УДК 519.3

# О МЕТОДАХ НАИСКОРЕЙШЕГО И ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**Г. Ш. Тамасян**[1]

Предлагается описание решения вариационной задачи для функционала, зависящего от производной третьего порядка. Рассматриваемая проблема условной оптимизации с помощью теории точных штрафных функций сводится к безусловной задаче. Для построенной штрафной функции разработаны "прямые" численные методы наискорейшего и гиподифференциального спуска. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09–01–00360).

**Ключевые слова:** негладкий анализ, недифференцируемая оптимизация, субдифференциал, кодифференциал, точная штрафная функция, вариационное исчисление.

**Введение**. В настоящее время негладкий анализ [1–8] бурно развивается во всем мире и все глубже проникает во многие разделы прикладной и чистой математики, механики [9, 10], медицины [11]. В работах [12–16] с помощью аппарата теории точных штрафных функций [12, 13, 17] и недифференцируемой оптимизации решены различные задачи вариационного исчисления и теории управления [3, 18, 19]. Цель настоящей статьи — подробно проиллюстрировать подход, описанный в [13], на примере вариационной задаче для функционалов, зависящих от производных третьего порядка.

Рассматриваемая проблема условной оптимизации с помощью теории точных штрафных функций сводится к безусловной задаче. Построенная штрафная функция исследуется в рамках теории "классической" вариации [20–23], выводятся условия экстремума, а на их основе разработаны "прямые" численные методы (наискорейшего и гиподифференциального спуска).

**1. Постановка задачи**. Пусть $T > 0$ фиксировано. Через $P^3[0,T]$ обозначим класс дважды непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций с кусочно-непрерывной и ограниченной на $[0,T]$ третьей производной. Если $x \in P^3[0,T]$ и $t_0 \in [0,T)$ — точка разрыва функции $x'''(t)$, то для определенности будем считать, что

$$x'''(t_0) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{x''(t_0+\alpha) - x''(t_0)}{\alpha}.$$

В точке $t = T$ полагаем

$$x'''(T) = \lim_{\alpha \uparrow 0} \frac{x''(T+\alpha) - x''(T)}{\alpha}.$$

Исследуем на экстремум функционал

$$I(x) = \int_0^T F\big(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t), t\big)\, dt,$$

где функцию $F$ будем считать непрерывно дифференцируемой по всем своим аргументам на $\mathbb{R}^4 \times [0,T]$, а граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x(0) = x_{10}, \quad x'(0) = x_{11}, \quad x''(0) = x_{12},\\ x(T) = x_{20}, \quad x'(T) = x_{21}, \quad x''(T) = x_{22}, \end{aligned} \tag{1}$$

т.е. в граничных точках заданы значения не только функции, но и ее производных до второго порядка включительно.

Требуется найти $x_* \in \Omega$, такое, что

$$I(x_*) = \min_{x \in \Omega} I(x), \tag{2}$$

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики – процессов управления, Петергоф, Университетский просп., д. 35, 198504, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: grigoriytamasjan@mail.ru

где

$$\Omega = \left\{x \in P^3[0,T] \,\middle|\, x(0)=x_{10},\ x'(0)=x_{11},\ x''(0)=x_{12},\ x(T)=x_{20},\ x'(T)=x_{21},\ x''(T)=x_{22}\right\}. \quad (3)$$

Кривую $x \in \Omega$ будем называть допустимой, а $x_* \in \Omega$, удовлетворяющей (2), назовем оптимальной.

**2. Эквивалентная постановка задачи.** Переформулируем поставленную выше задачу (2), (3). Обозначим через

$$z(t) = x'''(t), \quad z_2(t) = x''(t), \quad z_1(t) = x'(t);$$

тогда

$$\begin{aligned} z_2(t) &= x_{12} + \int\limits_0^t z(\gamma)\,d\gamma, \\ z_1(t) &= x_{11} + \int_0^t z_2(\tau)\,d\tau = x_{11} + tx_{12} + \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau z(\gamma)\,d\gamma\,d\tau, \\ x(t) &= x_{10} + \int\limits_0^t z_1(\tau)\,d\tau = x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}\,x_{12} + \int\limits_0^t \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau z(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Положим

$$Z = \left\{z \in P[0,T] \,\middle|\, x_{12} + \int\limits_0^T z(\gamma)\,d\gamma = x_{22},\ x_{11} + Tx_{12} + \int\limits_0^T \int\limits_0^\tau z(\gamma)\,d\gamma\,d\tau = x_{21},\right.$$
$$\left. x_{10} + Tx_{11} + \frac{T^2}{2}\,x_{12} + \int\limits_0^T \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau z(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi = x_{20}\right\}, \quad (5)$$

где $P[0,T]$ — множество кусочно-непрерывных и ограниченных на отрезке $[0,T]$ функций. Если $t_0 \in [0,T)$ — точка разрыва функции $z(t)$, то для определенности полагаем

$$z(t_0) = \lim_{t\downarrow t_0} z(t), \quad z(T) = \lim_{t\uparrow T} z(t).$$

Введем функционал

$$f(z) = \int\limits_0^T F\Bigg(x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}\,x_{12} + \int\limits_0^t \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau z(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi,$$
$$x_{11} + tx_{12} + \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau z(\gamma)\,d\gamma\,d\tau,\ x_{12} + \int\limits_0^t z(\gamma)\,d\gamma,\ z(t),\ t\Bigg)dt. \quad (6)$$

Покажем, что задача (2), (3)

$$I(x) \longrightarrow \min_{x\in\Omega} \quad (7)$$

эквивалентна задаче (5), (6)

$$f(z) \longrightarrow \min_{z\in Z} \quad (8)$$

в том смысле, что если $x_* \in \Omega$ — решение задачи (7), то функция $z_*(t) = x_*'''(t)$ является решением задачи (8); обратно, если $z_* \in Z$ доставляет минимум функционалу $f$ на множестве $Z$, то функция

$$x_*(t) = x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}\,x_{12} + \int\limits_0^t \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau z_*(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi$$

является решением задачи (7).

Действительно, пусть $x_* \in \Omega$ и
$$I(x_*) \leqslant I(x) \qquad \forall\, x \in \Omega.$$
Положим $z_*(t) = {x_*}'''(t)$ и возьмем любое $z \in Z$. Тогда функция
$$x(t) = x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}\, x_{12} + \int\limits_0^t \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau z(\gamma)\, d\gamma\, d\tau\, d\xi$$
принадлежит пространству $P^3[0,T]$ и удовлетворяет (1), т.е. $x \in \Omega$; следовательно,
$$f(z_*) = I(x_*) \leqslant I(x) = f(z).$$
Поскольку $z \in Z$ — произвольное, то $f(z_*) = \min\limits_{z \in Z} f(z)$, т.е. $z_*$ — решение задачи (8).

Пусть теперь $z_* \in Z$ и $f(z_*) \leqslant f(z)$ для всех $z \in Z$. Положим
$$x_*(t) = x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}\, x_{12} + \int\limits_0^t \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau z_*(\gamma)\, d\gamma\, d\tau\, d\xi.$$
Возьмем любое $x \in \Omega$. Тогда функция $z(t) = x'''(t)$ принадлежит пространству $P[0,T]$ и из (4), (5) следует, что $z \in Z$, поэтому
$$I(x_*) = f(z_*) \leqslant f(z) = I(x).$$
Поскольку $x \in \Omega$ — произвольное, то $I(x_*) = \min\limits_{x \in \Omega} I(x)$, т.е. $x_*$ — решение задачи (7).

Итак, если $z_* \in Z$ — точка глобального минимума функционала $f$ на множестве $Z$, то точка
$$x_*(t) = x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}\, x_{12} + \int\limits_0^t \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau z_*(\gamma)\, d\gamma\, d\tau\, d\xi \in \Omega \tag{9}$$
является точкой глобального минимума функционала $I(x)$ на $\Omega$; обратно, если $x_* \in \Omega$ — точка глобального минимума функционала $I(x)$ на $\Omega$, то точка $z_*(t) = x_*'''(t) \in Z$ является точкой глобального минимума $f$ на $Z$.

