УДК 517.988.68:519.85

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ЭКСТРАПРОКСИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ПОИСКА ТОЧКИ РАВНОВЕСИЯ В СЕДЛОВЫХ ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ

Ф. П. Васильев[1], Л. А. Артемьева[1], А. С. Антипин[2]

Рассматривается седловая игра двух лиц с приближенными входными данными. Задача поиска точки равновесия в таких играх, вообще говоря, неустойчива к возмущениям входных данных, и для ее решения нужно применять методы регуляризации. Предлагаются три варианта регуляризованного дифференциального экстрапроксимального метода, исследуется их сходимость. Строится регуляризующий оператор. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09–01–00388 и в соответствии с программой поддержки ведущих научных школ, НШ–4096.2010.1.

Ключевые слова: седловая игра двух лиц, точка равновесия, экстрапроксимальный метод, метод регуляризации, регуляризующий оператор.

1. Введение. В работах [1–7] рассматривалась следующая игра двух лиц: найти точку $(w_*, p_*, y_*, r_*) \in W_0 \times E^{m_2} \times Y_0 \times E^{m_1}$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$w_* \in \operatorname{Argmin}\{S_1(w) + \langle r_*, f_1(w)\rangle \mid w \in W_0,\ g_1(w) + f_2(y_*) \leqslant 0\}, \tag{1}$$

$$\langle p - p_*, g_1(w_*) + f_2(y_*)\rangle \leqslant 0 \quad \forall p \in E_+^{m_2}, \tag{2}$$

$$y_* \in \operatorname{Argmin}\{S_2(y) + \langle p_*, f_2(y)\rangle \mid y \in Y_0,\ g_2(y) + f_1(w_*) \leqslant 0\}, \tag{3}$$

$$\langle r - r_*, g_2(y_*) + f_1(w_*)\rangle \leqslant 0 \quad \forall r \in E_+^{m_1}, \tag{4}$$

где E^m — евклидово пространство размерности m со скалярным произведением $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^m a^i b^i$ для всех $a, b \in E^m$; $|a| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ — норма в E^m; $E_+^m = \{a \in E^m : a \geqslant 0\}$ — неотрицательный ортант в E^m; $W_0 \subseteq E^{m_3}$, $Y_0 \subseteq E^{m_4}$ — заданные выпуклые замкнутые множества; функции $S_1(w)$, $f_1(w) = (f_1^1(w), \dots, f_1^{m_1}(w))$, $g_1(w) = (g_1^1(w), \dots, g_1^{m_2}(w))$ определены на множестве $W_0 \subset E^{m_3}$; функции $S_2(y)$, $f_2(y) = (f_2^1(y), \dots, f_2^{m_2}(y))$, $g_2(y) = (g_2^1(y), \dots, g_2^{m_1}(y))$ определены на множестве $Y_0 \in Y^{m_4}$; векторы $r, r_* \in E_+^{m_1}$, $p, p_* \in E_+^{m_2}$, $\operatorname{Argmin}\{f(z) \mid z \in Q\}$ — множество точек минимума функции $f(z)$ на множестве Q.

Содержательный смысл игры (1)–(4) пояснен в [1–6]. Здесь мы ограничимся следующим замечанием. Предполагается, что один игрок оперирует условиями (1), (2), другой игрок — условиями (3), (4), причем условия первого игрока (1), (2) зависят от параметров (y_*, r_*) второго игрока, а условия второго игрока (3), (4) — от параметров (w_*, p_*) первого игрока. Каждый из игроков, зная параметры друг друга, составляет свою функцию Лагранжа, определяет ее седловую точку, которая, конечно, зависит от параметров партнера. Затем игроки сообщают друг другу координаты полученных седловых точек как очередные значения параметров. Такой обмен седловыми точками продолжается до тех пор, пока не будет найдена точка $u_* = (w_*, p_*, y_*, r_*)$, удовлетворяющая условиям (1)-(4). Такую точку u_* будем называть *точкой равновесия* седловой игры (1)–(4). Предполагается, что игроки действуют согласованно, стремясь получить точку равновесия.

В работе [7] показано, что игру (1)–(4) можно свести к задаче поиска седловой точки функции

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \lambda) &= S(x) + \langle B\lambda, f(x)\rangle + \langle \lambda, g(x)\rangle = \\ &= S(x) + (B\lambda)^\top f(x) + \lambda^\top g(x), \quad x \in X_0,\ \lambda \in E_+^m, \end{aligned} \tag{5}$$

[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119991, Москва; Ф.П. Васильев, профессор, e-mail: arush@srcc.msu.ru, Л. А. Артемьева, аспирант, e-mail: artemieva.luda@gmail.com

[2] Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, ул. Вавилова, 40, 119333, Москва; главный научн. сотр., e-mail: asantip@yandex.ru

где

$$x = \begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix},\ \lambda = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix},\ f(x) = \begin{pmatrix} f_1(w) \\ f_2(y) \end{pmatrix},\ g(x) = \begin{pmatrix} g_1(w) \\ g_2(y) \end{pmatrix},\ S(x) = S_1(w) + S_2(y),$$

$$X_0 = W_0 \times Y_0,\ E^m_+ = E^{m_2}_+ \times E^{m_1}_+,\ m = m_1 + m_2,\ I_n \text{ — единичная матрица порядка } n,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_{m_1} \\ I_{m_2} & 0 \end{pmatrix},\ B^\top = \begin{pmatrix} 0 & I_{m_2} \\ I_{m_1} & 0 \end{pmatrix},\ \|B\| = \|B^\top\| = 1,\ B\lambda = \begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix} \geqslant 0,\ B^\top f = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Функцию (5) будем называть *функцией Лагранжа* игры (1)–(4). Точку $u_* = \begin{pmatrix} x_* \\ \lambda_* \end{pmatrix} \in X_0 \times E^m_+$, где $x_* = \begin{pmatrix} w_* \\ y_* \end{pmatrix} \in X_0$, $\lambda_* = \begin{pmatrix} p_* \\ r_* \end{pmatrix} \in E^m_+$, удовлетворяющую условиям

$$\mathcal{L}(x_*, \lambda) \leqslant \mathcal{L}(x_*, \lambda_*) \leqslant \mathcal{L}(x, \lambda_*) \quad \forall x \in X_0,\ \forall \lambda \in E^m_+,$$

будем называть *седловой точкой* функции (5). Множество всех седловых точек функции (5) обозначим через U_*. В [7] доказано, что любая седловая точка $u_* \in U_*$ является точкой равновесия игры (1)–(4).

Для поиска точки равновесия этой игры в [1–7] предложены и исследованы различные варианты экстрапроксимального и экстраградиентного методов в предположении, что входные данные $S(x)$, $f(x)$, $g(x)$ известны точно. Однако на практике входные данные, как правило, задаются с погрешностью. В этих условиях с помощью методов, разработанных для поиска решения задачи (1)–(4) с точными данными, не всегда можно получить удовлетворительное приближенное решение, так как задача может оказаться неустойчивой к возмущениям входных данных. Для надежного определения решения неустойчивых задач с требуемой точностью необходимо применять специальные методы, называемые методами регуляризации [8–12]. Ниже предлагаются и исследуются регуляризованные варианты экстрапроксимального метода из работы [6]. Эти методы будем рассматривать в предположении, что выполнены следующие условия.

1. Множество $X_0 = W_0 \times Y_0$ выпукло и замкнуто.

2. Функции $S(x)$, $f(x)$, $g(x)$ выпуклы и непрерывны на X_0, функции $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условию Липшица

$$\max\{|f(x_1) - f(x_2)|; |g(x_1) - g(x_2)|\} \leqslant L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in X_0. \tag{6}$$

3. Функция Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda)$ (5) имеет хотя бы одну седловую точку $u_* = \begin{pmatrix} x_* \\ \lambda_* \end{pmatrix}$, т.е. $U_* \neq \emptyset$.

