Лебегу множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^1$ обозначим через $\operatorname{mes}(\mathcal{M})$ его лебегову меру.

Пусть система $\{f_j\}$ состоит из функций $f_j(t)$, заданных почти везде на интервале (α, β), и $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. Система функций $\{f_j \mid \operatorname{mes}\, (\operatorname{supp} f_j \cap (a, b)) > 0\}$ называется *сужением* системы $\{f_j\}$ на отрезок $[a, b]$.

Сузим все функции пространства $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi})$ на множество $[a, b]$. Совокупность этих сужений представляет собой конечномерное линейное пространство

$$\mathbb{S}(X_n, \mathbf{A}_n^*, \boldsymbol{\varphi}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_{j \in J_{2,n-1}} c_j\, \omega_j \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Очевидно, что

$$\mathbb{S}(X_n, \mathbf{A}_n^*, \boldsymbol{\varphi}) \subset C^1[a, b].$$

Теорема 4. *Функция* $u_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in J_{2,n-1}} c_j\, \omega_j(t)$, $t \in [a, b]$, *является следом функции* $u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j\, \omega_j(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, *на отрезке* $[a, b]$, *лежит в пространстве* $\mathbb{S}(X_n, \mathbf{A}_n^*, \boldsymbol{\varphi})$ *и полностью определяется набором узлов* $\{x_j\}_{j \in J_{2,n+2}}$, *набором векторов* $\{\boldsymbol{\varphi}_j^{(S)}\}_{j \in J_{2,n+2}}$, $S = 0, 1$, *и набором коэффициентов* $\{c_j\}_{j \in J_{2,n-1}}$.

Доказательство следует непосредственно из определений пространств $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi})$ и $\mathbb{S}(X_n, \mathbf{A}_n^*, \boldsymbol{\varphi})$. $\square$

Следствие 2. *Сужения функций* ω_j *образуют линейно независимую систему на отрезке* $[a, b]$, *причем* $\dim \mathbb{S}(X_n, \mathbf{A}_n^*, \boldsymbol{\varphi}) = n + 2$.

4. Примеры нормализованных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов второго порядка. Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, t, t^2)^T$. Тогда вронскиан $W(t) = 2$. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Для всех $j \in \mathbb{Z}$ по формуле (5) находим вектор $\mathbf{d}_j = (x_j^2, -2\, x_j, 1)^T$, откуда на основании (10) получаем вектор $\mathbf{a}_j^N = \left(1, \dfrac{x_{j+1} + x_{j+2}}{2}, x_{j+1} x_{j+2}\right)^T$. Теперь легко выводим равенства

$$\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t) = (t - x_j)^2, \qquad \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_k^N = (x_j - x_{k+1})(x_j - x_{k+2}) \quad \forall\, j, k \in \mathbb{Z}.$$

Из упомянутых выше равенств и формулы (9) вытекает следующее представление *полиномиального сплайна*, который обозначим через ω_j^B :

$$\omega_j^B(t) = \frac{(t - x_j)^2}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j^B(t) = \Big((x_j + x_{j+1} - x_{j+2} - x_{j+3})\, t^2 - 2(x_j x_{j+1} - x_{j+2} x_{j+3})\, t +$$
$$+ x_j x_{j+1} x_{j+2} + x_j x_{j+1} x_{j+3} - x_j x_{j+2} x_{j+3} - x_{j+1} x_{j+2} x_{j+3} \Big) \times$$
$$\times (x_{j+2} - x_j)^{-1} (x_{j+2} - x_{j+1})^{-1} (x_{j+3} - x_{j+1})^{-1}, \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),$$
$$\omega_j^B(t) = \frac{(t - x_{j+3})^2}{(x_{j+3} - x_{j+1})\,(x_{j+3} - x_{j+2})}, \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}).$$

Заметим, что функции ω_j^B совпадают с известными полиномиальными B-сплайнами второй степени.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, \sin t, \cos t)^T$. Тогда вронскиан $W(t) = -1$. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Для всех $j \in \mathbb{Z}$ по формуле (5) находим вектор $\mathbf{d}_j = (-1, \sin x_j, \cos x_j)^T$, откуда, используя представление (10), получаем вектор $\mathbf{a}_j^N = \left(1, \dfrac{\sin \frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}}{\cos \frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}}, \dfrac{\cos \frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}}{\cos \frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}}\right)^T$. Теперь выводим равенства

$$\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t) = -2\,\sin^2\left(\frac{x_j - t}{2}\right), \qquad \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_k^N = -\frac{2\,\sin\frac{x_j - x_{k+1}}{2}\,\sin\frac{x_j - x_{k+2}}{2}}{\cos\frac{x_{k+1}-x_{k+2}}{2}} \quad \forall\, j, k \in \mathbb{Z}.$$