**3. Точная штрафная функция.** Рассмотрим задачу минимизации функционала (6):
$$f(z) = \int_0^T F\Bigg(x_{10} + tx_{11} + \frac{t^2}{2}\, x_{12} + \int\limits_0^t \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau z(\gamma)\, d\gamma\, d\tau\, d\xi,$$
$$x_{11} + tx_{12} + \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau z(\gamma)\, d\gamma\, d\tau,\ x_{12} + \int\limits_0^t z(\gamma)\, d\gamma,\ z(t),\ t\Bigg) dt$$
на множестве $Z \subset P[0,T]$, заданном соотношением (5). Множество $Z$ можно представить в эквивалентном виде
$$Z = \{z \in P[0,T] \bigm| \varphi(z) = 0\}, \tag{10}$$
где
$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^3 \varphi_k(z), \tag{11}$$
$$\varphi_1(z) = \Bigg|\int\limits_0^T z(\gamma)\, d\gamma - x_{22} + x_{12}\Bigg|, \quad \varphi_2(z) = \Bigg|\int\limits_0^T \int\limits_0^\tau z(\gamma)\, d\gamma\, d\tau - x_{21} + x_{11} + Tx_{12}\Bigg|,$$
$$\varphi_3(z) = \Bigg|\int\limits_0^T \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau z(\gamma)\, d\gamma\, d\tau\, d\xi - x_{20} + x_{10} + Tx_{11} + \frac{T^2}{2}\, x_{12}\Bigg|.$$

Пусть $\lambda \geqslant 0$ фиксировано. Введем функцию

$$\Phi_\lambda(z) = f(z) + \lambda\varphi(z).$$

Функция $\Phi_\lambda(z)$ называется *штрафной функцией*, а число $\lambda$ — *штрафным параметром*. В [12, 13] формулируются теоремы, при выполнении которых $\Phi_\lambda(z)$ является функцией точного штрафа.

Пусть $y_1,\ y_2 \in P[0,T]$. На множестве $P[0,T]$ введем в рассмотрение следующие метрики:

$$\rho_1(y_1,y_2) = \max_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\int_0^\xi\int_0^\tau \big(y_1(\gamma)-y_2(\gamma)\big)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi\right|,$$

$$\rho_2(y_1,y_2) = \max_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\int_0^\xi\int_0^\tau \big(y_1(\gamma)-y_2(\gamma)\big)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi\right| + \max_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\int_0^\tau \big(y_1(\gamma)-y_2(\gamma)\big)\,d\gamma\,d\tau\right| +$$
$$+ \max_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \big(y_1(\gamma)-y_2(\gamma)\big)\,d\gamma\right| + \sup_{t\in[0,T]}\big|y_1(t)-y_2(t)\big|,$$

$$\rho_3(y_1,y_2) = \sup_{t\in[0,T]}\big|y_1(t)-y_2(t)\big|.$$

Между метриками $\rho_1$, $\rho_2$ и $\rho_3$ существует следующая связь:

$$\rho_1(y_1,y_2) \leqslant \rho_2(y_1,y_2) \leqslant \left[1+T+\frac{T^2}{2!}+\frac{T^3}{3!}\right]\rho_3(y_1,y_2),$$
$$\rho_1(y_1,y_2) \leqslant \frac{T^3}{3!}\,\rho_3(y_1,y_2), \quad \rho_3(y_1,y_2) \leqslant \rho_2(y_1,y_2).$$

Таким образом, метрика $\rho_3$ мажорирует метрики $\rho_2$ и $\rho_1$, а метрика $\rho_2$ мажорирует метрики $\rho_1$ и $\rho_3$. Отсюда следует, что метрики $\rho_2$ и $\rho_3$ эквивалентны.

Пусть $\varepsilon > 0$. Если $z_* \in Z$ — точка локального минимума функционала $f$ на множестве $Z$, то справедливы следующие включения:

$$\left\{z \mid \rho_3(z,z_*) < \varepsilon\left[\sum_{k=0}^{3}\frac{T^k}{k!}\right]^{-1}\right\} \subset \Big\{z \mid \rho_2(z,z_*) < \varepsilon\Big\} \subset \Big\{z \mid \rho_1(z,z_*) < \varepsilon\Big\}.$$

Отсюда заключаем, что точка локального минимума функции $f$ на множестве $Z$ в метрике $\rho_1$ является точкой локального минимума и в метрике $\rho_2$, и в метрике $\rho_3$. В силу эквивалентности метрик $\rho_2$ и $\rho_3$ точка локального минимума функции $f$ в метрике $\rho_2$ является точкой локального минимума и в метрике $\rho_3$ (справедливо и обратное). Теперь нетрудно заметить, что если $z_* \in Z$ является точкой локального минимума функционала $f$ на множестве $Z$ с метрикой $\rho_1$, то функция $x_*(t)$ (см. 9) принадлежит множеству $\Omega$ и является сильной экстремалью функционала $I(x)$ на множестве $\Omega$.

Если же $z_* \in Z$ является точкой локального минимума функционала $f$ на множестве $Z$ с метрикой $\rho_2$ или $\rho_3$, то функция $x_*(t)$ (см. 9) является слабой экстремалью функционала $I(x)$ на множестве $\Omega$.

Далее нам потребуется следующая

**Теорема 1** [13]. *Пусть функция $f$ липшицева на множестве $Z_\varepsilon = \big\{z \in P[0,T] \bigm| \varphi(z) < \varepsilon\big\}$ в метрике $\rho_i$. Если $z_* \in Z$ — точка локального минимума функции $f$ на множестве $Z$ в метрике $\rho_i$, то найдется $\lambda^* < \infty$, такое, что при $\lambda > \lambda^*$ точка $z_*$ является точкой локального минимума функционала $\Phi_\lambda(z) = f(z) + \lambda\varphi(z)$ на всем пространстве $P[0,T]$ в той же метрике $\rho_i$.*

Для доказательства теоремы 1 надо показать, что существуют $a > 0$, $\delta > 0$ и окрестность

$$B_\delta(z_*) = \big\{z \in P[0,T] \bigm| \rho_i(z,z_*) < \delta\big\}$$

точки $z_*$, такие, что

$$\varphi^{\downarrow}(z) = \liminf_{\substack{y\in P[0,T]\\ y\to z}} \frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{\rho_i(y,z)} \leqslant -a < 0 \quad \forall\, z \in B_\delta(z_*)\backslash z_*. \tag{12}$$

**4. Классическая вариация функции $\varphi$ и ее свойства.** Изучим подробней свойства функции

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{3} \varphi_k(z) = \sum_{k=1}^{3} |\overline{\varphi}_k(z)|,$$

где (см. (11))

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_1(z) = \int_0^T z(\gamma)\,d\gamma - A_1, \quad A_1 = x_{22} - x_{12},\\
&\overline{\varphi}_2(z) = \int_0^T \int_0^\tau z(\gamma)\,d\gamma\,d\tau - A_2, \quad A_2 = x_{21} - (x_{11} + Tx_{12}),\\
&\overline{\varphi}_3(z) = \int_0^T \int_0^\xi \int_0^\tau z(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi - A_3, \quad A_3 = x_{20} - \left(x_{10} + Tx_{11} + \frac{T^2}{2}\,x_{12}\right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть $z \in P[0,T]$ фиксировано, $\varepsilon > 0$. Выберем произвольное $v \in P[0,T]$ и положим

$$z_\varepsilon(t) = z(t) + \varepsilon v(t). \tag{14}$$

Функция $\Delta z_\varepsilon(t) = z_\varepsilon(t) - z(t) = \varepsilon v(t)$ называется *классической вариацией* кривой $z$.

