УДК 517.3, 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ СУБИЕРАРХИЧЕСКОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

М. Ю. Медведик[1]

Рассмотрено применение субиерархического метода для решения интегральных уравнений. Приведено обоснование субиерархического метода. Представлены численные результаты для задачи дифракции на плоском идеально проводящем экране и задачи дифракции на неоднородном теле в волноводе.

Ключевые слова: субиерархический метод, интегральные уравнения, численные методы, параллельные алгоритмы.

1. Введение. Моделирование процесса дифракции акустических и электромагнитных волн на экранах и телах различной формы играет важную роль во многих областях науки и техники. Классическая постановка таких задач рассматривается для уравнений математической физики, например для уравнений Максвелла или Гельмгольца. Их решение производится, в основном, численными методами на телах сложной геометрической формы, а аналитические решения могут быть найдены только в исключительных случаях, когда тело имеет достаточно простую геометрическую форму (например, параллелепипед, сфера или эллипсоид).

Численные исследования рассматриваемых задач начали развиваться относительно недавно. В основном это связано с появлением достаточно мощных ЭВМ. В настоящее время накоплен обширный материал по численному решению задач дифракции на незамкнутых телах и поверхностях, получены некоторые аналитические решения. Важность аналитических методов заключается в том, что вычисленные с их помощью решения позволяют описывать исследуемые процессы точно. Кроме того, аналитические решения могут быть использованы в качестве тестовых при изучении задач дифракции на рассеивателях более сложной формы.

Проблема эффективного численного решения задач дифракции на телах и тонких экранах (в резонансном диапазоне частот, когда длина волны в пространстве сравнима с размерами тела или экрана) в настоящее время пока не решена, даже с использованием самых мощных современных ЭВМ и вычислительных кластеров.

Большинство математических пакетов, моделирующих поведение решений рассматриваемых задач, используют конечно-разностные методы. Однако данные методы не позволяют решить поставленные задачи в резонансном диапазоне частот. В связи с этим появляется необходимость разработки новых, более эффективных подходов решения поставленных задач на экранах и телах различной конфигурации.

Существует несколько подходов, позволяющих численно решать задачи математической физики. Один из них — это иерархический метод. Основная идея этого метода заключается в добавлении дополнительных базисных функций к уже существующим базисным функциям на некотором этапе решения задачи. В результате получается уточнение приближенного решения за счет совместного использования “старых” базисных функций, для которых элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) уже вычислены, и “новых” базисных функций. Таким образом, можно говорить об уровнях, или иерархиях вычислительного алгоритма. При использовании результатов вычислений на предыдущем уровне достигается экономия вычислительных ресурсов. Другой подход — это адаптивные методы. Для них выбор базисных функций на каждом уровне определяют за счет сравнения погрешности счета между различными, чаще всего соседними уровнями.

В настоящей статье рассмотрен альтернативный метод, позволяющий решать рассматриваемые задачи на экранах и телах сложной формы с использованием результатов, полученных при решении задач на экранах и телах более простой формы. Такой метод можно назвать субиерархическим.

2. Интегральное уравнение. В данной работе рассматривается класс задач электродинамики, электростатики и акустики, берущих начало из уравнений математической физики. Эти задачи сводятся к

[1] Пензенский государственный университет, факультет естественных наук, нанотехнологий и радиоэлектроники, ул. Красная, 40, г. Пенза; доцент, e-mail: _medv@mail.ru

следующему интегральному уравнению, имеющему геометрическую интерпретацию [1, 2]:

$$Au = f. \tag{1}$$

Здесь $A : V \to V'$ — интегральный оператор вида $Au = \iint\limits_{\Omega} G(x,y)u(y)\,dy$, f — правая часть и $G(x,y)$ — ядро интегрального уравнения. Правая часть f уравнения (1) описывает поведение падающей волны (рис. 1).

Сведение решаемых задач к многомерным интегральным уравнениям на поверхностях и телах в классической постановке производится методом поверхностных и объемных сингулярных интегральных уравнений. Полученные интегральные уравнения решаются численными методами. Среди численных методов может использоваться один из проекционных методов, например метод коллокации или метод Галеркина. Полученная после применения проекционного метода система линейных алгебраических уравнений решается *подходящим итерационным методом.*

Описанная выше теория хорошо работает для тел и экранов, имеющих каноническую конфигурацию. В случае трехмерного тела — это куб или прямоугольный параллелепипед, в случае двумерного плоского экрана — это квадрат или прямоугольник. Для фигур подобной формы легко строится расчетная сетка.

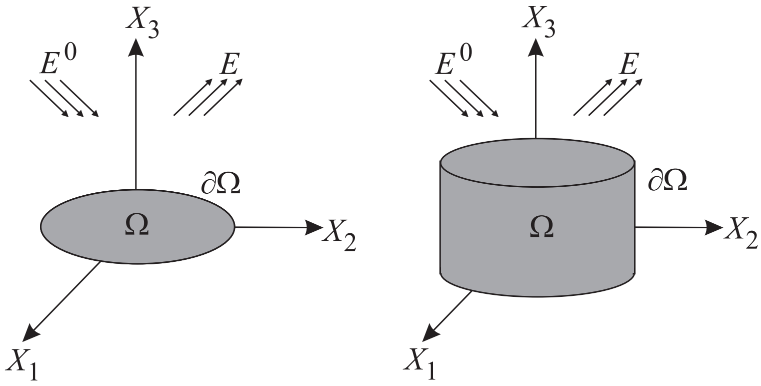


Рис. 1. Дифракция электромагнитной волны на экране и теле Ω

Для решения задачи на телах и экранах сложной формы можно использовать подход, называемый субиерархическим. В нем уже на первом шаге (уровне) один раз наиболее точно решается задача дифракции на теле или экране канонической формы. Далее, используя результаты решения задачи на первом шаге, мы "вырезаем" из него другое тело или экран произвольной формы и, не производя повторных вычислений в матрице СЛАУ, находим решение интегрального уравнения на новом теле или экране сложной формы. Таким образом, можно решить серию задач дифракции на телах и экранах различной формы и, по-существу, создать базу данных для их решения.