Из упомянутых выше равенств и формулы (9) вытекает следующее представление *тригонометрического сплайна*, который обозначим через ω_j^{trig} :

$$\omega_j^{\text{trig}}(t) = \frac{\cos\frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}\,\sin^2\left(\frac{x_j - t}{2}\right)}{\sin\frac{x_j - x_{j+1}}{2}\,\sin\frac{x_j - x_{j+2}}{2}}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j^{\text{trig}}(t) = \frac{\cos\frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}}{\sin\frac{x_j - x_{j+1}}{2}} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{x_j - t}{2}\right)}{\sin\frac{x_j - x_{j+2}}{2}} - \frac{\sin\frac{x_j - x_{j+3}}{2}\,\sin^2\left(\frac{x_{j+1} - t}{2}\right)}{\sin\frac{x_{j+1}-x_{j+3}}{2}\,\sin\frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}} \right), \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j^{\text{trig}}(t) = \frac{\cos\frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}\,\sin^2\left(\frac{x_{j+3} - t}{2}\right)}{\sin\frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2}\,\sin\frac{x_{j+3} - x_{j+2}}{2}}, \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}).$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)^T$. Тогда вронскиан $W(t) = 1$. Это означает, что для достаточно мелкой сетки из фиксированного класса локально квазиравномерных сеток $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайны существуют. Для всех $j \in \mathbb{Z}$ по формуле (5) находим вектор $\mathbf{d}_j = (-1, -\operatorname{sh} x_j, \operatorname{ch} x_j)^T$, откуда, используя представление (10), получаем вектор $\mathbf{a}_j^N = \left(1, \dfrac{\operatorname{sh} \frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}}, \dfrac{\operatorname{ch} \frac{x_{j+1}+x_{j+2}}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}}\right)^T$. Теперь выводим равенства

$$\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t) = 2\,\operatorname{sh}^2\left(\frac{x_j - t}{2}\right), \qquad \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_k^N = \frac{2\,\operatorname{sh}\frac{x_j - x_{k+1}}{2}\,\operatorname{sh}\frac{x_j - x_{k+2}}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x_{k+1}-x_{k+2}}{2}} \quad \forall\, j, k \in \mathbb{Z}.$$

Из упомянутых выше равенств и формулы (9) вытекает следующее представление *гиперболического сплайна*, который обозначим через ω_j^{hyp} :

$$\omega_j^{\text{hyp}}(t) = \frac{\operatorname{ch}\frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}\,\operatorname{sh}^2\left(\frac{x_j - t}{2}\right)}{\operatorname{sh}\frac{x_j - x_{j+1}}{2}\,\operatorname{sh}\frac{x_j - x_{j+2}}{2}}, \quad t \in [x_j, x_{j+1}),$$

$$\omega_j^{\text{hyp}}(t) = \frac{\operatorname{ch}\frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x_j - x_{j+1}}{2}} \left(\frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{x_j - t}{2}\right)}{\operatorname{sh}\frac{x_j - x_{j+2}}{2}} - \frac{\operatorname{sh}\frac{x_j - x_{j+3}}{2}\,\operatorname{sh}^2\left(\frac{x_{j+1} - t}{2}\right)}{\operatorname{sh}\frac{x_{j+1}-x_{j+3}}{2}\,\operatorname{sh}\frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}} \right), \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),$$

$$\omega_j^{\text{hyp}}(t) = \frac{\operatorname{ch}\frac{x_{j+1}-x_{j+2}}{2}\,\operatorname{sh}^2\left(\frac{x_{j+3} - t}{2}\right)}{\operatorname{sh}\frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2}\,\operatorname{sh}\frac{x_{j+3} - x_{j+2}}{2}}, \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}).$$

5. Калибровочные соотношения. Рассмотрим случай, когда исходная сетка X дополняется новым узлом $\overline{\xi}$ и на полученной таким образом *измельченной сетке* $\overline{X}$ строятся сплайны $\overline{\omega}_j(t),\ j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\overline{\xi} \in (x_k, x_{k+1})$, а $\overline{x}_j$ — узлы вновь полученной сетки $\overline{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{x}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$:

$$\overline{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_j & \text{при} \quad j \leqslant k, \\ \overline{\xi} & \text{при} \quad j = k+1, \\ x_{j-1} & \text{при} \quad j \geqslant k+2. \end{cases} \tag{11}$$

Будем надчеркивать обозначения всех ранее введенных объектов, определяемых новой сеткой $\overline{X}$. Функции $\overline{\omega}_j(t)$ можно отыскать по формуле (9), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы $\overline{x}_j,\ j \in \mathbb{Z}$.

Нетрудно видеть, что

$$\overline{\mathbf{d}}_j = \mathbf{d}_j \quad \text{при } \ j \leqslant k, \qquad \overline{\mathbf{d}}_j = \overline{\mathbf{d}}_{j-1} \quad \text{при } \ j \geqslant k+2. \tag{12}$$

Из формул (5), (6) и (12) получаем

$$\overline{\mathbf{a}}^*_j = \mathbf{a}^*_j \quad \text{при } \ j \leqslant k-2, \qquad \overline{\mathbf{a}}^*_j = \mathbf{a}^*_{j-1} \quad \text{при } \ j \geqslant k+1. \tag{13}$$

Очевидно, что для $t \in (\alpha, \beta)$ верны тождества

$$\begin{aligned} &\omega_j(t) \equiv \overline{\omega}_j(t) && \text{при } \ j \leqslant k-3, \\ &\omega_j(t) \equiv \overline{\omega}_{j+1}(t) && \text{при } \ j \geqslant k+1. \end{aligned} \tag{14}$$