Используя (4) и (14), получим вариации кривых $z_1(t)$, $z_2(t)$ и $x(t)$. Имеем

$$\begin{aligned}
z_{2\varepsilon}(t) &= x_{12} + \int_0^t z_\varepsilon(\gamma)\,d\gamma = z_2(t) + \varepsilon \int_0^t v(\gamma)\,d\gamma,\\
z_{1\varepsilon}(t) &= x_{11} + \int_0^t z_{2\varepsilon}(\tau)\,d\tau = z_1(t) + \varepsilon \int_0^t \int_0^\tau v(\gamma)\,d\gamma\,d\tau,\\
x_\varepsilon(t) &= x_{10} + \int_0^t z_{1\varepsilon}(\tau)\,d\tau = x(t) + \varepsilon \int_0^t \int_0^\xi \int_0^\tau v(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi.
\end{aligned} \tag{15}$$

Несложно убедиться в том, что справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^t v(\gamma)\,d\gamma\,dt &= \int_0^T (T-t)v(t)\,dt,\\
\int_0^T \int_0^t \int_0^\tau v(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,dt &= \int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!}\,v(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{16}$$

Применяя классическую вариацию (14) и выражения (15), (16) из (13), имеем

$$\overline{\varphi}_1(z_\varepsilon) = \int_0^T z_\varepsilon(t)\,dt - A_1 = \overline{\varphi}_1(z) + \varepsilon \int_0^T v(t)\,dt, \tag{17}$$

$$\overline{\varphi}_2(z_\varepsilon) = \int_0^T \int_0^\tau z_\varepsilon(\gamma)\,d\gamma\,d\tau - A_2 = \overline{\varphi}_2(z) + \varepsilon \int_0^T \int_0^\tau v(\gamma)\,d\gamma\,d\tau = \overline{\varphi}_2(z) + \varepsilon \int_0^T (T-t)v(t)\,dt, \tag{18}$$

$$\overline{\varphi}_3(z_\varepsilon) = \int_0^T \int_0^t \int_0^\tau z_\varepsilon(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,dt - A_3 = \overline{\varphi}_3(z) + \varepsilon \int_0^T \int_0^t \int_0^\tau v(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,dt = \overline{\varphi}_3(z) + \varepsilon \int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!}\,v(t)\,dt. \tag{19}$$

Если $z \in Z$, то $\overline{\varphi}_1(z) = \overline{\varphi}_2(z) = \overline{\varphi}_3(z) = 0$; из (17)–(19) получаем явный вид производной функции $\varphi(z)$ в точке $z$ по направлению $v$:

$$\varphi'(z,v) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\varphi(z+\varepsilon v)-\varphi(z)}{\varepsilon} = \left|\int_0^T v(t)\,dt\right| + \left|\int_0^T (T-t)v(t)\,dt\right| + \left|\int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!}\,v(t)\,dt\right|. \tag{20}$$

Несложно проверить, что это выражение можно переписать в форме

$$\varphi'(z,v) = \max_{\substack{w_k\in[-1,1]\\ k=\overline{1,3}}} \int_0^T \left[w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\,w_3\right] v(t)\,dt. \tag{21}$$

Из (21) заключаем, что функция $\varphi(z)$ субдифференцируема в точке $z$, причем ее субдифференциал $\partial\varphi(z)$ имеет вид

$$\partial\varphi(z) = \mathrm{co}\left\{ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\,w_3 \;\middle|\; w_k \in [-1,1],\ k=\overline{1,3}\right\},$$

т.е.

$$\varphi'(z,v) = \max_{W\in\partial\varphi(z)} \int_0^T W(t)v(t)\,dt.$$

Пусть теперь $z \notin Z$, т.е. $\varphi(z) > 0$. Рассмотрим производную функции $\varphi(z)$ в точке $z$ по направлению $v$ и покажем справедливость соотношения (12). Возможны следующие семь случаев.

1. Если $\overline{\varphi}_1(z) \neq 0$, $\overline{\varphi}_2(z) \neq 0$ и $\overline{\varphi}_3(z) \neq 0$, то

$$\varphi'(z,v) = \int_0^T \left[w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\,w_3\right] v(t)\,dt, \tag{22}$$

где $w_1 = \mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_1(z)$, $w_2 = \mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z)$ и $w_3 = \mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)$. Из (22) заключаем, что функция $\varphi$ дифференцируема в точке $z$ по Гато, причем ее градиент $\dfrac{\partial\varphi(z)}{\partial z}$ представляется в виде

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z} = \mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_1(z) + (T-t)\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z).$$

2. Если $\overline{\varphi}_1(z) = 0$, $\overline{\varphi}_2(z) \neq 0$ и $\overline{\varphi}_3(z) \neq 0$, то

$$\varphi'(z,v) = \max_{w_1\in[-1,1]} \int_0^T \left[w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\,w_3\right] v(t)\,dt, \tag{23}$$

где в зависимости от знака функций $\overline{\varphi}_2(z)$ и $\overline{\varphi}_3(z)$ имеем либо $w_2 = 1$, $w_3 = 1$, либо $w_2 = -1$, $w_3 = 1$, либо $w_2 = 1$, $w_3 = -1$, либо $w_2 = -1$, $w_3 = -1$. Из (23) заключаем, что функция $\varphi$ субдифференцируема в точке $z$, причем ее субдифференциал $\partial\varphi(z)$ принимает вид

$$\partial\varphi(z) = \mathrm{co}\left\{1 + (T-t)\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z),\ -1 + (T-t)\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right\}.$$

3. Аналогично, если $\overline{\varphi}_1(z) \neq 0$, $\overline{\varphi}_2(z) = 0$ и $\overline{\varphi}_3(z) \neq 0$, то

$$\partial\varphi(z) = \mathrm{co}\left\{\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_1(z) + T - t + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z),\ \mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_1(z) - (T-t) + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right\}.$$

4. Если $\overline{\varphi}_1(z) \neq 0$, $\overline{\varphi}_2(z) \neq 0$ и $\overline{\varphi}_3(z) = 0$, то

$$\partial\varphi(z) = \mathrm{co}\left\{\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_1(z) + (T-t)\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!},\ \mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_1(z) + (T-t)\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) - \frac{(T-t)^2}{2!}\right\}.$$

5. Если $\overline{\varphi}_1(z)=0$, $\overline{\varphi}_2(z)=0$ и $\overline{\varphi}_3(z)\neq 0$, то

$$\varphi'(z,v)=\max_{w_1,w_2\in[-1,1]}\int\limits_0^T\left[w_1+(T-t)w_2+\frac{(T-t)^2}{2!}w_3\right]v(t)\,dt, \tag{24}$$

где в зависимости от знака функции $\overline{\varphi}_3(z)$ имеем либо $w_3=1$, либо $w_3=-1$. Из (24) заключаем, что функция $\varphi$ субдифференцируема в точке $z$, причем ее субдифференциал $\partial\varphi(z)$ имеет вид

$$\partial\varphi(z)=\mathrm{co}\biggl\{1+T-t+\frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z),1-(T-t)+\frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z),$$
$$-1+T-t+\frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z),-1-(T-t)+\frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\biggr\}. \tag{25}$$

6. Аналогично случаю 5, если $\overline{\varphi}_1(z)=0$, $\overline{\varphi}_2(z)\neq 0$ и $\overline{\varphi}_3(z)=0$, то

$$\partial\varphi(z)=\mathrm{co}\biggl\{1+(T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z)+\frac{(T-t)^2}{2!},1+(T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z)-\frac{(T-t)^2}{2!},$$
$$-1+(T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z)+\frac{(T-t)^2}{2!},-1+(T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z)-\frac{(T-t)^2}{2!}\biggr\}.$$

7. Если $\overline{\varphi}_1(z)\neq 0$, $\overline{\varphi}_2(z)=0$ и $\overline{\varphi}_3(z)=0$, то

$$\partial\varphi(z)=\mathrm{co}\biggl\{\operatorname{sign}\overline{\varphi}_1(z)+T-t+\frac{(T-t)^2}{2!},\operatorname{sign}\overline{\varphi}_1(z)+T-t-\frac{(T-t)^2}{2!},$$
$$\operatorname{sign}\overline{\varphi}_1(z)-(T-t)+\frac{(T-t)^2}{2!},\operatorname{sign}\overline{\varphi}_1(z)-(T-t)-\frac{(T-t)^2}{2!}\biggr\}. \tag{26}$$

Покажем справедливость соотношения (12) в каждом из семи случаев.