Субиерархический метод используется совместно с параллельными вычислительными алгоритмами в связи с большой вычислительной сложностью формирования матрицы СЛАУ на первом этапе. Наиболее удобно рассчитывать подобные задачи на кластере. Предложенный метод позволяет решать задачи дифракции для тел и экранов произвольной формы с использованием результатов решения только одной задачи. Это возможно в том случае, если фигура или экран сложной формы целиком помещается в каноническом теле или экране. Эффект от использования субиерархического метода будет хорошо проявляться при решении большой серии задач [3–16].

Следует отметить, что для увеличения точности решения необходимо снова более точно решать задачу на каноническом теле или экране. При увеличении размеров экрана (в длинах волн) также необходимо пересчитать первоначальную задачу. Однако во многих практических приложениях (например, при проектировании печатных антенн) часто приходится решать большое количество задач дифракции на экранах различной формы, помещающихся в некотором прямоугольнике (на подложке антенны), с некоторой фиксированной точностью. В этом случае построенная база данных оказывается весьма полезной и позволяет решать задачи дифракции на экранах нужной формы уже на персональном компьютере, а не на кластере, который использовался при решении первой задачи на прямоугольном экране.

3. Дискретизация задачи. Рассмотрим n-мерный прямоугольный параллелепипед Π в $\mathbb{R}^n$. Будем называть n-мерный прямоугольный параллелепипед фигурой *канонической формы.* Под фигурой канонической формы в случае поверхностной задачи дифракции будем понимать прямоугольный экран или же прямоугольный параллелепипед для задачи дифракции на теле. Выбранная форма имеет ряд преимуществ, например для нее достаточно просто описать граничные условия и построить сетку. Следует отметить, что в качестве фигуры канонической формы можно выбирать фигуры и другой формы.

Построим *прямоугольную* сетку на фигуре канонической формы Π [17]. Разобьем фигуру канонической формы Π на элементарные ячейки $\bigl\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : k_i h_i < x_i < (k_i + 1)h_i,\ i = 1, 2, \dots, m\bigr\}$, где k_i — целые числа, а $h_i > 0$. Обозначим через $\overline{\Pi}_h$ такое объединение элементарных ячеек (вместе с их границей), что их граница принадлежит $\overline{\Pi} = \Pi \bigcup \partial\Pi$. Пусть $\partial\Pi_h$ — граница области $\overline{\Pi}_h$.

Множество вершин элементарных ячеек, принадлежащих $\overline{\Pi}_h$, обозначим символом $\left\{\overline{\Pi}_h\right\}$ и назовем его *сеткой* для фигуры канонической формы П.

Вершины элементарных ячеек будем называть *узлами сетки*. Множество узлов сетки, принадлежащих П, назовем *внутренними узлами*.

Сетка называется равномерной, если размер элементарных ячеек $h_i = \text{const}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ для всей сетки. В общем случае сетка не обязана быть равномерной, но условие равномерности упрощает работу по построению сетки.

Любая сетка состоит из узлов, элементарных ячеек, ребер и граней. Элементарные ячейки будем называть *конечными элементами*. *Грань* — это одна из сторон элементарной ячейки. Гранью может быть либо $(n-1)$-мерный треугольник, либо $(n-1)$-мерный прямоугольник.

Пересечение двух граней элементарной ячейки является *ребром*. В двумерном случае на прямоугольной сетке ребра могут быть двух типов — горизонтальные и вертикальные.

Количество узлов в прямоугольной сетке равно m^n, где m — количество узлов разбиения по одной стороне, n — размерность фигуры. Количество конечных элементов равно $(m-1)^n$.

Каждому узлу сетки p поставим в соответствие *мультииндекс* $p_{(i1,\dots,in)}$, где каждый индекс отвечает за порядковый номер по соответствующей координате. Координаты узла p_i по каждой из осей x_i можно вычислить по формуле $x_i = a + ih_i$, $i = (1, \dots, n)$, где a — начальная позиция по рассматриваемой координате. Аналогично нумеруются конечные элементы.

Будем рассматривать два вида сеток, состоящих из n-мерных параллелепипедов и из n-мерных тетраэдров. В двумерном случае это прямоугольная и треугольная сетки.

Конечный элемент в форме n-мерного параллелепипеда можно разбить разными способами. Подробное описание триангуляции можно найти в [18].

Следуя схеме проекционного метода, необходимо ввести базисные функции f для аппроксимации решения. Базисные функции определяются на одном или нескольких конечных элементах. Совокупность конечных элементов Π_i, на которых определена базисная функция f, называется *носителем* $\operatorname{supp} f = \bigcup\limits_i \Pi_i$. В пределах носителя $\operatorname{supp} f$ базисная функция является кусочно-непрерывной, за ее пределами равна нулю. Конечные элементы, на которых существует базисная функция, должны иметь общие ребра или грани. Носитель базисной функции должен быть *локальным*, т.е. должно выполняться следующее условие: $\operatorname{mes}(\operatorname{supp} f) \ll \operatorname{mes}(\Pi)$.

В зависимости от типа задачи базисные функции f разделяются на скалярные и векторные. Носителем для скалярных базисных функций является, как правило, один конечный элемент. Однако в большинстве задач подобного типа вводится не один, а несколько типов носителей базисных функций. Совокупность всевозможных типов носителей базисных функций будем называть *шаблоном носителей*.

Для дискретизации интегрального уравнения используем проекционный метод для сведения интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений.

4. Проекционный метод. Рассмотрим приближенное решение линейного операторного уравнения с помощью проектирования его на подпространство, которое будем считать имеющим конечную размерность. Ниже все операторы предполагаются линейными.