4. Вместо функций $S(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $x \in X_0$ известны их приближения $S(x,t)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $x \in X_0$, $t \geqslant 0$, такие, что

$$\max\{|S(x,t) - S(x)|;\ |f(x,t) - f(x)|;\ |g(x,t) - g(x)|\} \leqslant \delta(t)(1 + |x|) \quad \forall x \in X_0,\ \ t \geqslant 0, \tag{7}$$

где функция $\delta(t) > 0$ характеризует погрешность задания входных данных, причем функции $S(x,t)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $t \geqslant 0$, выпуклы и полунепрерывны снизу на X_0.

Для описания регуляризованного дифференциального экстрапроксимального метода понадобится функция

$$T(x, \lambda, t) = \mathcal{L}(x, \lambda) + \frac{1}{2}\,\alpha(t)(|x|^2 - |\lambda|^2), \quad x \in X_0, \quad \lambda \in E^m_+, \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

которую будем называть *функцией Тихонова* игры (1)–(4) с параметром регуляризации $\alpha(t) > 0$, $t \geqslant 0$.

В качестве приближения к функции (8) возьмем функцию

$$\tau(x, \lambda, t) = \mathcal{L}(x, \lambda, t) + \frac{1}{2}\,\alpha(t)(|x|^2 - |\lambda|^2), \quad x \in X_0, \quad \lambda \in E^m_+, \quad t \geqslant 0, \tag{9}$$

где

$$\mathcal{L}(x, \lambda, t) = S(x,t) + \langle B\lambda, f(x,t)\rangle + \langle \lambda, g(x,t)\rangle, \quad x \in X_0, \quad \lambda \in E^m_+, \quad t \geqslant 0 \tag{10}$$

и функции $S(x,t)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$ взяты из (7). Для функций (5), (8)–(10) погрешность в силу (7) оценивается следующим образом:

$$\begin{gathered} |\tau(x, \lambda, t) - T(x, \lambda, t)| = |\mathcal{L}(x, \lambda, t) - \mathcal{L}(x, \lambda)| \leqslant 2\delta(t)(1 + |x|)(1 + |\lambda|) \\ \forall x \in X_0,\ \ \forall \lambda \in E^m_+,\ \ t \geqslant 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Функция Тихонова $T(x,\lambda,t)$ (8) непрерывна, сильно выпукла по x на X_0, сильно вогнута по λ на E_+^m и при каждом $t \geqslant 0$ имеет единственную седловую точку $u_*(t) = \begin{pmatrix} x_*(t) \\ \lambda_*(t) \end{pmatrix}$, определяемую следующими неравенствами (см. [12], с. 866, лемма 1):

$$T(x_*(t),\lambda,t) \leqslant T(x_*(t),\lambda_*(t),t) \leqslant T(x,\lambda_*(t),t) \quad \forall x \in X_0,\ \forall \lambda \in E_+^m,\ \ t \geqslant 0. \tag{12}$$

Если $\alpha(t) \to 0$, то (см. [12], с. 867, лемма 3)

$$|u_*(t)| = (|x_*(t)|^2 + |\lambda_*(t)|^2)^{1/2} \leqslant |v_*|, \quad t \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\lim_{t\to+\infty} u_*(t) = v_*, \tag{14}$$

где v_* — *нормальная седловая точка* функции $\mathcal{L}(x,\lambda)$ (5), которая определяется условиями

$$v_* \in U_*, \quad |v_*| = \inf_{u_* \in U_*} |u_*|. \tag{15}$$

В силу условия 3 множество седловых точек U_* непусто, причем это множество выпукло, замкнуто, поэтому нормальная седловая точка v_* существует и единственна (см. [12], с. 375, замечание 1).

2. Регуляризованный дифференциальный симметричный экстрапроксимальный метод. В работе [6] был предложен и исследован на сходимость дифференциальный экстрапроксимальный метод, который мы здесь запишем в следующем эквивалентном виде, удобном для регуляризации:

$$\begin{aligned}
&\bar{x}(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|x - x(t)|^2 + \beta(t)\mathcal{L}(x,\lambda(t)) \mid x \in X_0\right\},\\
&\bar{\lambda}(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\mathcal{L}(x(t),\lambda) \mid \lambda \in E_+^m\right\},\\
&\dot{x}(t) + x(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|x - x(t)|^2 + \beta(t)\mathcal{L}(x,\bar{\lambda}(t)) \mid x \in X_0\right\},\\
&\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\mathcal{L}(\bar{x}(t),\lambda) \mid \lambda \in E_+^m\right\}, \quad \beta(t) > 0,\ \ t \geqslant 0,\\
&x(0) = x_0, \quad \lambda(0) = \lambda_0,
\end{aligned} \tag{16}$$

где функция $\mathcal{L}(x,\lambda)$, определенная согласно (5), — функция Лагранжа с точными входными данными.

Функции $\bar{x}(t)$, $\bar{\lambda}(t)$ в системе (16) реализуют обратную связь [13, 14] одновременно и симметрично по основным переменным $x = (w,y)^\top$ и по двойственным переменным $\lambda = (p,r)^\top$, поэтому метод (16) в [6] был назван симметричным. В [6] было доказано, что при некоторых условиях траектория $u(t) = (x(t),\lambda(t))^\top$, $t \geqslant 0$, системы (16) при $t \to +\infty$ сходится к точке равновесия игры (1)–(4). Однако если входные данные игры (1)–(4) известны с погрешностями, то метод (16) требуется регуляризовать. Ниже, опираясь на известные принципы регуляризации [10, 12], предлагается следующий регуляризованный вариант метода (16):

$$\bar{x}(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau(x,\lambda(t),t) \mid x \in X_0\right\}, \tag{17}$$

$$\bar{\lambda}(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}|\,\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\tau(x(t),\lambda,t) \mid \lambda \in E_+^m\right\}, \tag{18}$$

$$\dot{x}(t) + x(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau(x,\bar{\lambda}(t),t) \mid x \in X_0\right\}, \tag{19}$$

$$\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\tau(\bar{x}(t),\lambda,t) \mid \lambda \in E_+^m\right\}, \quad t \geqslant 0, \tag{20}$$

$$x(0) = x_0, \quad \lambda(0) = \lambda_0, \tag{21}$$

где функция $\tau(x,\lambda,t)$ взята из (9). Регуляризованный дифференциальный симметричный экстрапроксимальный метод формально описан. Осталось указать правила согласованного выбора параметров $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\delta(t)$ метода (17)–(21).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1–4 и параметры $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\delta(t)$, $t \geqslant 0$ метода (16) таковы, что $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — непрерывно дифференцируемы, $\delta(t)$ – непрерывна при $t \geqslant 0$ и*

$$\alpha(t) > 0, \quad \delta(t) > 0, \quad \alpha'(t) \leqslant 0, \quad \beta'(t) \leqslant 0, \quad \sup_{t\geqslant 0} \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} < \frac{1}{38}, \quad \inf_{t\geqslant 0} \beta(t) > 0, \tag{22}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left(\alpha(t) + \delta(t) + \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} + \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha^2(t)\beta(t)} + \frac{|\beta'(t)|}{\alpha(t)\beta^2(t)} \right) = 0, \tag{23}$$

$$1 - \sup_{t\geqslant 0} \beta(t)(L + 24\delta(t)) > 0. \tag{24}$$

Пусть $(x_0, \lambda_0) \in X_0 \times E^m_+$ и система (17)–(21) имеет единственное решение $u(t) = (x(t), \lambda(t))^\top$, $t \geqslant 0$, тогда

$$\lim_{t\to\infty} |u(t) - v_*| = 0, \tag{25}$$

где v_* — нормальная седловая точка (15), причем сходимость в (25) равномерна относительно выбора приближенных входных данных $S(x,t)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$ из условий (7).