В случае 1 для любого $\alpha>0$ положим $z_\alpha(t)=z(t)+\alpha v^*(t)$, где

$$v^*(t)=-\left[\operatorname{sign}\overline{\varphi}_1(z)+(T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z)+\frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right].$$

Тогда, используя (17)–(19), получим

$$\varphi(z_\alpha)=\varphi(z)+\alpha\int\limits_0^T\left[\operatorname{sign}\overline{\varphi}_1(z)+(T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z)+\frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]v^*(t)\,dt=$$
$$=\varphi(z)-\alpha H_1^*(z)+o(\alpha), \tag{27}$$

где $\dfrac{o(\alpha)}{\alpha}\xrightarrow[\alpha\downarrow 0]{}0$ и

$$H_1^*(z)=T+T^2\operatorname{sign}\overline{\varphi}_1(z)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z)+\frac{T^3}{3}\bigl(1+\operatorname{sign}\overline{\varphi}_1(z)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\bigr)+\frac{T^4}{4}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)+\frac{T^5}{20}.$$

Заметим, что $H_1^*(z)>0$ для всех $T>0$, $z\in P[0,T]$.

Далее,

$$\rho_1(z_\alpha,z)=\max_{t\in[0,T]}\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\tau\alpha v^*(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi\right|=$$
$$=\alpha\max_{t\in[0,T]}\left|\int\limits_0^t\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\tau\left(\operatorname{sign}\overline{\varphi}_1(z)+(T-\gamma)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z)+\frac{(T-\gamma)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right)d\gamma\,d\tau\,d\xi\right|=$$
$$=\alpha A_{11}(z), \tag{28}$$

$$\rho_2(z_\alpha, z) = \alpha A_{12}(z), \tag{29}$$

$$\rho_3(z_\alpha, z) = \sup_{t\in[0,T]} \left|\alpha v^*(t)\right| = \alpha \sup_{t\in[0,T]} \left|\operatorname{sign}\overline{\varphi}_1(z) + (T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right| = \alpha A_{13}(z). \tag{30}$$

Из (12) имеем

$$\varphi^{\downarrow}(z) = \liminf_{\substack{y\in P[0,T]\\ y\to z}} \frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{\rho_i(y,z)} \leqslant \liminf_{\alpha\downarrow 0} \frac{\varphi(z_\alpha)-\varphi(z)}{\rho_i(z_\alpha, z)} \quad \forall\, i = \overline{1,3}. \tag{31}$$

Подставляя (27)–(30) в (31), получим

$$\varphi^{\downarrow}(z) \leqslant -\frac{H_1^*(z)}{A_{1i}(z)} < 0 \quad \forall\, i = \overline{1,3}. \tag{32}$$

В случае 2 субдифференциал $\partial\varphi(z)$, в отличие от случая 1, не состоит из одной точки, поэтому вначале найдем $\min\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} h(\alpha) = h(\alpha^*)$ (в частном случае решение этой задачи совпадает с решением задачи $\|v\|^2 \to \min\limits_{v\in\partial\varphi(z)}$), где

$$h(\alpha) = \int_0^T \left[\alpha + (T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]^2 dt.$$

Функция $h(\alpha)$ является полиномом второго порядка (парабола с ветвями вверх), поэтому минимум достигается в единственной точке

$$\alpha^* = -\frac{T}{2}\left[\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z) + \frac{T}{3}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]. \tag{33}$$

Ниже нам потребуется следующее неравенство. Покажем, что

$$\int_0^T \left[\alpha + \sum_{k=1}^{2} \frac{(T-t)^k}{k!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_{k+1}(z)\right]\left[\alpha^* + \sum_{k=1}^{2} \frac{(T-t)^k}{k!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_{k+1}(z)\right] dt \geqslant$$

$$\geqslant h(\alpha^*) = \int_0^T \left[\alpha^* + (T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]^2 dt \quad \forall\, \alpha\in\mathbb{R}. \tag{34}$$

Допустим противное. Предположим, что для некоторого $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ оказалось, что

$$\int_0^T \left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^{2} \frac{(T-t)^k}{k!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_{k+1}(z)\right]\left[\alpha^* + \sum_{k=1}^{2} \frac{(T-t)^k}{k!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_{k+1}(z)\right] dt - h(\alpha^*) = -a < 0.$$

Для $\alpha_\gamma = \alpha^* + \gamma(\alpha_0 - \alpha^*)$ имеем

$$h(\alpha_\gamma) = \int_0^T \left[\alpha_\gamma + (T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left[\alpha^* + \gamma(\alpha_0-\alpha^*) + (T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left(\left[\alpha^* + (T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + 2\gamma(\alpha_0-\alpha^*)\left[\alpha^* + (T-t)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right] + \gamma^2(\alpha_0-\alpha^*)^2\right) dt =$$

$$= h(\alpha^*) + 2\gamma[-a] + o(\gamma).$$

Так как $a > 0$, то при достаточно малых $\gamma > 0$ окажется $h(\alpha_\gamma) < h(\alpha^*)$, что противоречит тому, что $\alpha^*$ — точка минимума функции $h(\alpha)$. Итак, неравенство (34) доказано.

Возьмем $v^*(t) = -\left[\alpha^* + (T-t)\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) + \dfrac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right]$ и для любого $\alpha > 0$ положим $z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v^*(t)$. Из (23) и (34) получим

$$\varphi'(z, v^*) = \max_{w_1\in[-1,1]} \int\limits_0^T \left[w_1 + (T-t)\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right] v^*(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{w_1\in\mathbb{R}} \int\limits_0^T \left[w_1 + (T-t)\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right] v^*(t)\,dt =$$

$$= -\min_{w_1\in\mathbb{R}} \int\limits_0^T \left[w_1 + (T-t)\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right] (-v^*(t))\,dt = -h(\alpha^*) =: -H_2^*(z). \tag{35}$$

Тогда

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha\varphi'(z, v^*) + o(\alpha) \leqslant \varphi(z) - \alpha H_2^*(z) + o(\alpha), \tag{36}$$

где $H_2^*(z) > 0$ для всех $T > 0$. Так как $\alpha^* = -\dfrac{T}{2}\left[\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) + \dfrac{T}{3}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right]$, то $v^*(t) = \left(t - \dfrac{T}{2}\right)\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_2(z) - \left(\dfrac{T^2}{3} - Tt + \dfrac{t^2}{2}\right)\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)$.

Далее, аналогично первому случаю имеем

$$\rho_k(z_\alpha, z) = \alpha A_{2k}(z), \quad k = \overline{1,3}. \tag{37}$$

Подставляя (35)–(37) в (31), получим

$$\varphi_i^{\downarrow}(z) \leqslant -\frac{H_2^*(z)}{A_{2i}(z)} < 0 \quad \forall\, i = \overline{1,3}. \tag{38}$$

Аналогично доказываются случаи 3 и 4.