Определение. Пусть X и Y — банаховы пространства и $A : X \to Y$ — инъективный оператор. Пусть $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ — две последовательности подпространств с условиями $\dim X_n = \dim Y_n = n$, и пусть $P_n : Y \to Y_n$ — проекционные операторы. Рассмотрим проекционный метод, образованный посредством X_n и P_n, который аппроксимирует уравнение $A\varphi = f$ с помощью приближенного уравнения $P_nA\varphi_n = P_nf$.

Этот проекционный метод называется сходящимся для оператора A, если существует число N, такое, что для каждого $f \in \operatorname{Im} A$ приближенное уравнение $P_nA\varphi = P_nf$ имеет единственное решение $\varphi_n \in X_n$ для всех $n \geqslant N$, и если эти решения сходятся $\varphi_n \to \varphi$ при $n \to \infty$ к единственному решению φ уравнения $A\varphi = f$.

В терминах операторов сходимость проекционного метода означает, что для всех $n \geqslant N$ конечномерные операторы $A_n := P_nA : X_n \to Y_n$ являются обратимыми и что поточечная сходимость $A_n^{-1}P_nA\varphi \to \varphi$, $n \to \infty$, имеет место для всех $\varphi \in X$. Последовательность ограниченных операторов B_n поточечно сходится к ограниченному оператору B, $B_n \to B$, $n \to \infty$, если $\|B_n\varphi - B\varphi\| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $\varphi \in X$.

В общем случае можно ожидать сходимость метода только тогда, когда подпространства X_n предельно плотны в X:

$$\inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\| \to 0, \quad \to \infty \tag{2}$$

для всех $\varphi \in X$. Свойство (2) называют также *свойством аппроксимации* (произвольный элемент из X может быть аппроксимирован элементами из подпространства X_n с любой точностью в норме X). В последующем анализе будем всегда предполагать, что это условие выполняется.

Поскольку $A_n = P_n A$ — это оператор, действующий в конечномерных пространствах, применение проекционного метода сводится к решению конечномерной системы линейных алгебраических уравнений. Ниже метод Галеркина будет рассматриваться как проекционный метод, полученный с помощью ортогонального проектора.

Первоначально приведем общий результат о сходимости проекционного метода и дадим соответствующую оценку для погрешности метода.

Утверждение [19]. *Проекционный метод сходится тогда и только тогда, когда существует число N и положительная константа M, такие, что для всех $n \geqslant N$ конечномерные операторы*

$$A_n : P_n A : X_n \to Y_n$$

обратимы и операторы $A_n^{-1} P_n A : X \to X$ равномерно ограничены $\left\|A_n^{-1} P_n A\right\| \leqslant M$. В этом случае верна следующая оценка для погрешности метода:

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leqslant (1 + M) \inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\|. \tag{3}$$

Оценка погрешности (3), приведенная в утверждении, называется *квазиоптимальной*. Она показывает, что ошибка в проекционном методе определяется тем, как хорошо точное решение может быть аппроксимировано с помощью элементов подпространства X_n (в норме пространства X).

5. Решение уравнения на фигуре сложной геометрической формы. Применяя проекционный метод к решаемой задаче, сведем ее к решению СЛАУ. Используя описанную процедуру дискретизации, составляем СЛАУ, в которой матрица и вектор являются многоиндексными. Каждый элемент этой матрицы получается путем вычисления интеграла

$$L_{ij} = \int\limits_{\Omega} \big(G(x,y)z(x)\big)v(y)\,ds.$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — мультипеременные, i и j — мультииндексы, а $G(x,y)$ — известная функция Грина. Правая часть матричного уравнения описывает поведение падающего поля. Система алгебраических уравнений решается одним из итерационных методов.

Выше описан метод построения решения интегрального уравнения для фигуры канонической формы. На основе субиерархического метода можно решать задачи на фигурах сложной геометрической формы. Пусть фигура G состоит только из *внутренних носителей* $\Pi_{i_1,\ldots,i_n}$, тогда ее можно записать следующим образом: $G = \bigcup\limits_i \operatorname{supp} f_i$. Здесь f_i — базисные функции, определенные на носителе $\operatorname{supp} f_i$. Зададим геометрию фигуры сложной геометрической формы G. Для этого введем вектор геометрии W, длиной равной количеству носителей, которые могут быть построены на сетке для фигуры канонической формы. Заполним элементы вектора геометрии W нулевыми или единичными значениями: нуль, если шаблон носителей не определен на новой фигуре G, и единица, если определен.

Рассмотрим процедуру составления вектора геометрии на примере двумерной задачи. На рис. 2 представлена каноническая фигура прямоугольной формы с построенной на ней сеткой и фигура сложной геометрической формы, выделенная цветом. Пусть носителем $\operatorname{supp} f_i$ базисной функции f_i является один конечный элемент сетки. Вектор геометрии в этом случае будет заполняться следующим образом. Переберем

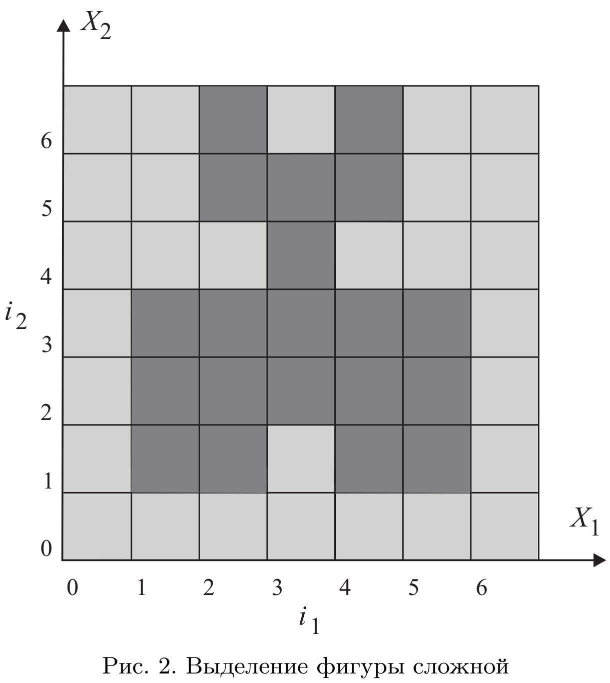


Рис. 2. Выделение фигуры сложной геометрической формы

носители базисных функций (в нашем случае конечные элементы сетки): если носитель принадлежит фигуре сложной геометрической формы, то в соответствующий ему элемент массива записывается значение 1, если нет, то записываем 0. Для представленной задачи удобно использовать двухиндексный вектор.