Заметим, что в качестве параметров, удовлетворяющих условиям (22)–(24), можно, например, взять

$$\alpha(t) = a(t+1)^{-\alpha}, \quad \delta(t) = b(t+1)^{-\delta}, \quad \beta(t) \equiv \beta = \text{const}, \quad t \geqslant 0,$$

где $0 < \alpha < 1$, $\delta > 1$, $b/a < 1/38$, $0 < \beta \leqslant 1/(L + 24b)$.

Доказательство. Система (17)–(21) относительно искомых функций $(x(t), \lambda(t))^\top = u(t)$, $t \geqslant 0$, является задачей Коши с обратными связями $\bar{x}(t)$, $\bar{\lambda}(t)$, причем правые части этой системы заданы неявно как решения соответствующих задач минимизации. Убедимся, что при выполнении условий теоремы правые части уравнений (17)–(21) определены однозначно. В самом деле, функция

$$\frac{1}{2} |x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau(x, \lambda(t), t), \quad x \in X_0,$$

полунепрерывна снизу и сильно выпукла по x на выпуклом замкнутом множестве X_0 с константой сильной выпуклости $\varkappa = 1 + \alpha(t)\beta(t)$, а функция

$$\frac{1}{2} |\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\tau(x(t), \lambda, t), \quad \lambda \in E^m_+,$$

полунепрерывна снизу и сильно выпукла по λ на выпуклом замкнутом множестве E^m_+ с той же константой сильной выпуклости. Отсюда следует, что (см. [12], с. 207, теорема 1) задачи минимизации из правых частей (17), (18) имеют единственное решение и справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + \alpha(t)\beta(t))|x - \bar{x}(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2} |x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau(x, \lambda(t), t) - \\ - \frac{1}{2} |\bar{x}(t) - x(t)|^2 - \beta(t)\tau(\bar{x}(t), \lambda(t), t) \quad \forall x \in X_0, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + \alpha(t)\beta(t))|\lambda - \bar{\lambda}(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2} |\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\tau(x(t), \lambda, t) - \\ - \frac{1}{2} |\bar{\lambda}(t) - \lambda(t)|^2 + \beta(t)\tau(x(t), \bar{\lambda}(t), t) \quad \forall \lambda \in E^m_+. \end{aligned} \tag{27}$$

Аналогично устанавливается, что задачи минимизации из правых частей уравнений (19), (20) имеют единственное решение и справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + \alpha(t)\beta(t))|x - \dot{x}(t) - x(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2} |x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau(x, \bar{\lambda}(t), t) - \\ - \frac{1}{2} |\dot{x}(t) + x(t) - x(t)|^2 - \beta(t)\tau(\dot{x}(t) + x(t), \bar{\lambda}(t), t) \quad \forall x \in X_0, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + \alpha(t)\beta(t))|\lambda - \dot{\lambda}(t) - \lambda(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2} |\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\tau(\bar{x}(t), \lambda, t) - \\ - \frac{1}{2} |\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) - \lambda(t)|^2 + \beta(t)\tau(\bar{x}(t), \dot{\lambda}(t) + \lambda(t), t) \quad \forall \lambda \in E^m_+. \end{aligned} \tag{29}$$

Возьмем седловую точку $u_*(q) = (x_*(q), \lambda_*(q))^\top$ функции Тихонова $T(x, \lambda, t)$ (8), соответствующую некоторому произвольному моменту времени $t = q \geqslant 0$. Согласно (12) имеем

$$0 \leqslant \beta(t)(T(x, \lambda_*(q), q) - T(x_*(q), \lambda_*(q), q)) \quad \forall x \in X_0, \tag{30}$$

$$0 \leqslant \beta(t)(-T(x_*(q), \lambda, q) + T(x_*(q), \lambda_*(q), q)) \quad \forall \lambda \in E^m_+. \tag{31}$$

Положим в (26) $x = \dot{x}(t) + x(t)$, в (27) $\lambda = \dot{\lambda}(t) + \lambda(t)$, в (28) $x = x_*(q)$, в (29) $\lambda = \lambda_*(q)$, в (30) $x = \bar{x}(t)$, в (31) $\lambda = \bar{\lambda}(t)$ и сложим получившиеся неравенства. После приведения подобных членов и простой перегруппировки с учетом определения функций $T(x, \lambda, t)$ (8) и $\tau(x, \lambda, t)$ (9) получим

$$\begin{aligned} &(1 + \alpha(t)\beta(t))(|\dot{x}(t) + x(t) - \bar{x}(t)|^2 + |\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) - \bar{\lambda}(t)|^2 + |\dot{x}(t) + x(t) - x_*(q)|^2 + \\ &\quad + |\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) - \lambda_*(q)|^2) + |x(t) - \bar{x}(t)|^2 + |\lambda(t) - \bar{\lambda}(t)|^2 - |x(t) - x_*(q)|^2 - \\ &\quad - |\lambda(t) - \lambda_*(q)|^2 \leqslant \beta(t)(\alpha(t) - \alpha(q))(|x_*(q)|^2 + |\lambda_*(q)|^2 - |\bar{x}(t)|^2 - |\bar{\lambda}(t)|^2) + \\ &\quad + 2\beta(t)J_1 + 2\beta(t)J_2 \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall q \geqslant 0, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned} J_1 = {} & (\mathcal{L}(\dot{x} + x, \lambda) - \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda)) + (-\mathcal{L}(x, \dot{\lambda} + \lambda) + \mathcal{L}(x, \bar{\lambda})) + \\ & + (\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) - \mathcal{L}(\dot{x} + x, \bar{\lambda})) + (-\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) + \mathcal{L}(\bar{x}, \dot{\lambda} + \lambda)), \\ J_2 = {} & (\mathcal{L}(\dot{x} + x, \lambda, t) - \mathcal{L}(\dot{x} + x, \lambda)) + (-\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, t) + \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda)) + \\ & + (-\mathcal{L}(x, \dot{\lambda} + \lambda, t) + \mathcal{L}(x, \dot{\lambda} + \lambda)) + (\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, t) - \mathcal{L}(x, \bar{\lambda})) + \\ & + (\mathcal{L}(x_*(q), \bar{\lambda}, t) - \mathcal{L}(x_*(q), \bar{\lambda})) + (-\mathcal{L}(\dot{x} + x, \bar{\lambda}, t) + \mathcal{L}(\dot{x} + x, \bar{\lambda})) + \\ & + (-\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda_*(q), t) + \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda_*(q))) + (\mathcal{L}(\bar{x}, \dot{\lambda} + \lambda, t) - \mathcal{L}(\bar{x}, \dot{\lambda} + \lambda)). \end{aligned}$$

Здесь в J_1, J_2 аргумент t у функций $x(t)$, $\lambda(t)$, $\bar{x}(t)$, $\bar{\lambda}(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{\lambda}(t)$ для краткости опущен.