Рассмотрим случай 5. Как и в случае 2, вначале найдем $\min\limits_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}} h(\alpha_1,\alpha_2) = h(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$, где (см. (25))

$$h(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_0^T \left[\alpha_1 + (T-t)\alpha_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right]^2 dt.$$

Функция $h(\alpha_1,\alpha_2)$ является положительно определенной квадратичной формой, поэтому минимум достигается в единственной точке. Действительно,

$$h(\alpha_1,\alpha_2) = T\alpha_1^2 + \frac{T^3}{3}\,\alpha_2^2 + T^2\alpha_1\alpha_2 + \frac{T^3}{3}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\alpha_1 + \frac{T^4}{4}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\alpha_2 + \frac{T^5}{20}.$$

Найдем частные производные функции $h(\alpha_1,\alpha_2)$ по $\alpha_1$, $\alpha_2$ и приравняем их к нулю. В результате получим линейную систему. Решением этой системы, которое существует и единственно, является точка минимума функции $h(\alpha_1,\alpha_2)$:

$$\alpha_1^* = \frac{T^2}{12}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z), \quad \alpha_2^* = -\frac{T}{2}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z).$$

Покажем, что

$$\int\limits_0^T \left[\alpha_1 + (T-t)\alpha_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right]\left[\alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right] dt \geqslant$$

$$\geqslant h(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \int\limits_0^T \left[\alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!}\,\mathrm{sign}\,\overline{\varphi}_3(z)\right]^2 dt \quad \forall\, \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

Допустим противное. Предположим, что для некоторых $\widetilde{\alpha}_1,\, \widetilde{\alpha}_2 \in \mathbb{R}$ оказалось, что

$$\int\limits_0^T \left[\widetilde{\alpha}_1 + (T-t)\widetilde{\alpha}_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]\left[\alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]dt -$$

$$- h(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \int\limits_0^T \Big[(\widetilde{\alpha}_1 - \alpha_1^*) + (T-t)(\widetilde{\alpha}_2 - \alpha_2^*)\Big]\left[\alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]dt = -a < 0. \quad (40)$$

Далее, пусть $\overline{\alpha}_1 = \alpha_1^* + \gamma(\widetilde{\alpha}_1 - \alpha_1^*)$, $\overline{\alpha}_2 = \alpha_2^* + \gamma(\widetilde{\alpha}_2 - \alpha_2^*)$, тогда (учитывая (40))

$$h(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2) = \int\limits_0^T \left[\overline{\alpha}_1 + (T-t)\overline{\alpha}_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]^2 dt =$$

$$= \int\limits_0^T \left[\alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z) + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z) + \right.$$

$$\left. + \gamma\big\{(\widetilde{\alpha}_1 - \alpha_1^*) + (T-t)(\widetilde{\alpha}_2 - \alpha_2^*)\big\}\right]^2 dt = h(\alpha_1^*, \alpha_2^*) + 2\gamma[-a] + o(\gamma).$$

Так как $a > 0$, то при достаточно малых $\gamma > 0$ окажется $h(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2) < h(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$, что противоречит тому, что $\alpha^*$ — точка минимума функции $h(\alpha_1, \alpha_2)$. Итак, неравенство (39) доказано.

Возьмем $v^*(t) = -\left[\alpha_1^* + (T-t)\alpha_2^* + \dfrac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right]$ и для любого $\alpha > 0$ положим $z_\alpha(t) = z(t) + \alpha v^*(t)$. Из (24) и (39) получим

$$\varphi'(z, v^*) = \max_{w_1, w_2 \in [-1,1]} \int\limits_0^T \left[w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right] v^*(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{w_1, w_2 \in \mathbb{R}} \int\limits_0^T \left[w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right] v^*(t)\, dt =$$

$$= -\min_{w_1, w_2 \in \mathbb{R}} \int\limits_0^T \left[w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)\right] (-v^*(t))\, dt =$$

$$= -h(\alpha_1^*, \alpha_2^*) =: -H_5^*(z). \quad (41)$$

Тогда

$$\varphi(z_\alpha) = \varphi(z) + \alpha\varphi'(z, v^*) + o(\alpha) \leqslant \varphi(z) - \alpha H_5^*(z) + o(\alpha), \quad (42)$$

где $H_5^*(z) > 0$ для всех $T > 0$. Так как $\alpha_1^* = \dfrac{T^2}{12}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)$, $\alpha_2^* = -\dfrac{T}{2}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z)$, то

$$v^*(t) = -\left(\frac{T^2}{12} - \frac{Tt}{2} + \frac{t^2}{2}\right)\operatorname{sign}\overline{\varphi}_3(z).$$

Далее, находим

$$\rho_k(z_\alpha, z) = \alpha A_{5k}(z), \quad k = \overline{1,3}. \quad (43)$$

Подставляя (41)–(43) в (31), получим

$$\varphi^{\downarrow}(z) \leqslant -\frac{H_5^*(z)}{A_{5i}(z)} < 0 \quad \forall\, i = \overline{1,3}. \quad (44)$$

Аналогично случаю 5 доказываются случаи 6 и 7.

Итак, справедливость теоремы 1 и оценки (12) вытекает из полученных выше неравенств (32), (38) и (44).

Таким образом, задача минимизации функционала $f$ на множестве $Z$ сведена к задаче минимизации функционала $\Phi_\lambda(z)$ на всем пространстве $P[0,T]$ при $\lambda > \lambda^*$.

**5. Классическая вариация функционала** $f(z)$**.** Для классической вариации (14), (15) имеем

$$f(z_\varepsilon) = \int_0^T F\big(x_\varepsilon, z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}, z_\varepsilon, t\big)\,dt = \int_0^T F\Bigg(x(t) + \varepsilon\int_0^t\int_0^\xi\int_0^\tau v(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi,$$

$$z_1(t) + \varepsilon\int_0^t\int_0^\tau v(\gamma)\,d\gamma d\tau,\ z_2(t) + \varepsilon\int_0^t v(\gamma)\,d\gamma,\ z(t)+\varepsilon v(t), t\Bigg)\,dt =$$

$$= \int_0^T F\big(x, z_1, z_2, z, t\big)\,dt + \varepsilon\int_0^T\Bigg[\frac{\partial F(t)}{\partial x}\int_0^t\int_0^\xi\int_0^\tau v(\gamma)\,d\gamma\,d\tau\,d\xi +$$

$$+ \frac{\partial F(t)}{\partial z_1}\int_0^t\int_0^\tau v(\gamma)\,d\gamma\,d\tau + \frac{\partial F(t)}{\partial z_2}\int_0^t v(\gamma)\,d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z}\,v(t)\Bigg]dt + o(\varepsilon, v), \quad (45)$$

где $F(t) = F\big(x, z_1, z_2, z, t\big)$, $\dfrac{o(\varepsilon, v)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$ равномерно по $v$ при $\sup\limits_{t\in[0,T]} |v(t)| \leqslant 1$.

Интегрируя по частям второе слагаемое в (45) и используя (16), имеем

$$f(z_\varepsilon) = f(z) + \varepsilon\int_0^T\Bigg[\int_t^T \frac{(\gamma-t)^2}{2!}\,\frac{\partial F(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma +$$

$$+ \int_t^T (\gamma - t)\,\frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_1}\,d\gamma + \int_t^T \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_2}\,d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z}\Bigg]v(t)\,dt + o(\varepsilon, v). \quad (46)$$

Из (46) следует, что функционал $f$ дифференцируем по Гато в точке $z$, а функция

$$Q(t, z) = \int_t^T \frac{(\gamma-t)^2}{2!}\,\frac{\partial F(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma + \int_t^T (\gamma - t)\,\frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_1}\,d\gamma + \int_t^T \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_2}\,d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z} \quad (47)$$

является “градиентом” Гато функционала $f$ в точке $z$.

**6. Необходимые условия минимума.** Пусть $z_* \in Z$ — точка локального минимума функционала $f$ на множестве $Z$. В разделе 3 было установлено, что найдется такое $\lambda^* < \infty$, что при $\lambda > \lambda^*$ точка $z_*$ является точкой локального минимума функционала $\Phi_\lambda(z) = f(z) + \lambda\varphi(z)$ на всем пространстве $P[0,T]$. Зафиксируем произвольное $\lambda > \lambda^*$. Пусть $\varepsilon > 0$, выберем $v \in P[0,T]$ и положим

$$z_\varepsilon(t) = z_*(t) + \varepsilon v(t). \quad (48)$$

Поскольку $\varphi(z_*) = 0$, то для вариации (48) из (46) и (20) имеем

$$\Phi_\lambda(z_\varepsilon) = \Phi_\lambda(z_*) + \varepsilon\Bigg[\int_0^T Q(t, z_*)v(t)\,dt + \lambda\Bigg\{\Bigg|\int_0^T v(t)\,dt\Bigg| + \Bigg|\int_0^T (T-t)v(t)\,dt\Bigg| + \Bigg|\int_0^T \frac{(T-t)^2}{2!}\,v(t)\,dt\Bigg|\Bigg\}\Bigg], \quad (49)$$

где $Q(t, z_*)$ — выражение (47) при $z = z_*$. Соотношение (49) можно переписать в виде

$$\Phi_\lambda(z_\varepsilon) = \Phi_\lambda(z_*) + \varepsilon\max_{\substack{w_k\in[-1,1]\\ k=\overline{1,3}}}\int_0^T\Bigg\{Q(t, z_*) + \lambda\Bigg[w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}w_3\Bigg]\Bigg\}v(t)\,dt. \quad (50)$$

Так как $\rho_i(z_\varepsilon, z_*) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$ для всех $i = \overline{1,3}$, то

$$\Phi_\lambda^{\downarrow}(z_*) = \liminf_{\rho_i(z,z_*)\to 0}\frac{\Phi_\lambda(z) - \Phi_\lambda(z_*)}{\rho_i(z, z_*)} \leqslant \liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\Phi_\lambda(z_\varepsilon) - \Phi_\lambda(z_*)}{\rho_i(z_\varepsilon, z_*)} = \liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\Phi_\lambda(z_* + \varepsilon v) - \Phi_\lambda(z_*)}{\varepsilon\|v\|_i},$$

где $\|v\|_i = \rho_i(v, \mathbb{O})$.