Применим итерационный метод к решению СЛАУ, полученной проекционным методом. Основная процедура в итерационном методе — это умножение матрицы на вектор. Каждый раз, умножая матрицу A на вектор B, будем поэлементно перемножать полученный вектор U на вектор геометрии W:

$$\begin{pmatrix} U_{1,\dots,1} \\ U_{1,\dots,2} \\ \dots \\ U_{\dots,q-1,\dots} \\ U_{\dots,q,\dots} \\ U_{\dots,q+1,\dots} \\ \dots \\ U_{n,\dots,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,\dots,1}\, W_{1,\dots,1} \\ U_{1,\dots,2}\, W_{1,\dots,2} \\ \dots \\ U_{\dots,q-1,\dots}\, W_{\dots,q-1,\dots} \\ U_{\dots,q,\dots}\, W_{\dots,q,\dots} \\ U_{\dots,q+1,\dots}\, W_{\dots,q+1,\dots} \\ \dots \\ U_{n,\dots,n}\, W_{n,\dots,n} \end{pmatrix} \quad W_{\dots,q,\dots} = \begin{cases} 1, & \operatorname{supp} f_{\dots,q,\dots} \in G, \\ 0, & \operatorname{supp} f_{\dots,q,\dots} \notin G. \end{cases}$$

Данную процедуру будем называть *выделением фигуры*. Заметим, что не из всякой фигуры G можно вырезать каноническую: фигура G должна умещаться внутри экрана $G \in \Pi$ и должна описываться комбинацией *носителей*.

В результате решения системы линейных уравнений подобным образом мы получим решение только на интересующей нас фигуре.

Лемма 1. *Пусть U является решением интегрального уравнения* (1) *на фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < d1, \dots, 0 < x_n < dn\}$. Пусть $G = \Pi \backslash \Pi_{i_1,\dots,i_q,\dots,i_n}$ — фигура канонической формы, не содержащая носитель $\Pi_{i_1,\dots,i_q,\dots,i_n}$. Опишем геометрию этой фигуры с помощью вектора W и найдем решение интегрального уравнения* (1), *применив субиерархический алгоритм. Найденное решение будет решением интегрального уравнения на фигуре G.*

Доказательство. Рассмотрим на фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < d1, \dots, 0 < x_n < dn\}$ интегральное уравнение (1). Будем предполагать, что проекционный метод построен и обоснован для данного интегрального уравнения. Применение проекционного метода приводит к решению матричного уравнения $AX = B$. Решаем матричное уравнение итерационным методом. Основной операцией решения итерационного уравнения является умножение матрицы на вектор: $X^{(m+1)} = A\, X^{(m)}$, где матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,\dots,1}^{1,\dots,1} & \dots & a_{1,\dots,1}^{\dots,q-1,\dots} & a_{1,\dots,1}^{\dots,q,\dots} & a_{1,\dots,1}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{1,\dots,1}^{n,\dots,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\dots,q-1,\dots}^{1,\dots,1} & \dots & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q,\dots} & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q-1,\dots}^{n,\dots,n} \\ a_{\dots,q,\dots}^{1,\dots,1} & \dots & a_{\dots,q,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & a_{\dots,q,\dots}^{\dots,q,\dots} & a_{\dots,q,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q,\dots}^{n,\dots,n} \\ a_{\dots,q+1,\dots}^{1,\dots,1} & \dots & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q,\dots} & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q+1,\dots}^{n,\dots,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\dots,n}^{1,\dots,1} & \dots & a_{n,\dots,n}^{\dots,q-1,\dots} & a_{n,\dots,n}^{\dots,q,\dots} & a_{n,\dots,n}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{n,\dots,n}^{n,\dots,n} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Каждому носителю $\Pi_{i_1,\dots,i_q,\dots,i_n}$ в матрице (4) соответствует строка и столбец с мультииндексом $i = i_1, \dots, i_q, \dots, i_n$. Поэлементное умножение вектора решения X на вектор геометрии W до и после каждой итерации обнуляет элементы соответствующей строки и столбца матрицы. Матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,\dots,1}^{1,\dots,1} & \dots & a_{1,\dots,1}^{\dots,q-1,\dots} & 0 & a_{1,\dots,1}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{1,\dots,1}^{n,\dots,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\dots,q-1,\dots}^{1,\dots,1} & \dots & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & 0 & a_{\dots,q-1,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q-1,\dots}^{n,\dots,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{\dots,q+1,\dots}^{1,\dots,1} & \dots & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q-1,\dots} & 0 & a_{\dots,q+1,\dots}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{\dots,q+1,\dots}^{n,\dots,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,\dots,n}^{1,\dots,1} & \dots & a_{n,\dots,n}^{\dots,q-1,\dots} & 0 & a_{n,\dots,n}^{\dots,q+1,\dots} & \dots & a_{n,\dots,n}^{n,\dots,n} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матричное уравнение решается не для всей матрицы, а только для ее подматрицы. Вид подматрицы M, полученной удалением из исходной матрицы строки с индексами $(\ldots, q, \ldots)$ и столбца с индексами $(\ldots, q, \ldots)$, соответствует виду новой матрицы, составленной для этого же интегрального уравнения по области $G = \Pi \backslash \Pi_{i_1,\ldots,i_q,\ldots,i_n}$.