Оценим сверху величину J_1. Сначала, пользуясь формулой (5) для функции $\mathcal{L}(x, \lambda)$, запишем выражение для величины J_1 в следующем виде:

$$J_1 = \langle \lambda - \bar{\lambda}, B^\top(f(\dot{x} + x) - f(\bar{x})) + (g(\dot{x} + x) - g(\bar{x}))\rangle + \langle \dot{\lambda} + \lambda - \bar{\lambda}, B^\top(f(\bar{x}) - f(x)) + (g(\bar{x}) - g(x))\rangle.$$

Отсюда и из условия Липшица (6) следует, что

$$\begin{aligned} J_1 \leqslant 2L(|\lambda - \bar{\lambda}||\dot{x} + x - \bar{x}| + |\dot{\lambda} + \lambda - \bar{\lambda}||\bar{x} - x|) \leqslant L(|\dot{x} + x - \bar{x}|^2 + \\ + |x - \bar{x}|^2 + |\dot{\lambda} + \lambda - \bar{\lambda}|^2 + |\lambda - \bar{\lambda}|^2). \end{aligned} \tag{33}$$

Для оценки выражения для величины J_2 воспользуемся условиями (8), (11) на погрешность. Первое слагаемое из J_2 оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{x} + x, \lambda, t) - \mathcal{L}(\dot{x} + x, \lambda) \leqslant 2\delta(t)(1 + |\dot{x} + x|)(1 + |\lambda|) \leqslant \\ \leqslant 2\delta(t)(1 + |\dot{x} + x - \bar{x}| + |\bar{x} - x| + |x - x_*(q)| + |x_*(q)|)(1 + |\lambda - \lambda_*(q)| + |\lambda_*(q)|). \end{aligned}$$

Далее нам понадобится следующее элементарное неравенство:

$$2\sum_{i=1}^{l_1} a_i \sum_{j=1}^{l_2} b_j \leqslant l_2 \sum_{i=1}^{l_1} a_i^2 + l_1 \sum_{j=1}^{l_2} b_j^2 \quad \forall a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, l_1, \;\; j = 1, \ldots, l_2. \tag{34}$$

Учитывая оценку (13), из оценки для первого слагаемого из J_2 и неравенства (34) получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\dot{x} + x, \lambda, t) - \mathcal{L}(\dot{x} + x, \lambda)| \leqslant \delta(t)(2|\dot{x} + x - \bar{x}|^2 + 2|\bar{x} - x|^2 + \\ + 2|x - x_*(q)|^2 + |\lambda - \lambda_*(q)|^2 + 6(1 + |v_*|)^2). \end{aligned}$$

Отметим, что мы постарались, чтобы в правой части этих оценок присутствовали лишь слагаемые, входящие в левую часть неравенства (32). Аналогично будем оценивать остальные слагаемые из выражения для величины J_1. Суммируя все эти оценки, получим

$$\begin{aligned} J_2 \leqslant \delta(t)((5|\dot{x} + x - \bar{x}|^2 + |\dot{\lambda} + \lambda - \bar{\lambda}|^2) + 12(|\bar{x} - x|^2 + |\lambda - \bar{\lambda}|^2) + \\ + 19(|x - x_*(q)|^2 + |\lambda - \lambda_*(q)|^2) + 44(1 + |v_*|)^2). \end{aligned} \tag{35}$$

Подставив оценки (33), (35) в (32), получим

$$\begin{aligned}(1+\alpha(t)\beta(t))(|\dot{x}(t)+x(t)-x_*(q)|^2+|\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2)+(|\dot{x}(t)+x(t)-\bar{x}(t)|^2+\\ +|\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\bar{\lambda}(t)|^2)(1+\alpha(t)\beta(t)-2\beta(t)L-10\beta(t)\delta(t))+(|x(t)-\bar{x}(t)|^2+\\ +|\lambda(t)-\bar{\lambda}(t)|^2)(1-2\beta(t)L-24\beta(t)\delta(t))+(|x(t)-x_*(q)|^2+|\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2)(-1-\\ -38\beta(t)\delta(t))\leqslant 88\beta(t)\delta(t)(1+|v_*|)^2+\beta(t)(\alpha(t)-\alpha(q))(|x_*(q)|^2+|\lambda_*(q)|^2-\\ -|\bar{x}(t)|^2-|\bar{\lambda}(t)|^2)\quad \forall t\geqslant 0,\ \ \forall q\geqslant 0.\end{aligned}\tag{36}$$

В левой части (36) добавим и вычтем величину

$$(1+\alpha(t)\beta(t))(|x(t)-x_*(q)|^2+|\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2)$$

и еще заметим, что в силу (24) второе и третье слагаемое в левой части (36) неотрицательны и их можно заменить нулем. В результате этих преобразований из (36) получим

$$\begin{aligned}(1+\alpha(t)\beta(t))(|\dot{u}(t)+u(t)-u_*(q)|^2-|u(t)-u_*(q)|^2)+|u(t)-u_*(q)|^2(-1-\\ -38\beta(t)\delta(t)+1+\alpha(t)\beta(t))\leqslant 88\beta(t)\delta(t)(1+|v_*|)^2+\\ +\beta(t)(\alpha(t)-\alpha(q))(|u_*(q)|^2-|\bar{u}(t)|^2)\overset{\text{def}}{=}b(t,q)\quad \forall t\geqslant 0,\ \ \forall q\geqslant 0,\end{aligned}\tag{37}$$

где $u(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ \lambda(t)\end{pmatrix}$, $\bar{u}(t)=\begin{pmatrix}\bar{x}(t)\\ \bar{\lambda}(t)\end{pmatrix}$, $\dot{u}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{\lambda}(t)\end{pmatrix}$, $u_*(t)=\begin{pmatrix}x_*(t)\\ \lambda_*(t)\end{pmatrix}$.

Поскольку

$$|\dot{u}(t)+u(t)-u_*(q)|^2-|u(t)-u_*(q)|^2=|\dot{u}(t)|^2+\frac{d}{dt}|u(t)-u_*(q)|^2,$$

то из (37) следует:

$$\begin{aligned}|\dot{u}(t)|^2+\frac{d}{dt}|u(t)-u_*(q)|^2+|u(t)-u_*(q)|^2\frac{\alpha(t)\beta(t)}{1+\alpha(t)\beta(t)}(1-\\ -38\frac{\delta(t)}{\alpha(t)})\leqslant\frac{b(t,q)}{1+\alpha(t)\beta(t)}\quad \forall t\geqslant 0,\ \ \forall q\geqslant 0.\end{aligned}\tag{38}$$

Умножим неравенство (38) на функцию

$$\rho(t)=\exp(\rho_0\int\limits_0^t\alpha(\theta)\beta(\theta)d\theta)>0,$$

где ρ_0 — фиксированное число, такое, что

$$0<\rho_0\leqslant\frac{1-38\sup\limits_{t\geqslant 0}\frac{\delta(t)}{\alpha(t)}}{1+\sup\limits_{t\geqslant 0}\alpha(t)\beta(t)},\tag{39}$$

и проинтегрируем полученное неравенство на отрезке $[0,T]$:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t|\dot{u}(\xi)|^2\rho(\xi)d\xi+\int\limits_0^t\frac{d}{d\xi}|u(\xi)-u_*(q)|^2\rho(\xi)d\xi+\int\limits_0^t|u(\xi)-u_*(q)|^2\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{1+\alpha(\xi)\beta(\xi)}(1-\\ -38\frac{\delta(\xi)}{\alpha(\xi)})\rho(\xi)\,d\xi\leqslant\int\limits_0^t\frac{b(\xi,q)}{1+\alpha(\xi)\beta(\xi)}\rho(\xi)\,d\xi\quad \forall t\geqslant 0,\quad \forall q\geqslant 0.\end{aligned}$$

Второй интеграл в левой части этого неравенства преобразуем по частям:

$$\begin{aligned}|u(t)-u_*(q)|^2\rho(t)-|u(0)-u_*(q)|^2+\int\limits_0^t|u(\xi)-u_*(q)|^2\alpha(\xi)\beta(\xi)\rho(\xi)(\frac{1-38\sup\limits_{t\geqslant 0}\frac{\delta(t)}{\alpha(t)}}{1+\sup\limits_{t\geqslant 0}\alpha(t)\beta(t)}-\\ -\rho_0)\,d\xi\leqslant\int\limits_0^t\frac{b(\xi,q)}{1+\alpha(\xi)\beta(\xi)}\rho(\xi)\,d\xi\quad \forall t\geqslant 0,\ \ \forall q\geqslant 0.\end{aligned}$$