**Теорема 2** [13]. *Для того чтобы $z_* \in Z$ была точкой глобального или локального минимума функции $f$ на множестве $Z$ в метрике $\rho_i$, необходимо, чтобы*

$$\Phi_\lambda^{\downarrow}(z_*) = \liminf_{\rho_i(z,z_*)\to 0} \frac{\Phi_\lambda(z) - \Phi_\lambda(z_*)}{\rho_i(z, z_*)} \geqslant 0.$$

Учитывая произвольность $v \in P[0,T]$, из (50) и теоремы 2, имеем

$$\max_{\substack{w_k\in[-1,1]\\ k=\overline{1,3}}} \int_0^T \left\{ Q(t,z_*) + \lambda\left[ w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\, w_3 \right]\right\} v(t)\,dt \geqslant 0 \quad \forall\, v \in P[0,T]. \tag{51}$$

Это условие является необходимым в любой из метрик $\rho_i$ для всех $i = \overline{1,3}$.

**Теорема 3**. *Соотношение* (51) *эквивалентно следующему условию: существуют $w_k^* \in [-1,1]$, $k = \overline{1,3}$, такие, что*

$$Q(t,z_*) + \lambda\left[ w_1^* + (T-t)w_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!}\, w_3^* \right] = 0 \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{52}$$

**Доказательство.** Вначале покажем, что из (51) следует (52). Пусть выполнено (51). Найдем

$$\min_{\substack{w_k\in[-1,1]\\ k=\overline{1,3}}} \int_0^T \bigl[Q(t,z_*) + \lambda g(t)\bigr]^2\,dt = \min_{\substack{w_k\in[-1,1]\\ k=\overline{1,3}}} h(w) = h(w^*),$$

где $g(t) = w_1 + (T-t)w_2 + \dfrac{(T-t)^2}{2!}\, w_3$, $w = (w_1, w_2, w_3)$. Итак,

$$h(w) = \int_0^T \bigl[Q(t,z_*) + \lambda g(t)\bigr]^2\,dt = \int_0^T \bigl[Q^2(t,z_*) + 2\lambda Q(t,z_*)g(t) + \lambda^2 g^2(t)\bigr]\,dt.$$

Необходимое условие минимума функции $h$ в точке $w^* = (w_1^*, w_2^*, w_3^*) \in [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ имеет вид

$$\bigl(\operatorname{grad} h(w^*), w - w^*\bigr) \geqslant 0 \quad \forall\, w_k \in [-1,1],\ k = \overline{1,3},$$

т.е.

$$2\lambda\left( \int_0^T \bigl[Q(t,z_*) + \lambda g^*(t)\bigr] \operatorname{grad} g^*(t)\,dt, w - w^* \right) \geqslant 0 \quad \forall\, w_k \in [-1,1],\ k = \overline{1,3}; \tag{53}$$

здесь

$$g^*(t) = w_1^* + (T-t)w_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!} w_3^*, \quad \operatorname{grad} g^*(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ T-t \\ \dfrac{(T-t)^2}{2!} \end{pmatrix}, \quad w - w^* = \begin{pmatrix} w_1 - w_1^* \\ w_2 - w_2^* \\ w_3 - w_3^* \end{pmatrix}.$$

Так как $\bigl(\operatorname{grad} g^*(t), w - w^*\bigr) = g(t) - g^*(t)$, то (53) примет вид

$$2\lambda \int_0^T \bigl[Q(t,z_*) + \lambda g^*(t)\bigr]\bigl[g(t) - g^*(t)\bigr]\,dt \geqslant 0 \quad \forall\, w_k \in [-1,1],\ k = \overline{1,3}. \tag{54}$$

Пусть найдется хотя бы одно $t \in [0,T]$, при котором $Q(t,z_*) + \lambda g^*(t) \neq 0$; тогда

$$\int_0^T \bigl[Q(t,z_*) + \lambda g^*(t)\bigr]^2\,dt = a > 0. \tag{55}$$

Возьмем $v^*(t) = -Q(t,z_*) - \lambda g^*(t)$. Для любых $w_k \in [-1,1]$, $k = \overline{1,3}$, т.е. для произвольного полинома

$$g(t) = w_1 + (T-t)w_2 + \frac{(T-t)^2}{2!}\, w_3,$$

у которого $\deg g(t) \leqslant 2$, имеем

$$\int\limits_0^T \big[Q(t,z_*)+\lambda g(t)\big]v^*(t)\,dt = \int\limits_0^T \big[Q(t,z_*)+\lambda g(t)\big]\big[-Q(t,z_*)-\lambda g^*(t)\big]\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \big[Q(t,z_*)+\lambda g^*(t)+\lambda(g(t)-g^*(t))\big]\big[-Q(t,z_*)-\lambda g^*(t)\big]\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^T \big[Q(t,z_*)+\lambda g^*(t)\big]^2\,dt - \lambda\int\limits_0^T \big[Q(t,z_*)+\lambda g^*(t)\big]\big(g(t)-g^*(t)\big)\,dt.$$

Отсюда и из (54), (55) следует

$$\int\limits_0^T \big[Q(t,z_*)+\lambda g(t)\big]v^*(t)\,dt \leqslant -a < 0 \quad \forall\, w_k\in[-1,1],\ k=\overline{1,3},$$

что противоречит (51).

Осталось показать, что из (52) вытекает (51). Пусть имеет место (52), т.е. для некоторых $w_k^*\in[-1,1]$, $k=\overline{1,3}$, выполнено

$$Q(t,z_*)+\lambda g^*(t)=0 \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Тогда

$$\max_{\substack{w_k\in[-1,1]\\ k=\overline{1,3}}} \int\limits_0^T \Big\{Q(t,z_*)+\lambda g(t)\Big\}v(t)\,dt \geqslant \int\limits_0^T \Big\{Q(t,z_*)+\lambda g^*(t)\Big\}v(t)\,dt = 0 \quad \forall\, v\in P[0,T],$$

т.е. неравенство (51) выполнено.

**Следствие 1** [13]. *Для того чтобы функция $x_*(t)\in\Omega$ доставляла наименьшее значение функционалу $I(x)$ на множестве $\Omega$ (см. (3)), необходимо, чтобы существовал полином $g(t)$, $\deg g(t)\leqslant 2$, такой, что*

$$\int\limits_t^T \frac{(\gamma-t)^2}{2!}\,\frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma + \int\limits_t^T (\gamma-t)\,\frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x'}\,d\gamma + \int\limits_t^T \frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x''}\,d\gamma + \frac{\partial F^*(t)}{\partial x'''} = -g(t) \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{56}$$

Здесь $F^*(t)=F\big(x_*,x_*',x_*'',x_*''',t\big)$. Условие (56) является интегральным уравнением Эйлера для задачи (2), (3). Дифференцируя трижды выражение (56), получим условие

$$\frac{\partial F^*(t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*(t)}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F^*(t)}{\partial x''} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial F^*(t)}{\partial x'''} = 0 \quad \forall\, t\in D(x_*'''), \tag{57}$$

где $D(x_*''')$ — множество точек непрерывности функции $x_*'''(t)$. Дифференциальное уравнение 6-го порядка (57) является уравнением Эйлера–Пуассона.