Ниже будет показано, что формулы (14) можно дополнить следующими представлениями функций ω_{k-2}, ω_{k-1} и ω_k через функции $\overline{\omega}_j$:

$$\omega_{k-2}(t) \equiv \overline{\mathfrak{p}}_{k-2,k-2}\overline{\omega}_{k-2}(t) + \overline{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1}\overline{\omega}_{k-1}(t), \tag{15}$$

$$\omega_{k-1}(t) \equiv \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1}\overline{\omega}_{k-1}(t) + \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\overline{\omega}_{k}(t), \tag{16}$$

$$\omega_{k}(t) \equiv \overline{\mathfrak{p}}_{k,k}\overline{\omega}_{k}(t) + \overline{\mathfrak{p}}_{k,k+1}\overline{\omega}_{k+1}(t), \tag{17}$$

где $\overline{\mathfrak{p}}_{i,j} \in \mathbb{R}^1$. Тождества (14)–(17) называются *калибровочными соотношениями.*

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$\omega_k(t) \equiv \frac{\overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}^*_k}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}^*_k}\, \overline{\omega}_k(t) + \overline{\omega}_{k+1}(t), \qquad t \in (\alpha, \beta). \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательно представление функции $\omega_k(t)$ на промежутках $(x_k, \overline{\xi})$, $(\overline{\xi}, x_{k+1})$, (x_{k+1}, x_{k+2}) и (x_{k+2}, x_{k+3}).

1. Записывая аппроксимационные соотношения (2) при $t \in (x_k, \overline{\xi}) = (\overline{x}_k, \overline{x}_{k+1})$ для функций $\omega_j(t)$ и $\overline{\omega}_{j'}(t)$ (на сетках X и $\overline{X}$ соответственно), находим

$$\mathbf{a}^*_{k-2}\, \omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}^*_{k-1}\, \omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}^*_k\, \omega_k(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t),$$

$$\overline{\mathbf{a}}^*_{k-2}\, \overline{\omega}_{k-2}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k-1}\, \overline{\omega}_{k-1}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_k\, \overline{\omega}_k(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t);$$

отсюда для всех $t \in (x_k, \overline{\xi})$ получаем тождество

$$\mathbf{a}^*_{k-2}\, \omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}^*_{k-1}\, \omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}^*_k\, \omega_k(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}^*_{k-2}\, \overline{\omega}_{k-2}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k-1}\, \overline{\omega}_{k-1}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_k\, \overline{\omega}_k(t). \tag{19}$$

Примем во внимание, что ввиду свойства (12) верно равенство $\mathbf{d}_k^T = \overline{\mathbf{d}}_k^T$ и что из соотношения (8) вытекают равенства

$$\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}^*_{k-2} = \mathbf{d}_k^T \mathbf{a}^*_{k-1} = \overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}^*_{k-2} = \overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}^*_{k-1} = 0.$$

Обе части соотношения (19) умножим слева на вектор-строку $\mathbf{d}_k^T$; в результате получим тождество

$$\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}^*_k\, \omega_k(t) \equiv \overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}^*_k\, \overline{\omega}_k(t) \qquad \forall\, t \in (x_k, \overline{\xi}). \tag{20}$$

На промежутке $(x_k, \overline{\xi})$ функция $\overline{\omega}_{k+1}(t)$ равна нулю, а поэтому в условиях леммы соотношение (20) совпадает с (18), так что для рассматриваемых t тождество (18) доказано.

2. Записывая аппроксимационные соотношения при $t \in (\overline{\xi}, x_{k+1}) = (\overline{x}_{k+1}, \overline{x}_{k+2})$ для функций $\omega_j(t)$ и $\overline{\omega}_{j'}(t)$, аналогично предыдущему получаем тождество

$$\mathbf{a}^*_{k-2}\,\omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}^*_{k-1}\,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}^*_k\,\omega_k(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}^*_{k-1}\,\overline{\omega}_{k-1}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_k\,\overline{\omega}_k(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k+1}\,\overline{\omega}_{k+1}(t). \tag{21}$$

После умножения (21) на вектор-строку $\mathbf{d}^T_k$ слева получаем тождество

$$\mathbf{d}^T_k\mathbf{a}^*_k\,\omega_k(t) \equiv \overline{\mathbf{d}}^T_k\overline{\mathbf{a}}^*_k\,\overline{\omega}_k(t) + \overline{\mathbf{d}}^T_k\,\overline{\mathbf{a}}^*_{k+1}\,\overline{\omega}_{k+1}(t). \tag{22}$$

Благодаря формулам (12) и (13) видим, что $\overline{\mathbf{d}}^T_k\overline{\mathbf{a}}^*_{k+1} = \mathbf{d}^T_k\mathbf{a}^*_k$, и потому из (22) выводим (18).

3. При $t \in (x_{k+1}, x_{k+2}) = (\overline{x}_{k+2}, \overline{x}_{k+3})$ имеем

$$\mathbf{a}^*_{k-1}\,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}^*_k\,\omega_k(t) + \mathbf{a}^*_{k+1}\,\omega_{k+1}(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}^*_k\,\overline{\omega}_k(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k+1}\,\overline{\omega}_{k+1}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k+2}\,\overline{\omega}_{k+2}(t). \tag{23}$$

Согласно свойствам (13) и (14) последнее слагаемое левой части тождества (23) равно последнему слагаемому в правой части этого тождества, $\mathbf{a}^*_{k+1}\,\omega_{k+1}(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}^*_{k+2}\,\overline{\omega}_{k+2}(t)$, и потому (23) принимает вид

$$\mathbf{a}^*_{k-1}\,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}^*_k\,\omega_k(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}^*_k\,\overline{\omega}_k(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k+1}\,\overline{\omega}_{k+1}(t). \tag{24}$$

Умножая (24) слева на вектор-строку $\mathbf{d}^T_k$ и учитывая равенства $\overline{\mathbf{d}}^T_k\overline{\mathbf{a}}^*_{k-1} = 0$ и $\overline{\mathbf{d}}^T_k\overline{\mathbf{a}}^*_{k+1} = \mathbf{d}^T_k\mathbf{a}^*_k$, получаем соотношение (18).