В силу (39) и условий (22) интеграл из левой части этого неравенства неотрицателен; заменив его нулем и положив $q = t$, получим

$$|u(t) - u_*(t)|^2 \leqslant \frac{|u_0 - u_*(t)|^2}{\rho(t)} + \frac{1}{\rho(t)} \int\limits_0^t \frac{b(\xi, t)}{1 + \alpha(\xi)\beta(\xi)} \rho(\xi) d\xi \quad \forall t \geqslant 0. \tag{40}$$

Функция $\alpha(t)$ выпукла и непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$, $\alpha'(t) \leqslant 0$, поэтому (см. [12], с. 185, теорема 2)

$$0 \leqslant \alpha(\xi) - \alpha(t) \leqslant \alpha'(\xi)(\xi - t) \quad \forall \xi, \ \ 0 \leqslant \xi \leqslant t.$$

Отсюда и из определения функции $b(\xi, t)$ (37) получаем

$$\begin{gathered} |u(t) - u_*(t)|^2 \leqslant \frac{|u_0 - u_*(t)|^2}{\rho(t)} + \frac{1}{\rho(t)} \int\limits_0^t \frac{88\beta(\xi)\delta(\xi)(1 + |v_*|)^2}{1 + \alpha(\xi)\beta(\xi)} \rho(\xi)\, d\xi + \\ + \frac{1}{\rho(t)} \int\limits_0^t \frac{\beta(\xi)\alpha'(\xi)(\xi - t)|v_*|^2}{1 + \alpha(\xi)\beta(\xi)} \rho(\xi)\, d\xi \quad \forall t \geqslant 0. \end{gathered} \tag{41}$$

Докажем, что

$$\lim_{t \to +\infty} |u(t) - u_*(t)| = 0. \tag{42}$$

Воспользуемся следующим утверждением ([12], с. 895–896, леммы 1 и 2).

Лемма. *Пусть функция $\gamma(t) > 0$ при $t \geqslant 0$, $\gamma(t) \in C^1[0, +\infty)$, $\gamma'(t) \leqslant 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)} = 0$; пусть $\rho(t) = \exp(\int\limits_0^t \gamma(\theta)\, d\theta)$. Тогда*

$$\lim_{t \to \infty} \gamma^n(t)\rho(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{\gamma^{n+1}(t)\rho(t)}{\frac{d}{dt}(\gamma^n(t)\rho(t))} = 1, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{43}$$

Нетрудно проверить, что функция $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$, $t \geqslant 0$, где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ взяты из условий (22)–(24), удовлетворяет условиям леммы. Поэтому из равенств (43) следует

$$\lim_{t \to \infty} \alpha^n(t)\beta^n(t)\rho(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{d}{dt}(\alpha^n(t)\beta^n(t)\rho(t))}{\alpha^{n+1}(t)\beta^{n+1}(t)\rho(t)} = 1, \quad n = 0, 1, \dots .$$

Отсюда из первого равенства при $n = 0$ получим $\lim\limits_{t \to \infty} \rho(t) = 0$, поэтому из ограниченности величины $|u_0 - u_*(t)| \leqslant |u_0| + |v_*|$ следует, что первое слагаемое из правой части неравенства (41) стремится к нулю при $t \to \infty$. Пределы второго и третьего слагаемого из правой части (41) нетрудно вычислить, пользуясь условиями (22)–(24) и известным правилом Лопиталя:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\int\limits_0^t \frac{88\beta(\xi)\delta(\xi)(1+|v_*|)^2}{1+\alpha(\xi)\beta(\xi)} \rho(\xi)\, d\xi}{\rho(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{88\beta(t)\delta(t)(1+|v_*|)^2}{1+\alpha(t)\beta(t)} \rho(t)}{\rho_0 \rho(t)\alpha(t)\beta(t)} = \lim_{t \to \infty} 88 \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} = 0,$$

$$\begin{gathered} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\rho(t)} \int\limits_0^t \frac{\beta(\xi)\alpha'(\xi)(\xi - t)|v_*|^2}{1 + \alpha(\xi)\beta(\xi)} \rho(\xi)\, d\xi = \lim_{t \to \infty} \int\limits_0^t \frac{\beta(\xi)\alpha'(\xi)(-1)|v_*|^2}{1 + \alpha(\xi)\beta(\xi)} \rho(\xi)\, d\xi \, \frac{1}{\rho_0(\alpha(t)\beta(t))\rho(t)} = \\ = \lim_{t \to \infty} \frac{\beta(t)\alpha'(t)(-1)\rho(t)}{1 + \alpha(t)\beta(t)} \frac{1}{(\alpha(t)\beta(t))^2 \rho(t)} \lim_{t \to \infty} \frac{(\alpha(t)\beta(t))^2 \rho(t)}{\frac{d}{dt}(\rho_0 \alpha(t)\beta(t)\rho(t))} = \lim_{t \to \infty} \frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)\beta(t)} = 0. \end{gathered}$$

Таким образом, равенство (42) доказано. Из (42) и (14) следует

$$0 \leqslant \lim_{t \to \infty} |u(t) - v_*| \leqslant \lim_{t \to \infty} (|u(t) - u_*(t)| + |u * (t) - v_*|) = 0.$$

Пределы здесь и в (42) равномерны относительно выбора входных данных, так как оценка (41) не зависит от выбора конкретных входных данных из условия (7). Теорема 1 доказана.

3. Регуляризованный дифференциальный прямой экстрапроксимальный метод. Оставляя в методе (17)–(21) обратную связь лишь по прямым переменным $x = (w, y)^\top$, придем к следующему методу:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau(x, \lambda(t), t) \mid x \in X_0\right\},\\
&\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\tau(\bar{x}(t), \lambda, t) \mid \lambda \in E_+^m\right\},\\
&\dot{x}(t) + x(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau(x, \dot{\lambda}(t) + \lambda(t), t) \mid x \in X_0\right\}, \quad t \geqslant 0,\\
&x(0) = x_0, \quad \lambda(0) = \lambda_0.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *система* (44) *имеет единственное решение* $u(t) = (x(t), \lambda(t))^\top$, $t \in [0, +\infty)$. *Тогда*

$$
\lim_{t \to \infty} |u(t) - v_*| = 0, \tag{45}
$$

причем сходимость в (45) *равномерна относительно выбора приближенных входных данных из условий* (7).

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, устанавливаем, что правая часть уравнений системы (44) определяется однозначно. Кроме того, из (44), (12) получаем неравенства

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,(1 + \alpha(t)\beta(t))|x - \bar{x}(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\,|x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau(x, \lambda(t), t) -\\
- \frac{1}{2}\,|\bar{x}(t) - x(t)|^2 - \beta(t)\tau(\bar{x}(t), \lambda(t), t) \quad \forall x \in X_0,
\end{aligned} \tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,(1 + \alpha(t)\beta(t))|\lambda - \dot{\lambda}(t) - \lambda(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\,|\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\tau(\bar{x}(t), \lambda, t) -\\
- \frac{1}{2}\,|\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) - \lambda(t)|^2 + \beta(t)\tau(\bar{x}(t), \dot{\lambda}(t) + \lambda(t), t) \quad \forall \lambda \in E_+^m,
\end{aligned} \tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,(1 + \alpha(t)\beta(t))|x - \dot{x}(t) - x(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\,|x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau(x, \dot{\lambda}(t) + \lambda(t), t) -\\
- \frac{1}{2}\,|\dot{x}(t) + x(t) - x(t)|^2 - \beta(t)\tau(\dot{x}(t) + x(t), \dot{\lambda}(t) + \lambda(t), t) \quad \forall x \in X_0,
\end{aligned} \tag{48}
$$

$$
0 \leqslant \beta(t)(T(x, \lambda_*(q), q) - T(x_*(q), \lambda_*(q), q)) \quad \forall x \in X_0, \tag{49}
$$

$$
0 \leqslant \beta(t)(-T(x_*(q), \lambda, q) + T(x_*(q), \lambda_*(q), q)) \quad \forall \lambda \in E_+^m. \tag{50}
$$