Так как задача минимизации функционала $I(x)$ на множестве

$$\Omega_0 = \big\{\, x\in P^3[0,T] \;\big|\; x(0)=x_{10},\, x'(0)=x_{11},\, x''(0)=x_{12}\big\}$$

эквивалентна задаче минимизации функционала $f(z)$ на всем пространстве $P[0,T]$, то из (46) имеем следующее необходимое условие минимума.

**Следствие 2** [13]. *Для того чтобы функция $x_*\in\Omega_0$ доставляла наименьшее значение функционалу $I(x)$ на множестве $\Omega_0$, необходимо, чтобы*

$$\int\limits_t^T \frac{(\gamma-t)^2}{2!}\,\frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma + \int\limits_t^T (\gamma-t)\,\frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x'}\,d\gamma + \int\limits_t^T \frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x''}\,d\gamma + \frac{\partial F^*(t)}{\partial x'''} = 0 \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{58}$$

Сравнивая (58) с интегральным условием Эйлера (56), видим, что отличие только в том, что полином $g(t)$ (в случае отсутствия ограничений на правом конце) равен нулю.

**7. Направление наискорейшего спуска.** Используя классическую вариацию (14), получим

$$\Phi_\lambda(z_\varepsilon) = \Phi_\lambda(z) + \varepsilon H_\lambda(z, v) + o(\varepsilon), \tag{59}$$

где функцию $H_\lambda(z, v)$ можно представить в виде

$$H_\lambda(z, v) = \max_{u \in \partial\Phi_\lambda(z)} \int\limits_0^T u(t) v(t)\, dt, \tag{60}$$

где

$$Q(t, z) = \int\limits_t^T \frac{(\gamma - t)^2}{2!} \frac{\partial F(\gamma)}{\partial x}\, d\gamma + \int\limits_t^T (\gamma - t) \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_1}\, d\gamma + \int\limits_t^T \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_2}\, d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z}, \tag{61}$$

$$\partial\Phi_\lambda(z) = Q(t, z) + \lambda\big[p(t) + \mathrm{co}\{g(t), -g(t)\}\big],$$

$$p(t) = \sum_{k=1}^{3} g_k(t)\, \mathrm{sign}\, \overline{\varphi}_k(z), \quad g_k(t) = \frac{(T-t)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad k = \overline{1,3}, \quad I_0 = \{k \in \overline{1,3} \mid \overline{\varphi}_k(z) = 0\},$$

$$g(t) = \left\{ \sum_{k=1}^{3} g_k(t) w_k \mid w_k = 1, \text{ если } \overline{\varphi}_k(z) = 0;\ w_k = 0, \text{ если } \overline{\varphi}_k(z) \neq 0 \right\} = \sum_{k \in I_0} g_k(t) w_k.$$

Каждый элемент $u \in \partial\Phi_\lambda(z)$ можно описать следующим образом:

$$u(t) = Q(t, z) + \lambda\Big[p(t) + \sum_{k \in I_0} g_k(t)\gamma_k\Big], \quad \gamma_k \in \begin{cases} \mathrm{co}\{-1, 1\}, \text{если } \ \overline{\varphi}_k(z) = 0; \\ 0, \qquad\qquad \text{если } \ \overline{\varphi}_k(z) \neq 0. \end{cases}$$

Найдем минимальный по норме субградиент $u \in \partial\Phi_\lambda(z)$, т.е. решим задачу

$$\min_{u \in \partial\Phi_\lambda(z)} \|u\|^2 = \min_{\gamma_k \in [-1,1]} \int\limits_0^T \Bigg( Q(t, z) + \lambda[p(t) + \sum_{k \in I_0} g_k(t)\gamma_k] \Bigg)^2 dt = \|u^*\|^2. \tag{62}$$

Однако прежде вычислим

$$\min_{\gamma_k \in \mathbb{R}} \int\limits_0^T \Bigg( Q(t, z) + \lambda\big[p(t) + \sum_{k \in I_0} g_k(t)\gamma_k\big] \Bigg)^2 dt =$$

$$= \min_{\gamma_k \in \mathbb{R}} \int\limits_0^T \Big( \lambda^2 \sum_{k \in I_0} \sum_{j \in I_0} g_k(t) g_j(t) \gamma_k \gamma_j + 2\lambda\big[Q(t, z) + \lambda p(t)\big] \sum_{k \in I_0} g_k(t)\gamma_k + \big[Q(t, z) + \lambda p(t)\big]^2 \Big)\, dt =$$

$$= \min_{\gamma_k \in \mathbb{R}} \lambda^2 \gamma^T W \gamma + 2\lambda V \gamma + \int\limits_0^T \big[Q(t, z) + \lambda p(t)\big]^2 dt, \tag{63}$$

где $W$ — матрица Грама, составленная из функций $g_k(t)$, $k \in I_0$; $V$ — вектор столбец; $\gamma$ — вектор столбец, составленный из $\gamma_k$, $k \in I_0$, т.е. $W = \left\{ \int_0^T g_k(t) g_j(t)\, dt \right\}$, $k, j \in I_0$, $V = \left\{ \int_0^T \big[Q(t, z) + \lambda p(t)\big] g_k(t)\, dt \right\}$, $k \in I_0$.

Определитель матрицы $W$ отличен от нуля и положителен [24], так как матрица Грама $W$ составлена из линейно независимых функций $g_k(t)$, $k \in I_0$. Поэтому (63) имеет единственное решение (стационарную точку)

$$\widetilde{\gamma} = -\frac{1}{\lambda} W^{-1} V.$$

Отсюда и из (62) заключаем, что

$$\gamma_k^* = \begin{cases} -1, \text{если } \ \widetilde{\gamma}_k < -1, \\ \widetilde{\gamma}_k, \ \text{ если } \ \widetilde{\gamma}_k \in [-1, 1], \\ 1, \quad \text{если } \ \widetilde{\gamma}_k > 1, \end{cases} \quad k \in I_0,$$

и тогда функция $G_\lambda(t,z) = u^* = Q(t,z) + \lambda\Big[p(t) + \sum\limits_{k\in I_0} g_k(t)\gamma_k^*\Big]$ является наименьшим (в метрике $L_2$) субградиентом функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z$.

Если $\|G_\lambda\| > 0$, то функция $u_\lambda(t,z) = -\dfrac{G_\lambda(t,z)}{\|G_\lambda\|}$, где $\|u\|^2 = \displaystyle\int_0^T u^2(t)\,dt$, является направлением наискорейшего спуска функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z$ в метрике $L_2$.

В случае, когда множество индексов $I_0 = \emptyset$, то субдифференциал функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z$ содержит только одну точку и является дифференцируемым по Гато в точке $z$, причем его градиент имеет вид

$$G_\lambda(t,z) = Q(t,z) + \lambda p(t) = Q(t,z) + \lambda\sum_{k=1}^{3}\frac{(T-t)^{k-1}}{(k-1)!}\operatorname{sign}\overline{\varphi}_k(z).$$

Функция $u_\lambda(t,z) = -\dfrac{G_\lambda(t,z)}{\|G_\lambda\|}$ является направлением наискорейшего спуска функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z$.