4. При $t \in (x_{k+2}, x_{k+3}) = (\overline{x}_{k+3}, \overline{x}_{k+4})$ имеем

$$\mathbf{a}^*_k\,\omega_k(t) + \mathbf{a}^*_{k+1}\,\omega_{k+1}(t) + \mathbf{a}^*_{k+2}\,\omega_{k+2}(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}^*_{k+1}\,\overline{\omega}_{k+1}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k+2}\,\overline{\omega}_{k+2}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k+3}\,\overline{\omega}_{k+3}(t). \tag{25}$$

Благодаря свойствам (13) и (14) последние два слагаемых левой части соотношения (25) совпадают с последними двумя слагаемыми правой части. Умножая обе части полученного равенства на вектор-строку $\mathbf{d}^T_k$ слева, получаем тождество (18), ибо при рассматриваемых t функция $\overline{\omega}_k(t)$ тождественно равна нулю.

Итак, соотношение (18) установлено для всех рассматриваемых промежутков; учитывая, что функции ω_k лежат в пространстве $C^1(\alpha, \beta)$, приходим к выводу, что соотношение (18) справедливо на интервале (α, β). Лемма доказана. □

Лемма 2. *Справедливо тождество*

$$\mathbf{d}^T_{k-1}\mathbf{a}^*_{k-1}\omega_{k-1}(t) \equiv \overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}\overline{\mathbf{a}}^*_{k-1}\,\overline{\omega}_{k-1}(t) + \left(\overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}\overline{\mathbf{a}}^*_k - \mathbf{d}^T_{k-1}\mathbf{a}^*_k\,\frac{\overline{\mathbf{d}}^T_k\,\overline{\mathbf{a}}^*_k}{\mathbf{d}^T_k\,\mathbf{a}^*_k}\right)\overline{\omega}_k(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{26}$$

Доказательство. Рассмотрим представление функции $\omega_{k-1}(t)$ на промежутках (x_{k-1}, x_k), $(x_k, \overline{\xi})$, $(\overline{\xi}, x_{k+1})$ и (x_{k+1}, x_{k+2}).

1. Записывая аппроксимационные соотношения (2) при $t \in (x_{k-1}, x_k) = (\overline{x}_{k-1}, \overline{x}_k)$ для функций $\omega_j(t)$ и $\overline{\omega}_{j'}(t)$, аналогично доказательству предыдущей леммы находим

$$\mathbf{a}^*_{k-3}\,\omega_{k-3}(t) + \mathbf{a}^*_{k-2}\,\omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}^*_{k-1}\,\omega_{k-1}(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}^*_{k-3}\,\overline{\omega}_{k-3}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k-2}\,\overline{\omega}_{k-2}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k-1}\,\overline{\omega}_{k-1}(t). \tag{27}$$

Обе части тождества (27) умножим слева на вектор-строку $\mathbf{d}^T_{k-1}$ и примем во внимание равенство $\mathbf{d}^T_{k-1} = \overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}$, а также соотношения

$$\mathbf{d}^T_{k-1}\mathbf{a}^*_{k-2} = \mathbf{d}^T_{k-1}\mathbf{a}^*_{k-3} = \overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}\overline{\mathbf{a}}^*_{k-2} = \overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}\overline{\mathbf{a}}^*_{k-3} = 0. \tag{28}$$

В результате получим тождество $\mathbf{d}^T_{k-1}\mathbf{a}^*_{k-1}\,\omega_{k-1}(t) \equiv \overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}\overline{\mathbf{a}}^*_{k-1}\,\overline{\omega}_{k-1}(t)$, фактически совпадающее с тождеством (26) на рассматриваемом промежутке, ибо на нем $\overline{\omega}_k(t) \equiv 0$.

2. Из аппроксимационных соотношений при $t \in (x_k, \overline{\xi}) = (\overline{x}_k, \overline{x}_{k+1})$ находим

$$\mathbf{a}^*_{k-2}\,\omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}^*_{k-1}\,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}^*_k\,\omega_k(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}^*_{k-2}\,\overline{\omega}_{k-2}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_{k-1}\,\overline{\omega}_{k-1}(t) + \overline{\mathbf{a}}^*_k\,\overline{\omega}_k(t),$$

откуда, умножая слева на вектор-строку $\mathbf{d}_{k-1}^T$ и используя (28), находим

$$\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^* \,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_k^* \,\omega_k(t) \equiv \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{a}}_{k-1}^* \,\overline{\omega}_{k-1}(t) + \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{a}}_k^* \,\overline{\omega}_k(t).$$

Перенося второе слагаемое левой части последнего тождества в правую часть и используя соотношение (20), приходим к тождеству (26).