Положим в (46) $x = \dot{x}(t) + x(t)$, в (47) $\lambda = \lambda_*(q)$, в (48) $x = x_*(q)$, в (49) $x = \bar{x}(t)$, в (50) $\lambda = \dot{\lambda}(t) + \lambda(t)$ и сложим получившиеся неравенства. После простых преобразований с учетом определения функций $T(x, \lambda, t)$ (8), $\tau(x, \lambda, t)$ (9) получим

$$
\begin{aligned}
(1 + \alpha(t)\beta(t))(|\dot{x}(t) + x(t) - \bar{x}(t)|^2 + |\dot{x}(t) + x(t) - x_*(q)|^2 + |\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) - \lambda_*(q)|^2) +\\
+ |x(t) - \bar{x}(t)|^2 + |\dot{\lambda}(t)|^2 - |x(t) - x_*(q)|^2 - |\lambda(t) - \lambda_*(q)|^2 \leqslant \beta(t)(\alpha(t) -\\
- \alpha(q))(|x_*(q)|^2 + |\lambda_*(q)|^2 - |\bar{x}(t)|^2 - |\dot{\lambda}(t) + \lambda(t)|^2) + 2\beta(t)J_3 + 2\beta(t)J_4 \quad \forall t \geqslant 0, \ \ \forall q \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{51}
$$

где

$$
\begin{aligned}
J_3 = (\mathcal{L}(\dot{x}(t) + x(t), \lambda(t)) - \mathcal{L}(\bar{x}(t), \lambda(t))) + (-\mathcal{L}(\bar{x}(t), \dot{\lambda}(t) + \lambda(t)) + \mathcal{L}(\dot{x}(t) + x(t), \dot{\lambda}(t) +\\
+ \lambda(t))) = \langle \dot{\lambda}(t), B^\top(f(\bar{x}(t)) - f(\dot{x}(t) + x(t))) + (g(\bar{x}(t)) - g(\dot{x}(t) + x(t)))\rangle,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_4 = (\mathcal{L}(\dot{x}(t) + x(t), \lambda(t), t) - \mathcal{L}(\dot{x}(t) + x(t), \lambda(t))) + (-\mathcal{L}(\bar{x}(t), \lambda(t), t) + \mathcal{L}(\bar{x}(t), \lambda(t))) +\\
+ (-\mathcal{L}(\bar{x}(t), \lambda_*(q), t) + \mathcal{L}(\bar{x}(t), \lambda_*(q))) + (\mathcal{L}(\bar{x}(t), \dot{\lambda}(t) + \lambda(t), t) - \mathcal{L}(\bar{x}(t), \dot{\lambda}(t) + \lambda(t))) +\\
+ (\mathcal{L}(x_*(q), \dot{\lambda}(t) + \lambda(t), t) - \mathcal{L}(x_*(q), \dot{\lambda}(t) + \lambda(t))) + (-\mathcal{L}(\dot{x}(t) + x(t), \dot{\lambda}(t) + \lambda(t), t) +\\
+ \mathcal{L}(\dot{x}(t) + x(t), \dot{\lambda}(t) + \lambda(t))).
\end{aligned}
$$

Величины J_3, J_4 аналогичны J_1, J_2 и оцениваются аналогично. Из условия Липшица (6) следует

$$J_3 \leqslant 2L|\dot{\lambda}(t)|^2|\dot{x}(t)+x(t)-\bar{x}(t)|^2 \leqslant L(|\dot{x}(t)+x(t)-\bar{x}(t)|^2+|\dot{\lambda}(t)|^2),$$

а из условий (8), (11) на погрешность входных данных с помощью неравенства (34) получим

$$J_4 \leqslant \delta(t)(5|\dot{x}(t)+x(t)-\bar{x}(t)|^2+11|x(t)-\bar{x}(t)|^2+11|x(t)-x_*(q)|^2+ \\ +17|\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2+8|\dot{\lambda}(t)|^2+29(1+|v_*|)^2).$$

Подставив эти оценки в (51), получим

$$(1+\alpha(t)\beta(t))(|\dot{x}(t)+x(t)-x_*(q)|^2+|\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2)+|\dot{x}(t)+x(t)- \\ -\bar{x}(t)|^2(1+\alpha(t)\beta(t)-2\beta(t)L-10\beta(t)\delta(t))+|x(t)-\bar{x}(t)|^2(1-22\beta(t)\delta(t))+ \\ +|\dot{\lambda}(t)|^2(1-2\beta(t)L-16\beta(t)\delta(t))+(|x(t)-x_*(q)|^2+|\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2)(-1- \\ -34\beta(t)\delta(t))\leqslant 58\beta(t)\delta(t)(1+|v_*|)^2+\beta(t)(\alpha(t)-\alpha(q))(|x_*(q)|^2+|\lambda_*(q)|^2- \\ -|\bar{x}(t)|^2-|\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)|^2) \quad \forall t\geqslant 0,\ \ \forall q\geqslant 0.$$

Далее, пользуясь условиями (22)–(24) и действуя так же, как в аналогичных неравенствах (36)–(38), преобразуем эту оценку к следующему виду:

$$|\dot{u}(t)|^2+\frac{d}{dt}\,|u(t)-u_*(q)|^2+|u(t)-u_*(q)|^2\frac{\alpha(t)\beta(t)}{1+\alpha(t)\beta(t)}\left(1-38\frac{\delta(t)}{\alpha(t)}\right)\leqslant \\ \leqslant \frac{b(t,q)}{1+\alpha(t)\beta(t)} \quad \forall t\geqslant 0,\ \ \forall q\geqslant 0, \tag{52}$$

где в качестве $b(t,q)$ можно взять ту же функцию, что и в (37). Дальнейшее доказательство теоремы проводится аналогично тому, как это сделано в теореме 1 после формулы (38). Теорема 2 доказана.

4. Регуляризованный дифференциальный двойственный экстрапроксимальный метод. Оставляя в методе (17)–(21) обратную связь лишь по двойственным переменным $\lambda=(p,r)^\top$, получим следующий метод поиска точки равновесия седловой игры (1)–(4):

$$\begin{aligned} &\bar{\lambda}(t)=\operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|\lambda-\lambda(t)|^2-\beta(t)\tau(x(t),\lambda,t)\mid\lambda\in E^m_+\right\},\\ &\dot{x}(t)+x(t)=\operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|x-x(t)|^2+\beta(t)\tau(x,\bar{\lambda}(t),t)\mid x\in X_0\right\},\\ &\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)=\operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}|\lambda-\lambda(t)|^2-\beta(t)\tau(\dot{x}(t)+x(t),\lambda,t)\mid\lambda\in E^m_+\right\}, \quad t\geqslant 0,\\ &x(0)=x_0, \quad \lambda(0)=\lambda_0. \end{aligned} \tag{53}$$