Рассмотрим экран сложной формы G, составленный из носителей, принадлежащих экрану канонической формы $G = \Pi \backslash \sum\limits_{k=1}^{m} \Pi_{i_1,\ldots,i_n}$. Применяя описанную выше процедуру несколько раз, приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть U — решение уравнения* (1) *на фигуре* $\Pi = \{0 < x_1 < d1, \ldots, 0 < x_n < dn\}$, *имеющей каноническую форму. Пусть $G = \Pi \backslash \sum\limits_{k=1}^{m} \Pi_{i_1,\ldots,i_n}$ — фигура канонической формы, не содержащая m-носителей $\Pi_{i_1,\ldots,i_n}$. Опишем геометрию этой фигуры с помощью вектора W и найдем решение интегрального уравнения* (1), *применив субиерархический алгоритм. Найденное решение будет решением интегрального уравнения на фигуре G.*

Лемма 1 и теорема 1 обосновывают тот факт, что решение интегрального уравнения на подобласти можно получить с использованием матричных элементов, рассчитанных для исходной задачи.

Большинство рассматриваемых задач требует большого объема вычислений, многие невозможно решить без использования вычислительного кластера. Основные вычислительные ресурсы тратятся на составление матричного уравнения. Наиболее естественным подходом, упрощающим решение задачи, является использование внутренней матричной симметрии. Некоторые из получаемых матриц являются теплицевыми или ганкеливыми. Учитывая, что основное время, потраченное на решение задачи, уходит на составление матрицы, это обстоятельство существенно упрощает решение задачи. Второй подход связан с использование параллельных вычислений. Каждый элемент матрицы формируется независимо друг от друга. За счет этого можно рассчитать матрицу на нескольких персональных компьютерах.

Можно распараллелить и решение матричного уравнения. Основная процедура при решении СЛАУ итерационным методом — это умножение матрицы на вектор, она легко распараллеливается даже с учетом многоиндексности задачи.

6. Численные результаты. Ниже представлены результаты применения субиерархического метода для двух электродинамических задач. Первая из них — это задача дифракции электромагнитной волны на бесконечно тонком, идеально проводящем экране. Вторая — это задача дифракции электромагнитной волны на теле, расположенном внутри волновода, имеющего идеально проводящую поверхность.

6.1. Задача дифракции на плоском экране. Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на бесконечно тонком идеально проводящем экране [6–9]. Пусть $\Omega \subset R^2 = \{x_3 = 0\} \subset R^3$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей Γ, состоящей из конечного числа простых дуг класса C^∞, сходящихся под углами, отличного от нулевого. Задача дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля E^0, H^0 на бесконечно тонком идеально проводящем экране Ω, расположенном в свободном пространстве с волновым числом k, $k^2 = \omega^2\mu\big(\varepsilon + i\sigma\omega^{-1}\big)$, $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ $(k \neq 0)$, состоит в определении рассеянного электромагнитного поля $E,\ H \in C^2\Big(R^3 \backslash \overline{\Omega}\Big) \bigcap\limits_{\delta>0} C\Big(\overline{R}^3_+ \backslash \Gamma_\delta\Big) \bigcap\limits_{\delta>0} C\Big(\overline{R}^3_- \backslash \Gamma_\delta\Big)$, удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} H = -ikE, \quad \operatorname{rot} E = ikH, \quad x \in R^3 \backslash \overline{\Omega}, \tag{5}$$

краевым условиям для касательной составляющей электрического поля на поверхности экрана

$$E_\tau\big|_\Omega = -E^0_\tau\big|_\Omega, \tag{6}$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме

$$E, H \in L^2_{\text{loc}}\big(R^3\big) \tag{7}$$

и условиям излучения на бесконечности

$$\begin{aligned} &E, H = o\big(r^{-1}\big), \quad r := |x| \to \infty \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} k > 0,\\ &H \times e_r - E = o\big(r^{-1}\big), \quad E \times e_r + H = o\big(r^{-1}\big),\\ &E, H = O\big(r^{-1}\big), \quad r \to \infty \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} k = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

(условия Сильвера–Мюллера), $e_r = x/|x|$, $\times$ — векторное произведение, $\Gamma_\delta := \{x : |x-y| < \delta,\ y \in \Gamma\}$. Электромагнитные поля гармонически зависят от времени (множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен), $\omega > 0$ — круговая частота, $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, $\sigma \geqslant 0$ проводимость среды. Для полного поля имеем $E^{\text{полн}} = E^0 + E$, $H^{\text{полн}} = H^0 + H$.

Будем предполагать, что все источники падающего поля находятся вне экрана $\bar{\Omega}$ так, что для некоторого $\delta > 0$ имеем $E^0 \in C^\infty(\Omega_\delta)$, $\Omega_\delta = \{x : |x-y| < \delta,\ y \in \Omega\}$, откуда следует, что $E^0_\tau\big|_\Omega \in C^\infty\big(\overline{\Omega}\big)$.

Обычно падающее поле — это либо плоская волна, либо электрический или магнитный диполь, расположенный вне $\overline{\Omega}$. В этих случаях наши условия выполнены. Поле E^0, H^0 является решением системы уравнений Максвелла в свободном пространстве без экрана.

Условия (8) на бесконечности эквивалентны условиям излучения Зоммерфельда при $\operatorname{Im} k = 0$, $k \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} - ik\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = o\big(r^{-1}\big),$$

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = O\big(r^{-1}\big), \quad r \to \infty,$$

которые иногда легче проверить. Задача (5)–(8) при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $k \neq 0$, имеет не более одного решения. Задача (5)–(8) может быть сведена к векторному интегродифференциальному уравнению

$$Lu := \big(\operatorname{grad} A(\operatorname{div} u) + k^2 Au\big)\big|_t = f,$$

где A — интегральный оператор

$$Au = \int\limits_\Omega \frac{\exp\big(ik|x-y|\big)}{|xy|}\, u(y)\, ds,$$

$f := 4\pi k E^0_t\big|_\Omega$ и div —это тангенциальная дивергенция на Ω. Здесь тангенциальный вектор u — так называемая поверхностная плотность тока. Метод дискретизации решения описан в [7, 9]. Используются базисные функции $\varphi_j\,(x, y)$, предложенные в [20]:

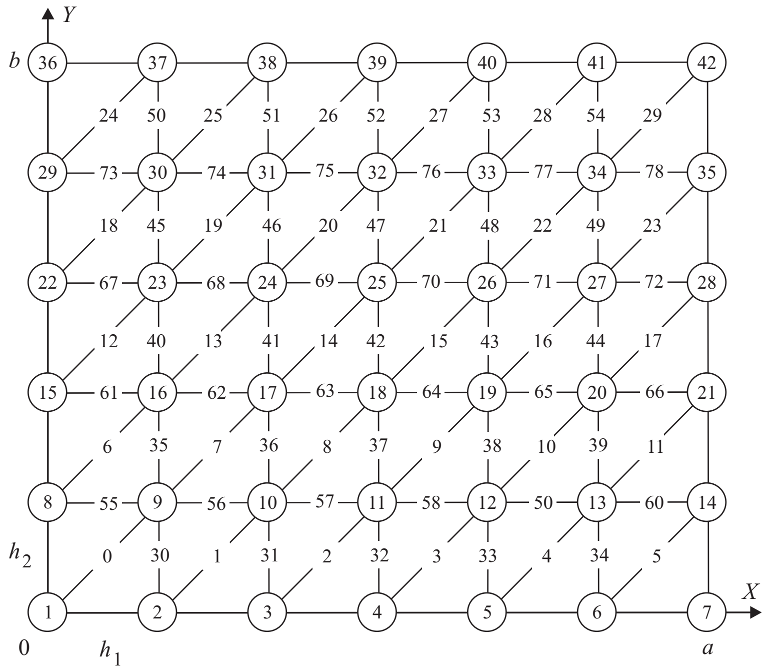


Рис. 3. Сетка фигуры

$$\varphi_j(x, y) = \begin{cases} \left(x - x_1^{(j)},\, y - y_1^{(j)}\right)\, \dfrac{l_j}{2S_j^+} & \text{в} \quad T_j^+, \\ \left(x_2^{(j)} - x,\, y_2^{(j)} - y\right)\, \dfrac{l_j}{2S_j^-} & \text{в} \quad T_j^-, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассматривается сетка, изображенная на рис. 3, но с бо́льшим количеством вершин.

На рис. 4 представлены результаты расчета электромагнитного поля на экране сложной геометрической формы, полученные субиерархическим методом.

6.2. Задача дифракции электромагнитной волны на теле внутри волновода [3, 4, 13, 14, 16]. Пусть в декартовой системе координат задан волновод $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < +\infty\}$ с идеально проводящей поверхностью ∂P. В волноводе расположено объемное тело $Q \subset P$ — область, характеризующаяся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной 3×3-тензорной функцией диэлектрической проницаемости $\widehat{\varepsilon}(x)$. Компоненты $\widehat{\varepsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области $\overline{Q}$: $\widehat{\varepsilon} \in L_\infty(Q)$ и $\widehat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$.

Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая. Будем также предполагать, что тело Q не касается стенок волновода: $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$. В $P \backslash \overline{Q}$ среда изотропна и однородна с постоянными $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$.

Требуется определить электромагнитное поле $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H} \in L_{2,\mathrm{loc}}(P)$ (и, следовательно, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H} \in L_2(Q)$), возбуждаемое в волноводе сторонним полем с временно́й зависимостью вида $\exp(-i\omega t)$, где ω — круговая частота. Источник стороннего поля — электрический ток $\boldsymbol{j}_E^0 \in L_{2,\mathrm{loc}}(P)$ с компактным носителем в P.

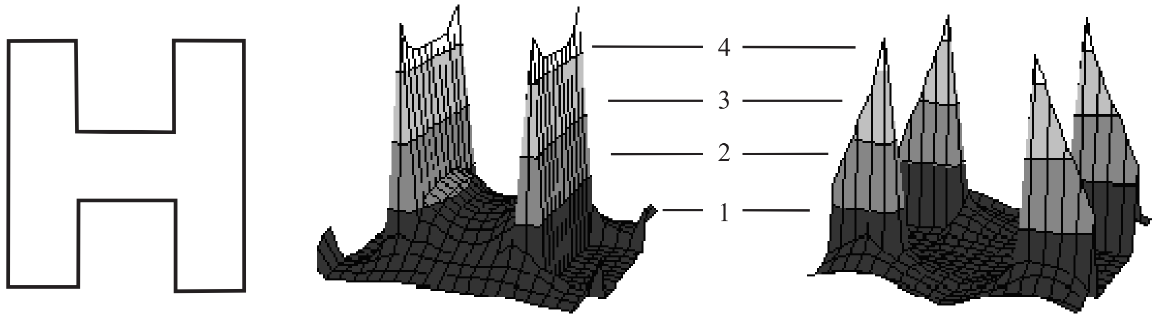


Рис. 4. “H”-образная фигура, вырезанная из сетки размером 49 × 48, и значение модулей поверхностных токов $|J_x|$ и $|J_y|$ для нее. Области, соответствующие диапазонам изменения поля: 1) (0,. . . ,0.06); 2) (0.06,. . . ,0.12); 3) (0.12,. . . ,0.18); 4) (0.18,. . . ,0.24)

В области $P \subset R^3$ стандартные дифференциальные операторы grad, div, rot понимаются в смысле обобщенных функций.