3. При $t \in (\overline{\xi}, x_{k+1}) = (\overline{x}_{k+1}, \overline{x}_{k+2})$ из аппроксимационных соотношений имеем

$$\mathbf{a}_{k-2}^* \,\omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}_{k-1}^* \,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k^* \,\omega_k(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}_{k-1}^* \,\overline{\omega}_{k-1}(t) + \overline{\mathbf{a}}_k^* \,\overline{\omega}_k(t) + \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^* \,\overline{\omega}_{k+1}(t).$$

Если сюда подставить $\omega_k(t)$ из тождества (18) и полученный результат умножить на вектор-строку $\mathbf{d}_{k-1}^T$ слева, то с учетом формул (28) выводим соотношение

$$\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^* \,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_k^* \left(\frac{\overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}_k^*}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k^*} \,\overline{\omega}_k(t) + \overline{\omega}_{k+1}(t) \right) \equiv$$

$$\equiv \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{a}}_{k-1}^* \,\overline{\omega}_{k-1}(t) + \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{a}}_k^* \,\overline{\omega}_k(t) + \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^* \,\overline{\omega}_{k+1}(t), \tag{29}$$

откуда в силу равенства $\mathbf{a}_k^* = \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^*$ после элементарных преобразований получаем тождество (26).

4. Теперь рассмотрим случай $t \in (x_{k+1}, x_{k+2}) = (\overline{x}_{k+2}, \overline{x}_{k+3})$; из аппроксимационных соотношений получаем

$$\mathbf{a}_{k-1}^* \,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k^* \,\omega_k(t) + \mathbf{a}_{k+1}^* \,\omega_{k+1}(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}_k^* \,\overline{\omega}_k(t) + \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^* \,\overline{\omega}_{k+1}(t) + \overline{\mathbf{a}}_{k+2}^* \,\overline{\omega}_{k+2}(t). \tag{30}$$

Из равенств $\mathbf{a}_{k+1}^* = \overline{\mathbf{a}}_{k+2}^*$, $\omega_{k+1}(t) \equiv \overline{\omega}_{k+2}(t)$, вытекающих из свойств (13) и (14) соответственно, видно, что последнее слагаемое левой части тождества (30) и последнее слагаемое его правой части совпадают; таким образом, из (30) имеем

$$\mathbf{a}_{k-1}^* \,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k^* \,\omega_k(t) \equiv \overline{\mathbf{a}}_k^* \,\overline{\omega}_k(t) + \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^* \,\overline{\omega}_{k+1}(t). \tag{31}$$

После подстановки ω_k из (18) в тождество (31) и умножения на вектор-строку $\mathbf{d}_{k-1}^T$ приходим к тождеству (29), которое эквивалентно соотношению (26) (рассматриваемому теперь на промежутке (x_{k+1}, x_{k+2})).

Принимая во внимание то, что функции $\omega_{k-1} \in C^1(\alpha, \beta)$, видим, что лемма полностью доказана. □

Калибровочные соотношения для функции $\omega_{k-2}(t)$ получим с помощью леммы 1. Рассмотрим отображение $\chi : t \mapsto -t$ и введем обозначения

$$\alpha_\chi \overset{\text{def}}{=} \chi(\beta),\ \beta_\chi \overset{\text{def}}{=} \chi(\alpha),\ \ x_{(j)} = \chi(x_{-j+2k+1}),\ \overline{x}_{(j)} = \chi(\overline{x}_{-j+2k+2}). \tag{32}$$

Ввиду соотношений (1) для всех $j \in \mathbb{Z}$ получаем

$$\lim_{j\to-\infty} x_{(j)} = \alpha_\chi,\ \lim_{j\to+\infty} x_{(j)} = \beta_\chi, x_{(j)} < x_{(j+1)},$$
$$\lim_{j\to-\infty} \overline{x}_{(j)} = \alpha_\chi,\ \lim_{j\to+\infty} \overline{x}_{(j)} = \beta_\chi, \overline{x}_{(j)} < \overline{x}_{(j+1)}.$$

Кроме того, благодаря обозначениям (32) имеем $x_{(k)} = \chi(x_{k+1})$, $x_{(k+1)} = \chi(x_k)$, $\overline{x}_{(k+1)} = \chi(\overline{x}_{k+1}) = \chi(\overline{\xi})$.

Ясно, что множества $X_\# \overset{\text{def}}{=} \{x_{(j)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\overline{X}_\# \overset{\text{def}}{=} \{\overline{x}_{(j)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ представляют собой сетки вида (1) на интервале $(\alpha_\chi, \beta_\chi)$, причем вторая получена из первой добавлением узла $\overline{\xi}_\chi \overset{\text{def}}{=} \overline{x}_{(k+1)}$ в интервал $(x_{(k)}, x_{(k+1)})$.