Сходимость метода (53) исследуется по той же схеме, что и сходимость методов (17)–(21), (44). Сначала выписываем аналог неравенств (26)–(31), (46)–(50):

$$\frac{1}{2}\,(1+\alpha(t)\beta(t))|\lambda-\bar{\lambda}(t)|^2\leqslant\frac{1}{2}\,|\lambda-\lambda(t)|^2-\beta(t)\tau(x(t),\lambda,t)- \\ -\frac{1}{2}\,|\bar{\lambda}(t)-\lambda(t)|^2+\beta(t)\tau(x(t),\bar{\lambda}(t),t) \quad \forall\lambda\in E^m_+, \tag{54}$$

$$\frac{1}{2}\,(1+\alpha(t)\beta(t))|x-\dot{x}(t)-x(t)|^2\leqslant\frac{1}{2}\,|x-x(t)|^2+\beta(t)\tau(x,\bar{\lambda}(t),t)- \\ -\frac{1}{2}\,|\dot{x}(t)|^2-\beta(t)\tau(\dot{x}(t)+x(t),\bar{\lambda}(t),t) \quad \forall x\in X_0, \tag{55}$$

$$\frac{1}{2}\,(1+\alpha(t)\beta(t))|\lambda-\dot{\lambda}(t)-\lambda(t)|^2\leqslant\frac{1}{2}\,|\lambda-\lambda(t)|^2-\beta(t)\tau(\dot{x}(t)+x(t),\lambda,t)- \\ -\frac{1}{2}\,|\dot{\lambda}(t)|^2+\beta(t)\tau(\dot{x}(t)+x(t),\dot{\lambda}(t)+\lambda(t),t) \quad \forall\lambda\in E^m_+, \tag{56}$$

$$0\leqslant\beta(t)(T(x,\lambda_*(q),q)-T(x_*(q),\lambda_*(q),q)) \quad \forall x\in X_0, \tag{57}$$

$$0 \leqslant \beta(t)(-T(x_*(q),\lambda,q)+T(x_*(q),\lambda_*(q),q)) \quad \forall \lambda \in E^m_+. \tag{58}$$

Положим в (54) $\lambda=\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)$, в (55) $x=x_*(q)$, в (56) $\lambda=\lambda_*(q)$, в (57) $x=\dot{x}(t)+x(t)$, в (58) $\lambda=\bar{\lambda}(t)$ и сложим получившиеся неравенства:

$$\begin{gathered}(1+\alpha(t)\beta(t))(|\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\bar{\lambda}(t)|^2+|\dot{x}(t)+x(t)-x_*(q)|^2+|\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2)+\\ +|\bar{\lambda}(t)-\lambda(t)|^2+|\dot{x}(t)|^2-|x(t)-x_*(q)|^2-|\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2 \leqslant \beta(t)(\alpha(t)-\alpha(q))(|x_*(q)|^2+\\ +|\lambda_*(q)|^2-|\dot{x}(t)+x(t)|^2-|\bar{\lambda}(t)|^2)+2\beta(t)J_5+2\beta(t)J_6 \quad \forall t\geqslant 0,\ \ \forall q \geqslant 0,\end{gathered} \tag{59}$$

где

$$\begin{gathered}J_5=(-\mathcal{L}(x(t),\dot{\lambda}(t)+\lambda(t))+\mathcal{L}(x(t),\bar{\lambda}(t)))+(-\mathcal{L}(\dot{x}(t)+x(t),\bar{\lambda}(t))+\\ +\mathcal{L}(\dot{x}(t)+x(t),\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)))=\langle\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\bar{\lambda}(t),B^\top(f(\dot{x}(t)+x(t))-f(x(t)))+\\ +(g(\dot{x}(t)+x(t))-g(x(t)))\rangle \leqslant |\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\bar{\lambda}(t)|2L|\dot{x}(t)|^2 \leqslant L(|\dot{x}(t)|^2+\\ +|\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\bar{\lambda}(t)|^2),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}J_6=(-\mathcal{L}(x(t),\dot{\lambda}(t)+\lambda(t),t)+\mathcal{L}(x(t),\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)))+(\mathcal{L}(x(t),\bar{\lambda}(t),t)-\\ -\mathcal{L}(x(t),\bar{\lambda}(t)))+(\mathcal{L}(x_*(q),\bar{\lambda}(t),t)-\mathcal{L}(x_*(q),\bar{\lambda}(t)))+(-\mathcal{L}(\dot{x}(t)+x(t),\bar{\lambda}(t),t)+\\ +\mathcal{L}(\dot{x}(t)+x(t),\bar{\lambda}(t)))+(-\mathcal{L}(\dot{x}(t)+x(t),\lambda_*(q),t)+\mathcal{L}(\dot{x}(t)+x(t),\lambda_*(q)))+\\ +(\mathcal{L}(\dot{x}(t)+x(t),\dot{\lambda}(t)+\lambda(t),t)-\mathcal{L}(\dot{x}(t)+x(t),\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)))\leqslant\\ \leqslant \delta(t)(5|\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\bar{\lambda}(t)|^2+11|\bar{\lambda}(t)-\lambda(t)|^2+11|\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2+\\ +15|x(t)-x_*(q)|^2+8|\dot{x}(t)|^2+32(1+|v_*|)^2).\end{gathered}$$

Подставив оценки J_5 и J_6 в (59), получим

$$\begin{gathered}(1+\alpha(t)\beta(t))(|\dot{x}(t)+x(t)-x_*(q)|^2-|x(t)-x_*(q)|^2+|\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2-\\ -|\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2)+|\dot{\lambda}(t)+\lambda(t)-\bar{\lambda}(t)|^2(1+\alpha(t)\beta(t)-2\beta(t)L-10\beta(t)\delta(t))+\\ +|\bar{\lambda}(t)-\lambda(t)|^2(1-22\beta(t)\delta(t))+|\dot{x}(t)|^2(1-2\beta(t)L-16\beta(t)\delta(t))+(|x(t)-x_*(q)|^2+\\ +|\lambda(t)-\lambda_*(q)|^2)(1+\alpha(t)\beta(t)-1-30\beta(t)\delta(t))\leqslant 64\beta(t)\delta(t)(1+|v_*|)^2+\\ +\beta(t)(\alpha(t)-\alpha(q))(|x_*(q)|^2+|\lambda_*(q)|^2-|\dot{x}(t)+x(t)|^2-|\bar{\lambda}(t)|^2) \quad \forall t\geqslant 0,\ \ \forall q\geqslant 0.\end{gathered}$$

Используя функцию $u(t)=(x(t),\lambda(t))^\top$, эту оценку можно коротко записать в виде (38), (52). Сходимость метода к нормальной седловой точке игры (1)–(4) далее доказывается так же, как и в теореме 1.

5. Регуляризующий оператор. В прикладных задачах вместо приближенных данных

$$h=(S(x,t),f(x,t),g(x,t))$$

из условий (7) мы скорее всего будем иметь дело с приближениями $h_\delta=(S_\delta(x),f_\delta(x),g_\delta(x))$, $x\in X_0$, удовлетворяющими следующим условиям:

$$\max\{|S_\delta(x)-S(x)|,|f_\delta(x)-f(x)|,|g_\delta(x)-g(x)|\}\leqslant \delta(1+|x|), \quad x\in X_0, \tag{60}$$

где погрешность $\delta>0$ фиксирована и не обязательно стремится к нулю. Возникает вопрос, как, имея входные данные h_δ из (60), определить точку $u_\delta=(x_\delta,\lambda_\delta)^\top$, соответствующую уровню погрешности δ, которая при малых δ была бы близка к множеству U_*; или, иначе говоря, как построить оператор R_δ, который набору входных данных h_δ ставит в соответствие точку $u_\delta=R_\delta h_\delta$, такую, что

$$\lim_{\delta\to 0}\rho(R_\delta h_\delta,U_*)=0,$$

где $\rho(z,U_*)=\inf\limits_{u_*\in U_*}|z-u_*|$ — расстояние от точки z до множества U_*.