Будем искать “слабые” (обобщенные) решения системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -i\omega\widehat{\varepsilon}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}_E^0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i\omega\mu_0\boldsymbol{H}, \quad x \in P. \tag{9}$$

Эти решения должны удовлетворять условиям на бесконечности: поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ при $|x_3| > C$ для достаточно больших $C > 0$ имеют представление

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{pmatrix} = \sum_p R_p^{(\pm)} \exp\left(i\gamma_p^{(1)}|x_3|\right)\begin{pmatrix}\lambda_p^{(1)}\Pi_p\boldsymbol{e}_3 - i\gamma_p^{(1)}\nabla_2\Pi_p\\ -i\omega\varepsilon_0(\nabla_2\Pi_p)\times\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} + \\ + \sum_p Q_p^{(\pm)} \exp\left(i\gamma_p^{(2)}|x_3|\right)\begin{pmatrix}i\omega\mu_0\left(\nabla_2\psi_p\right)\times\boldsymbol{e}_3\\ \lambda_p^{(2)}\psi_p\boldsymbol{e}_3 - i\gamma_p^{(2)}\nabla_2\psi_p\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{10}$$

где + соответствует $+\infty$, − соответствует $-\infty$, $\boldsymbol{e}_{1,2,3}$ — орты в декартовой системе координат, $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$, $\operatorname{Im}\gamma_p^{(j)} > 0$ или $\operatorname{Im}\gamma_p^{(j)} = 0$, $k\gamma_p^{(j)} \geqslant 0$, $k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$, $\nabla_2 \equiv \boldsymbol{e}_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}$. Здесь $\lambda_p^{(1)}$, $\Pi_p(x_1,x_2)$ и $\lambda_p^{(2)}$, $\psi_p(x_1,x_2)$ — полные системы собственных значений и ортонормированных в $L_2(\Pi)$ собственных функций двумерного оператора Лапласа $-\Delta$ в прямоугольнике $\Pi := \{(x_1,x_2) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ с условиями Дирихле и Неймана соответственно. Для коэффициентов разложений (10) имеют место следующие оценки для некоторого $m \in N$:

$$R_p^{(\pm)},\, Q_p^{(\pm)} = O\big(p^m\big), \quad p \to \infty. \tag{11}$$

С физической точки зрения условия (10) означают, что рассеянное поле является суперпозицией нормальных волн, расходящихся от тела. Условия (11) обеспечивают экспоненциальную сходимость рядов (10), а также возможность их почленного дифференцирования по x_j любое число раз. Для $\boldsymbol{E}$ должно выполняться следующее краевое условие на стенках волновода:

$$\boldsymbol{E}_\tau\big|_{\partial P} = 0. \tag{12}$$

Из соотношений (9)–(12) для поля $\boldsymbol{E}$ следует интегродифференциальное уравнение

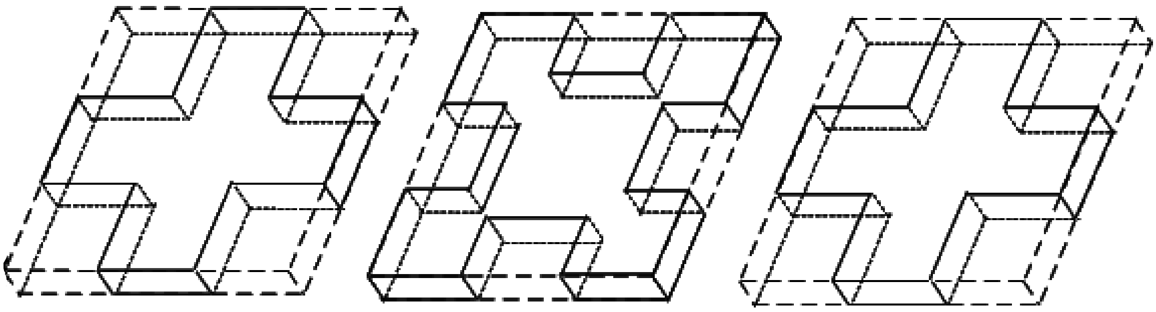
$$\boldsymbol{E}(x) = \boldsymbol{E}_0(x) + k_0^2\int\limits_Q \widehat{G}_E(r)\left(\frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I}\right)\boldsymbol{E}(y)dy + \operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_Q \widehat{G}_E(r)\left(\frac{\widehat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \widehat{I}\right)\boldsymbol{E}(y)dy, \quad x \in Q, \tag{13}$$

где $\widehat{I}$ — единичный тензор. Компоненты диагонального тензора Грина $\widehat{G}_E$ имеют вид

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp\bigl(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|\bigr)}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos\frac{\pi n}{a}x_1 \sin\frac{\pi m}{b}x_2 \cos\frac{\pi n}{a}y_1 \sin\frac{\pi m}{b}y_2,$$

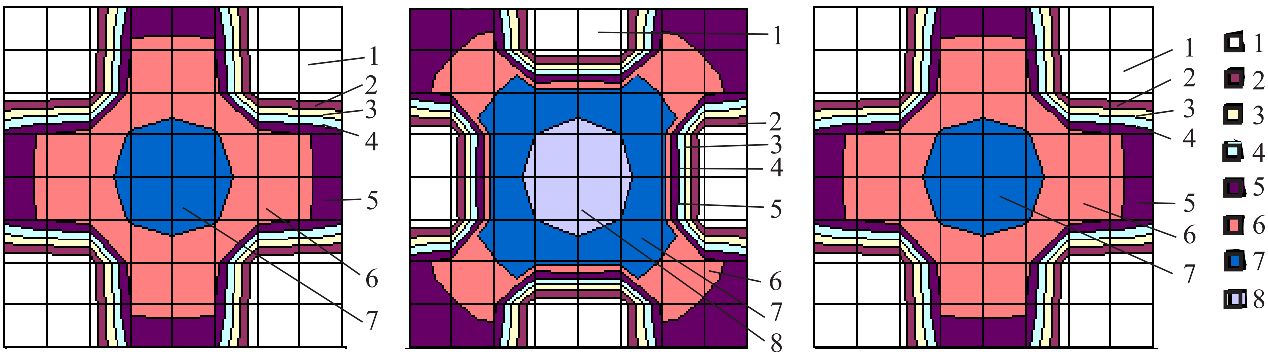
$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\bigl(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|\bigr)}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin\frac{\pi n}{a}x_1 \cos\frac{\pi m}{b}x_2 \sin\frac{\pi n}{a}y_1 \cos\frac{\pi m}{b}y_2,$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp\bigl(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|\bigr)}{\gamma_{nm}} \sin\frac{\pi n}{a}x_1 \sin\frac{\pi m}{b}x_2 \sin\frac{\pi n}{a}y_1 \sin\frac{\pi m}{b}y_2.$$