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{\varphi}_\chi(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}(-t)$ и введем обозначения

$$\boldsymbol{\varphi}_{\chi\,(j)} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_\chi(x_{(j)}), \quad \boldsymbol{\varphi}'_{\chi\,(j)} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}'_\chi(x_{(j)}),$$

$$\overline{\boldsymbol{\varphi}}_{\chi\,(j)} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_\chi(\overline{x}_{(j)}), \quad \overline{\boldsymbol{\varphi}}'_{\chi\,(j)} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}'_\chi(\overline{x}_{(j)}).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{\varphi}}_{\chi\,(j)} &= \boldsymbol{\varphi}_\chi(\chi(\overline{x}_{-j+2k+2})) = \overline{\boldsymbol{\varphi}}_{-j+2k+2}, \\ \overline{\boldsymbol{\varphi}}'_{\chi\,(j)} &= \boldsymbol{\varphi}'_\chi(\chi(\overline{x}_{-j+2k+2})) = -\overline{\boldsymbol{\varphi}}'_{-j+2k+2}. \end{aligned} \tag{33}$$

Аналогично получаем

$$\boldsymbol{\varphi}_{\chi\,(j)} = \boldsymbol{\varphi}_{-j+2k+1}, \quad \boldsymbol{\varphi}'_{\chi\,(j)} = -\boldsymbol{\varphi}'_{-j+2k+1}. \tag{34}$$

Положим
$$\mathbf{d}_{(j)} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_{\chi\,(j)} \times \boldsymbol{\varphi}'_{\chi\,(j)}, \quad \overline{\mathbf{d}}_{(j)} \overset{\text{def}}{=} \overline{\boldsymbol{\varphi}}_{\chi\,(j)} \times \overline{\boldsymbol{\varphi}}'_{\chi\,(j)}.$$
Благодаря соотношениям (33)–(34) имеем
$$\mathbf{d}^T_{(j)} = -\mathbf{d}^T_{-j+2k+1}, \quad \overline{\mathbf{d}}^T_{(j)} = -\overline{\mathbf{d}}^T_{-j+2k+2}. \tag{35}$$

Для сеток $X_\#$ и $\overline{X}_\#$ рассмотрим две системы векторов
$$\mathbf{a}^*_{(j)} \overset{\text{def}}{=} -\mathbf{d}_{(j+1)} \times \mathbf{d}_{(j+2)}, \quad \overline{\mathbf{a}}^*_{(j)} \overset{\text{def}}{=} -\overline{\mathbf{d}}_{(j+1)} \times \overline{\mathbf{d}}_{(j+2)}.$$

Используя соотношения (35) и свойство антисимметричности m-местного векторного произведения, получаем следующую цепочку равенств
$$\overline{\mathbf{a}}^*_{(j)} = -\overline{\mathbf{d}}_{(j+1)} \times \overline{\mathbf{d}}_{(j+2)} = -\overline{\mathbf{d}}_{-j+2k+1} \times \overline{\mathbf{d}}_{-j+2k} = \overline{\mathbf{d}}_{-j+2k} \times \overline{\mathbf{d}}_{-j+2k+1} = -\overline{\mathbf{a}}^*_{-j+2k-1}. \tag{36}$$

Аналогичным образом последовательно получаем
$$\mathbf{a}^*_{(j)} = \mathbf{a}^*_{-j+2k-2}. \tag{37}$$

Лемма 3. *Имеет место соотношение*
$$\omega_{k-2}(t) \equiv \overline{\omega}_{k-2}(t) + \frac{\overline{\mathbf{d}}^T_{k+2}\overline{\mathbf{a}}^*_{k-1}}{\overline{\mathbf{d}}^T_{k+2}\mathbf{a}^*_{k-2}}\,\overline{\omega}_{k-1}(t) \qquad \forall\, t \in (\alpha, \beta). \tag{38}$$

Доказательство. Для сеток $X_\#$ и $\overline{X}_\#$ запишем формулу (18), заключая нижние индексы в скобки:
$$\omega_{(k)}(t) \equiv \frac{\overline{\mathbf{d}}^T_{(k)}\overline{\mathbf{a}}^*_{(k)}}{\mathbf{d}^T_{(k)}\mathbf{a}^*_{(k)}}\,\overline{\omega}_{(k)}(t) + \overline{\omega}_{(k+1)}(t) \qquad \forall\, t \in (\alpha_\chi, \beta_\chi).$$
Воспользуемся формулами (35)–(37) и заменим $-t$ на t; в результате придем к формуле (38). Лемма доказана. □

Теорема 5. *Для $j, k \in \mathbb{Z}$ и $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*
$$\omega_j(t) \equiv \begin{cases} \overline{\omega}_j(t), & j \leqslant k-3,\\ \overline{\omega}_{k-2}(t) + \overline{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1}\,\overline{\omega}_{k-1}(t), & j = k-2,\\ \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1}\,\overline{\omega}_{k-1}(t) + \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\,\overline{\omega}_k(t), & j = k-1,\\ \overline{\mathfrak{p}}_{k,k}\,\overline{\omega}_k(t) + \overline{\omega}_{k+1}(t), & j = k,\\ \overline{\omega}_{j+1}(t), & j \geqslant k+1, \end{cases} \tag{39}$$
где
$$\overline{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} = \frac{\overline{\mathbf{d}}^T_{k+2}\overline{\mathbf{a}}^*_{k-1}}{\overline{\mathbf{d}}^T_{k+2}\mathbf{a}^*_{k-2}}, \tag{40}$$
$$\overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} = \frac{\overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}\overline{\mathbf{a}}^*_{k-1}}{\overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}\mathbf{a}^*_{k-1}}, \tag{41}$$
$$\overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \left(\overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}\overline{\mathbf{a}}^*_k - \overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}\overline{\mathbf{a}}^*_{k+1}\,\frac{\overline{\mathbf{d}}^T_k\overline{\mathbf{a}}^*_k}{\overline{\mathbf{d}}^T_k\overline{\mathbf{a}}^*_{k+1}}\right)\Big/\overline{\mathbf{d}}^T_{k-1}\mathbf{a}^*_{k-1}, \tag{42}$$
$$\overline{\mathfrak{p}}_{k,k} = \frac{\overline{\mathbf{d}}^T_k\overline{\mathbf{a}}^*_k}{\overline{\mathbf{d}}^T_k\overline{\mathbf{a}}^*_{k+1}}. \tag{43}$$