Оператор R_δ с таким свойством назовем *регуляризующим оператором.*

Покажем, что такой оператор R_δ можно построить, пользуясь приведенными выше методами (17)–(21), (44), (53). Проиллюстрируем сказанное, взяв для определенности метод (17)–(21). Зафиксируем какой-либо набор параметров $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\delta(t)$, удовлетворяющий условиям (22)–(25), а также начальную точку $u_0 = (x_0, \lambda_0)^\top$. Определим функцию

$$\tau_\delta(x,\lambda,t) = S_\delta(x) + \langle \lambda, B^\top f_\delta(x) + g_\delta(x)\rangle + \frac{\alpha(t)}{2}\left(|x|^2 - |\lambda|^2\right), \quad x \in X_0, \ \ \lambda \in E^m_+.$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
&\bar{x}(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau_\delta(x,\lambda(t),t) \mid x \in X_0\right\},\\
&\bar{\lambda}(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\tau_\delta(x(t),\lambda,t) \mid \lambda \in E^m_+\right\},\\
&\dot{x}(t) + x(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|x - x(t)|^2 + \beta(t)\tau_\delta(x,\bar{\lambda}(t),t) \mid x \in X_0\right\},\\
&\dot{\lambda}(t) + \lambda(t) = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}|\lambda - \lambda(t)|^2 - \beta(t)\tau_\delta(\bar{x}(t),\lambda,t) \mid \lambda \in E^m_+\right\}, \quad t \geqslant 0,\\
&x(0) = x_0, \quad \lambda(0) = \lambda_0,
\end{aligned} \tag{61}$$

полученную из (17)–(21) заменой функции $\tau(x,\lambda,t)$ на $\tau_\delta(x,\lambda,t)$. Будем предполагать, что выполнены условия 1–3, функции $S_\delta(x)$, $f_\delta(x)$, $g_\delta(x)$ полунепрерывны снизу и выпуклы на X_0, система (61) имеет решение $u = u_\delta(t) = (x_\delta(t), \lambda_\delta(t))^\top$, $t \geqslant 0$. Определим момент времени

$$t = t(\delta) = \sup\{t : \delta(s) > \delta, 0 \leqslant s \leqslant t\}; \tag{62}$$

при $\delta(0) \leqslant \delta$ будем считать, что $t(\delta) \overset{\text{def}}{=} 0$. Так как $\delta(t)$ — непрерывна при $t \geqslant 0$ и $\delta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то такой момент $t(\delta)$ будет конечным при каждом $\delta > 0$ и $\lim\limits_{\delta\to 0} t(\delta) = +\infty$.

Определим оператор R_δ следующим образом:

$$R_\delta h_\delta = u_\delta(t(\delta)) = (x_\delta(t(\delta)), \lambda_\delta(t(\delta)))^\top, \tag{63}$$

где $u_\delta(t)$ — решение системы (61). Убедимся, что такой оператор является регуляризующим.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия* 1–3, *входные данные* h_δ *взяты из* (60), *оператор* R_δ *определен согласно* (63). *Тогда*

$$\lim_{\delta\to 0} |R_\delta h_\delta - v_*| = 0, \tag{64}$$

где $v_* \in U_*$ *— нормальная седловая точка* (15).

Доказательство. Из (60), (62) следует, что

$$\max\{|S_\delta(x) - S(x)|; |f_\delta(x) - f(x)|; |g_\delta(x) - g(x)|\} \leqslant \delta(t)(1 + |x|) \quad \forall x \in X_0, \ \ 0 \leqslant t \leqslant t(\delta),$$

поэтому функции $S(x,t) = S_\delta(x)$, $f(x,t) = f_\delta(x)$, $g(x,t) = g_\delta(x)$ удовлетворяют условию (7) при всех t, $0 \leqslant t \leqslant t(\delta)$. Далее, из равенства $\lim\limits_{\delta\to+0} t(\delta) = +\infty$ следует, что при всех малых δ момент $t(\delta)$ в (31) можно сделать сколь угодно большим. Согласно теореме 1 при выполнении всех ее условий, включая условие 4, траектория $u(t)$, порождаемая методом (17)–(21), сходится к точке v_*, т.е. для любого $\epsilon > 0$ найдется момент $T = T(\epsilon)$, такой, что

$$|u(t) - v_*| < \epsilon \quad \forall t > T(\epsilon), \tag{65}$$

причем момент $T(\epsilon)$ не зависит от того, какие реализации $h = (S(x,t), f(x,t), g(x,t))$ из (7) выбраны. Так как $\lim\limits_{\delta\to 0} t(\delta) = +\infty$, то найдется такое $\delta(\epsilon) > 0$, что $t(\delta) \geqslant T(\epsilon)$ при всех δ, $0 < \delta < \delta(\epsilon)$. Это означает, что для всех δ, $0 < \delta < \delta(\epsilon)$, метод (61) при $0 \leqslant t \leqslant t(\delta)$, где $t(\delta)$ определено согласно (62), порождает траекторию $u_\delta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t(\delta)$, которую можно получить также и методом (17)–(21) с реализациями $h = h_\delta$ при $0 \leqslant t \leqslant t(\delta)$, удовлетворяющими, как ранее было показано, условию (7). Так как $t(\delta) \geqslant T(\epsilon)$, то, используя неравенство (65) при $t = t(\delta)$, получаем неравенство $|u_\delta(t(\delta)) - v_*| < \epsilon$, справедливое при всех δ, $0 < \delta < \delta(\epsilon)$. В силу произвольности $\epsilon > 0$ приходим к равенству (64). Теорема 3 доказана, т.е. R_δ — регуляризующий оператор.

Заметим, что на практике задачу Коши (61) можно решать, пользуясь известными численными методами [15]. В частности, применение метода Эйлера к системе (61) приведет к следующему итерационному процессу:

$$\bar{x}_k = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|x - x_k|^2 + \beta(t_k)\tau_\delta(x, \lambda_k, t_k) \mid x \in X_0\right\},$$

$$\bar{\lambda}_k = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}\,|\lambda - \lambda_k|^2 - \beta(t_k)\tau_\delta(x_k, \lambda, t_k) \mid \lambda \in E^m_+\right\},$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k} + x_k = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}|x - x_k|^2 + \beta(t_k)\tau_\delta(x, \bar{\lambda}_k, t_k) \mid x \in X_0\right\},$$

$$\frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\Delta t_k} + \lambda_k = \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2}|\lambda - \lambda_k|^2 - \beta(t_k)\tau_\delta(\bar{x}_k, \lambda, t_k) \mid \lambda \in E^m_+\right\}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$ — некоторая сетка на полуоси $[0, +\infty)$. Возможно применение других, более точных методов [15].

Аналогично строится регуляризующий оператор на базе методов (44), (53).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антипин А.С.* Методы решения систем задач выпуклого программирования // ЖВМ и МФ. 1987. **27**, № 3. 368–376.
2. *Антипин А.С.* О моделях взаимодействия предприятий-производителей, предприятий-потребителей и транспортной системы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. 105–113.
3. *Антипин А.С., Попова О.А.* О равновесной модели кредитного рынка: постановка задачи и методы решения // ЖВМ и МФ. 2009. **49**, № 3. 465–481.
4. *Антипин А.С.* Равновесное программирование: модели и методы решения // Изв. Иркутского гос. ун-та. Серия матем. 2009. **2**, № 1. 8–36.
5. *Васильев Ф.П., Антипин А.С., Артемьева Л.А.* Экстрапроксимальный метод решения седловых игр двух лиц // ЖВМ и МФ. 2011. **51**, № 9. 1576–1587.
6. *Васильев Ф.П., Антипин А.С., Артемьева Л.А.* Дифференциальный экстрапроксимальный метод решения седловых игр двух лиц // Дифференциальные уравнения. 2011. **47**, № 11. 1551–1563.
7. *Артемьева Л.А.* Дифференциальный экстраградиентный метод поиска точки равновесия в седловых играх двух лиц // Дифференциальные уравнения. 2012. **48**, № 1. 79–92.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
9. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
10. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
11. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
12. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: МЦНМО, 2011.
13. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Принцип построения и основные свойства замкнутых динамических систем с различными типами обратных связей // Динамика неоднородных систем. Тр. сем. ВНИИСИ. М., 1982. 5–27.
14. *Антипин А.С.* Управляемые проксимальные дифференциальные системы для решения седловых задач // Дифференциальные уравнения. 1992. **28**, № 11. 1846–1861.
15. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию
24.01.2012