а) б) в)

Рис. 5. Форма фигуры



а) б) в)

Рис. 6. Значения модуля второй компоненты электрического поля во втором (а), пятом (б) и седьмом (в) слоях. Области 1–8 соответствуют диапазонам изменения поля: 1) (0, ... ,0.12); 2) (0.12,... ,0.24); 3) (0.24,... ,0.36); 4) (0.36,... ,0.48); 5) (0.48,... ,0.6); 6) (0.6,... ,0.72); 7) (0.72,... ,0.84); 8) (0.84,... ,0.96)

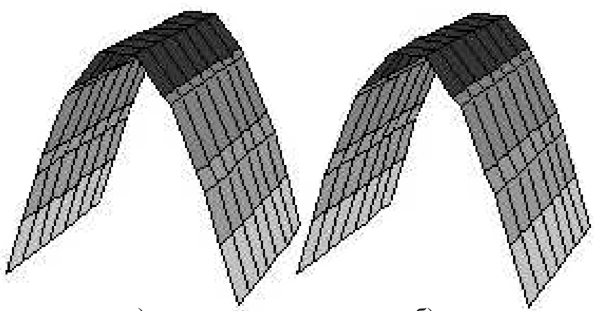
В этих выражениях $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\operatorname{Im}\gamma_{nm} \geqslant 0$.

Уравнение (13) можно решить различными численными методами. В данной работе выбран метод коллокации. Пусть Q — параллелепипед:

$$Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2,\\ b_1 < x_2 < b_2,\\ c_1 < x_3 < c_2\}.$$

Разобьем Q на элементарные параллелепипеды:

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1},\\ x_{2,l} < x_l < x_{2,l+1},\\ x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\},$$



а) б)

Рис. 7. Сравнение аналитического и численного решения задачи. Размеры волновода: $a = 2.274$, $b = 1.004$, $c = 0.982$

$x_{1,k} = a_1 + \dfrac{a_2 - a_1}{n}\, k$, $x_{2,l} = b_1 + \dfrac{b_2 - b_1}{n}\, l$, $x_{3,m} = c_1 + \dfrac{c_2 - c_1}{n}\, m$, где $k, l, m = 0, \dots, n-1$. Введем следующие базисные функции:

$$f^i_{klm}, \quad i = 1, 2, 3: \quad f^i_{klm} = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\Pi}_{klm}, \\ 0, & x \notin \overline{\Pi}_{klm}. \end{cases}$$

Используя схему дискретизации, описанную выше, и применяя субиерархический метод, получаем результаты расчета электромагнитного поля (рис. 6) на теле сложной геометрической формы (рис. 5).

Пусть тело, расположенное в волноводе, имеет форму прямоугольного параллелепипеда (секция в волноводе), имеющего размеры волновода и длину c. Диэлектрическая проницаемость тела $\varepsilon = 2$. Выберем сетку $8 \times 8 \times 8$ и "вырежем" два слоя по оси X из полной секции. На рис. 7а представлено аналитическое решение (в этом случае удается найти поле аналитически [14]) задачи дифракции в волноводе частичной секции длиной $0.75c$. На рис. 7б — численное решение, полученное субиерархическим методом из полной секции длиной c. Максимум модуля разности решений равен 0.00422.

Для решения рассмотренных задач использовался суперкомпьютерный комплекс Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин А.Б.* Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998.
2. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: Радиотехника, 1996.
3. *Смирнов Ю.Г., Медведик М.Ю., Васюнин Д.И.* Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2009. № 3. 71–87.
4. *Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г.* Численное решение объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2009. № 4. 54–69.
5. *Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г.* Применение ГРИД технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2008. № 2. 2–14.
6. *Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г.* Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм и сходимость метода Галеркина в задачах дифракции электромагнитного поля на плоском экране // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. 2004. № 5. 5–19.
7. *Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г., Соболев С.И.* Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**. 99–108.
8. *Антонов А.В., Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г.* Разработка Web-ориентированного вычислительного комплекса для решения трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов и ГРИД технологий // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2007. № 4. 60–67.
9. *Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г.* Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах // Радиотехника и электроника. 2008. **53**, № 4. 441–446.
10. *Медведик М.Ю., Родионова И.А., Смирнов Ю.Г.* Численный метод решения псевдодифференциального уравнения в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2009. № 1. 87–99.
11. *Медведик М.Ю., Родионова И.А.* Субиерархический метод для решения псевдодифференциального уравнения в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2009. № 3. 59–70.
12. *Медведик М.Ю.* Субиерархический метод решения интегрального уравнения на плоских экранах произвольной формы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2009. № 4. 48–53.
13. *Медведик М.Ю., Миронов Д.А., Смирнов Ю.Г.* Субиерархический подход для решения объемного сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на диэлектрическом теле в волноводе методом коллокации // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2010. № 2. 32–43.
14. *Гурина Е.Е., Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г.* Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2010. № 2. 44–53.

15. *Медведик М.Ю.* Субиерархический метод решения интегрального уравнения на поверхностях произвольной формы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2010. № 3. 88–94.
16. *Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г.* Субиерархический метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе // Радиотехника и электроника. 2011. **56**, № 8. 940–945.
17. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
18. *Андреев М.Л., Заркевич Н.А., Исаков А.Н., Козырева О.И., Плохов И.В.* Разбиение N-мерного куба на симплексы с сохранением симметрии // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 3. 21–24.
19. *Kress R.* Linear integral equations. Ser. Applied Mathematical Sciences. **82**. New-York: Springer, 1989.
20. *Rao S.M., Wilton D.R., Glisson A.W.* Electromagnetic scattering by surface of arbitrary shape // IEEE Trans. Antennas Propagation. **30**, N 3. 1982. 409–418.

Поступила в редакцию
24.11.2011