Доказательство. Применяя соотношения (12) и (13) к формулам (18), (26) и (38), получаем (40)–(43). Учитывая установленные ранее формулы (14), получаем (39). Другое доказательство, использующее другую терминологию и привлекающее сложные алгебраические тождества, имеется в работе [13]. □

Из исходной сетки X для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$ удалим один узел x_{k+1}, а на полученной таким образом *укрупненной (разреженной) сетке* $\widetilde{X}$ рассмотрим сплайны $\widetilde{\omega}_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\xi \stackrel{\text{def}}{=} x_{k+1}$, а узлы $\widetilde{x}_j$ вновь полученной сетки имеют вид $\widetilde{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{x}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$:

$$\widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_j & \text{при } j \leqslant k, \\ x_{j+1} & \text{при } j \geqslant k+1. \end{cases} \tag{44}$$

Условимся ставить волну сверху над обозначениями всех ранее введенных объектов, определяемых новой сеткой $\widetilde{X}$. Функции $\widetilde{\omega}_j(t)$ можно отыскать по формуле (9), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы $\widetilde{x}_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Теорема 6. *Для $j, k \in \mathbb{Z}$ и $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \begin{cases} \omega_j(t), & j \leqslant k-3, \\ \omega_{k-2}(t) + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1}\, \omega_{k-1}(t), & j = k-2, \\ \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1}\, \omega_{k-1}(t) + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\, \omega_k(t), & j = k-1, \\ \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k}\, \omega_k(t) + \omega_{k+1}(t), & j = k, \\ \omega_{j+1}(t), & j \geqslant k+1, \end{cases} \tag{45}$$

где

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} = \frac{\mathbf{d}_{k+2}^T \mathbf{a}_{k-1}^*}{\mathbf{d}_{k+2}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}^*}, \tag{46}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} = \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^*}{\mathbf{d}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^*}, \tag{47}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \left(\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_k^* - \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k+1}^* \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k^*}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^*} \right) / \mathbf{d}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^*, \tag{48}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} = \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k^*}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^*}. \tag{49}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы, в котором все объекты, снабженные чертой сверху, следует заменить на соответствующие объекты без черты, а все остальные объекты (у которых изначально не было черты сверху) следует заменить на соответствующие объекты, снабженные волной сверху. Другое доказательство, привлекающее биортогональные системы функционалов, имеется в работе [12]. □

6. Матрицы реконструкции на интервале (α, β)**.** Дадим матричный вариант формулировок теорем 5 и 6. Введем бесконечномерные вектор-столбцы, компонентами которых являются функции $\omega_j(t)$, $\overline{\omega}_j(t)$ и $\widetilde{\omega}_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$\boldsymbol{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \omega_{-2}(t), \omega_{-1}(t), \omega_0(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \ldots)^T,$$

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \overline{\omega}_{-2}(t), \overline{\omega}_{-1}(t), \overline{\omega}_0(t), \overline{\omega}_1(t), \overline{\omega}_2(t), \ldots)^T,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \widetilde{\omega}_{-2}(t), \widetilde{\omega}_{-1}(t), \widetilde{\omega}_0(t), \widetilde{\omega}_1(t), \widetilde{\omega}_2(t), \ldots)^T.$$

Теорема 7. *Справедливы равенства*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \overline{\mathfrak{P}}\, \overline{\boldsymbol{\omega}}(t) \;\Leftrightarrow\; \omega_i(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \overline{\omega}_j(t) \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}, \tag{50}$$

где $\overline{\mathfrak{P}}$ — бесконечная матрица вида $\overline{\mathfrak{P}} \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\mathfrak{p}}_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$, элементы которой задаются равенствами

$$\overline{\mathfrak{p}}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j}, & i \leqslant k-3 \quad \forall j, \\ \delta_{k-2,j}, & i = k-2, \quad j \neq k-1, \\ 0, & i = k-1, \quad j \notin \{k-1, k\}, \\ 0, & i = k, \quad j \notin \{k, k+1\}, \\ \delta_{k+1,j}, & i = k, \quad j \neq k, \\ \delta_{i,j-1}, & i \geqslant k+1 \quad \forall j, \end{cases}$$

а также формулами (40)–(43).

Матрица $\overline{\mathfrak{P}}$ называется *матрицей добавления узла*, или *матрицей измельчающей (уточняющей) реконструкции* на интервале (α, β).

Замечание 1. Матрицу $\overline{\mathfrak{P}}$ можно представить в виде

$$\overline{\mathfrak{P}} \overset{\text{def}}{=} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ k-4 \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \overline{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} & \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathfrak{p}}_{k,k} & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}.$$

Теорема 8. *Справедливы равенства*

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \widetilde{\mathfrak{P}}\, \boldsymbol{\omega}(t) \;\Leftrightarrow\; \widetilde{\omega}_i(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \omega_j(t) \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}, \tag{51}$$

где $\widetilde{\mathfrak{P}}$ — *бесконечная матрица вида* $\widetilde{\mathfrak{P}} \overset{\text{def}}{=} (\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$, *элементы которой задаются равенствами*

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j}, & i \leqslant k-3 \quad \forall j, \\ \delta_{k-2,j}, & i = k-2, \quad j \neq k-1, \\ 0, & i = k-1, \quad j \notin \{k-1, k\}, \\ 0, & i = k, \quad j \notin \{k, k+1\}, \\ \delta_{k+1,j}, & i = k, \quad j \neq k, \\ \delta_{i,j-1}, & i \geqslant k+1 \quad \forall j, \end{cases} \tag{52}$$

а также формулами (46)–(49).

Матрица $\widetilde{\mathfrak{P}}$ называется *матрицей удаления узла*, или *матрицей укрупняющей (разрежающей) реконструкции* на интервале (α, β).

Замечание 2. Матрицу $\widetilde{\mathfrak{P}}$ можно представить в виде

$$\widetilde{\mathfrak{P}} \overset{\text{def}}{=} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ k-4 \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}.$$

7. Матрицы реконструкции на отрезке $[a, b]$**.** Рассмотрим калибровочные соотношения и соответствующие матрицы реконструкции в конечномерном случае, используя введенные ранее сужения всех функций на отрезок $[a, b]$.

Для $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ добавим узел $\overline{\xi} \in (x_k, x_{k+1})$ к сетке X_n; в результате получим измельченную сетку

$$\overline{X}_n: \quad \overline{x}_{-2} < \ldots < a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_{n+1} = b < \ldots < \overline{x}_{n+3},$$

где узлы $\overline{x}_i$, $i = -2, \dots, n+3$, определяются формулами (11). Предполагая, что $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, удалим узел x_{k+1} из сетки X_n; в результате получим укрупненную сетку

$$\widetilde{X}_n: \quad \widetilde{x}_{-2} < \ldots < a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \ldots < \widetilde{x}_{n-1} = b < \ldots < \widetilde{x}_{n+1},$$

где узлы $\widetilde{x}_i$, $i=-2,\dots,n+1$, определяются формулами (44).

Введем конечномерные вектор-функции

$$\boldsymbol{\omega}_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_{-2}(t),\dots,\omega_{n-1}(t))^T, \quad \overline{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\omega}_{-2}(t),\dots,\overline{\omega}_{n}(t))^T, \quad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_{-2}(t),\dots,\widetilde{\omega}_{n-2}(t))^T.$$

Ввиду равенства (50) в конечномерном случае калибровочные соотношения для $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, $t\in[a,b]$ могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{\omega}_{(n)}(t) = \overline{\mathfrak{P}}_n\,\overline{\omega}_{(n)}(t),$$

где $\overline{\mathfrak{P}}_n$ — прямоугольная матрица размеров $(n+2)\times(n+3)$:

$$\overline{\mathfrak{P}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ -2 \\ \dots \\ k-4 \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \dots \\ n-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} -2 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \overline{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} & \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathfrak{p}}_{k,k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Матрица $\overline{\mathfrak{P}}_n$ называется *матрицей измельчающей реконструкции* на отрезке $[a,b]$.

Ввиду равенства (51) в конечномерном случае калибровочные соотношения для $k\in\{0,1,\dots,n-2\}$, $t\in[a,b]$ могут быть записаны в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) = \widetilde{\mathfrak{P}}_n\,\boldsymbol{\omega}_{(n)}(t),$$

где $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ — прямоугольная матрица размеров $(n+1)\times(n+2)$:

$$\widetilde{\mathfrak{P}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ -2 \\ \dots \\ k-4 \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \dots \\ n-2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} -2 & \dots & k-4 & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & \dots & n-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-2,k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1} & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Матрица $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ называется *матрицей укрупняющей реконструкции* на отрезке $[a,b]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kvasov B.I.* GB-splines and their properties // Int. J. Annals of Num. Math. 1996. N 3. 139–149.
2. *Wang G., Chen Q., Zhou M.* NUAT B-spline curves // Computer Aided Geometric Design. 2004. **21**, N 2. 193–205.
3. *Макаров А.А.* Нормализованные тригонометрические сплайны лагранжева типа // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 3. 81–87.
4. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
5. *Макаров А.А.* Один вариант сплайн-вэйвлетного разложения пространств B-сплайнов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2009. Вып. 2. 58–70.
6. *Демьянович Ю.К.* Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения // Докл. РАН. 2005. **401**, № 4. 1–4.
7. *Макаров А.А.* О вэйвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка // Проблемы матем. анализа. Вып. 38. Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская, 2008. 47–60.
8. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Москва; Ижевск: РХД, 2004.
9. *Демьянович Ю.К.* Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994.
10. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. СПб.: Лань, 2005.

11. *Макаров А.А.* О построении сплайнов максимальной гладкости // Проблемы матем. анализа. Вып. 60. Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская, 2011. 25–38.
12. *Демьянович Ю.К., Косогоров О.М.* Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов // Проблемы матем. анализа. Вып. 43. Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская, 2009. 51–67.
13. *Демьянович Ю.К.* Локальный базис всплесков на неравномерной сетке // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2006. **334**. 84–110.

Поступила в редакцию
25.10.2011