Наконец, рассмотрим случай $\varphi(z) = 0$, т.е. множество индексов $I_0 = \overline{1,3}$. Функционал $\Phi_\lambda$ субдифференцируем в точке $z$, причем

$$\partial\Phi_\lambda(z) = Q(t,z) + \lambda\,\mathrm{co}\{g(t), -g(t)\}, \quad g(t) = \sum_{k=1}^{3}\frac{(T-t)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Любой элемент $u \in \partial\Phi_\lambda(z)$ можно представить в следующим виде:

$$u(t) = Q(t,z) + \lambda\sum_{k=1}^{3} g_k(t)\gamma_k, \quad \gamma_k \in \mathrm{co}\{-1, 1\}.$$

Найдем минимальный по норме субградиент $u \in \partial\Phi_\lambda(z)$:

$$\min_{u\in\partial\Phi_\lambda(z)}\|u\|^2 = \min_{\gamma_k\in[-1,1]}\int\limits_0^T\left(Q(t,z) + \lambda\sum_{k=1}^{3} g_k(t)\gamma_k\right)^2 dt = \|u^*\|^2,$$

но сперва вычислим

$$\begin{aligned}\min_{\gamma_k\in\mathbb{R}}\int_0^T\left(Q(t,z) + \lambda\sum_{k=1}^{3} g_k(t)\gamma_k\right)^2 dt = \\ = \min_{\gamma_k\in\mathbb{R}}\int\limits_0^T\left(\lambda^2\sum_{k=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} g_k(t)g_j(t)\gamma_k\gamma_j + 2\lambda Q(t,z)\sum_{k=1}^{3} g_k(t)\gamma_k + Q^2(t,z)\right)dt = \\ = \min_{\gamma_k\in\mathbb{R}}\lambda^2\gamma^T W\gamma + 2\lambda V\gamma + \int\limits_0^T Q^2(t,z)\,dt, \end{aligned} \qquad (64)$$

где

$$W = \begin{pmatrix} \int_0^T g_1^2(t)\,dt & \int_0^T g_1(t)g_2(t)\,dt & \int_0^T g_1(t)g_3(t)\,dt \\ \int_0^T g_2(t)g_1(t)\,dt & \int_0^T g_2^2(t)\,dt & \int_0^T g_2(t)g_3(t)\,dt \\ \int_0^T g_3(t)g_1(t)\,dt & \int_0^T g_3(t)g_2(t)\,dt & \int_0^T g_3^2(t)\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \frac{T^2}{2!} & \frac{T^3}{3!} \\ \frac{T^2}{2!} & \frac{T^3}{3} & \frac{T^4}{8} \\ \frac{T^3}{3!} & \frac{T^4}{8} & \frac{T^5}{20} \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \int_0^T Q(t,z)g_1(t)\,dt \\ \int_0^T Q(t,z)g_2(t)\,dt \\ \int_0^T Q(t,z)g_3(t)\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^T Q(t,z)\,dt \\ \int_0^T Q(t,z)(T-t)\,dt \\ \int_0^T Q(t,z)\frac{(T-t)^2}{2!}\,dt \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}.$$

Так как матрица $W$ положительно определенная, то (64) имеет единственное решение

$$\gamma^* = -\frac{1}{\lambda} W^{-1} V. \tag{65}$$

При достаточно больших $\lambda$ имеем $|\gamma_k^*| \leqslant 1$ для всех $k = \overline{1,3}$. Следовательно, при таких $\lambda$ выполнено соотношение

$$G(t,z) = u^*(t) = Q(t,z) + \lambda \sum_{k=1}^{3} g_k(t)\gamma_k^*. \tag{66}$$

Подставляя в (66) значение $\gamma^*$ из (65), получаем, что $G(t,z)$ не зависит от $\lambda$. Если $\|G(t,z)\| > 0$, то $u(t,z) = -\dfrac{G(t,z)}{\|G\|}$ является направлением наискорейшего спуска функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z$.

**8. Метод наискорейшего спуска.** Пусть $z_* \in Z$ — точка минимума функционала $\Phi_\lambda(z)$ на $P[0,T]$, тогда $\varphi(z_*) = 0$. Как следует из теоремы 3, необходимое условие (51) эквивалентно существованию $w_k^* \in [-1,1]$, $k = \overline{1,3}$, для которых

$$Q(t,z_*) + \lambda\left[w_1^* + (T-t)w_2^* + \frac{(T-t)^2}{2!}w_3^*\right] = 0 \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Это условие, в свою очередь, эквивалентно тому, что

$$0 \in \partial\Phi_\lambda(z_*). \tag{67}$$

Точка $z_*$, в которой выполнено условие (67), называется стационарной.

Итак, если точка $z \in P[0,T]$ не является стационарной точкой функционала $\Phi_\lambda$, то можно найти направление наискорейшего спуска функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z$. Таким образом, возникает естественная идея описать следующий метод наискорейшего спуска для нахождения стационарных точек, т.е. точек, удовлетворяющих условию (67).

Выберем произвольное $z^0 \in P[0,T]$. Пусть уже найдено $z^k \in P[0,T]$. Если $\varphi(z^k) = 0$ и выполнено условие (67), то точка $z^k$ является стационарной и процесс прекращается.

Если же $\varphi(z^k) \neq 0$ или $\varphi(z^k) = 0$, но условие (67) не выполнено, то возьмем функцию $G_{k\lambda}(t) = G_\lambda(t,z^k)$ — наименьший по норме субградиент функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z^k$.

Далее решается задача одномерной минимизации

$$\min_{\beta \geqslant 0} \Phi_\lambda(z^k - \beta G_{k\lambda}) = \Phi_\lambda(z^k - \beta_k G_{k\lambda}).$$

Теперь положим $z^{k+1} = z^k - \beta_k G_{k\lambda}$. Имеем $\Phi_\lambda(z^{k+1}) < \Phi_\lambda(z^k)$.

К сожалению, описанный процесс может и не привести к стационарной точке, поскольку субдифференциальное отображение $\partial\Phi_\lambda(z)$ не является непрерывным будучи функцией от $z$ в метрике Хаусдорфа [1, 6].

Однако в данном случае метод наискорейшего спуска можно скорректировать таким образом, чтобы обеспечить сходимость. Для этого заметим, что если $z \in Z$, т.е. $\varphi(z) = 0$, то при достаточно больших $\lambda$ наименьший по норме субградиент функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z$ имеет вид (см. (65), (66))

$$G(t,z) = Q(t,z) + \sum_{k=1}^{3} g_k(t)\widetilde{\gamma}_k^*, \tag{68}$$

где

$$Q(t,z) = \int_t^T \frac{(\gamma-t)^2}{2!}\,\frac{\partial F(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma + \int_t^T (\gamma-t)\,\frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_1}\,d\gamma + \int_t^T \frac{\partial F(\gamma)}{\partial z_2}\,d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z},$$

$$\widetilde{\gamma}_k^* = \lambda\gamma_k^* = -W^{-1}V, \qquad g_k(t) = \frac{(T-t)^{k-1}}{(k-1)!} \quad \forall\, k = \overline{1,3}.$$

Покажем, что если $z \in Z$ и $\widetilde{z}(t) = z(t) - \alpha G(t,z)$, то $\widetilde{z} \in Z$. Действительно (см. (11), (17)–(19)),

$$\varphi_1(\widetilde{z}) = \left|\overline{\varphi}_1(z) + \alpha \int\limits_0^T G(t,z)\,dt\right| = \alpha\left|\int\limits_0^T G(t,z)\,dt\right| = \alpha\left|\int_0^T \left(Q(t,z) + \sum_{k=1}^3 g_k(t)\widetilde{\gamma}_k^*\right)dt\right| =$$

$$= \alpha\left|\int\limits_0^T Q(t,z)g_1(t)\,dt + \sum_{k=1}^3 \widetilde{\gamma}_k^* \int\limits_0^T g_k(t)\,dt\right| = \alpha\left|\int\limits_0^T Q(t,z)\,dt + T\widetilde{\gamma}_1^* + \frac{T^2}{2!}\,\widetilde{\gamma}_2^* + \frac{T^3}{3!}\,\widetilde{\gamma}_3^*\right|, \quad (69)$$

$$\varphi_2(\widetilde{z}) = \left|\overline{\varphi}_2(z) + \alpha \int\limits_0^T (T-t)G(t,z)\,dt\right| = \alpha\left|\int\limits_0^T (T-t)G(t,z)\,dt\right| =$$

$$= \alpha\left|\int\limits_0^T (T-t)\left[Q(t,z) + \sum_{k=1}^3 g_k(t)\widetilde{\gamma}_k^*\right]dt\right| = \alpha\left|\int\limits_0^T Q(t,z)g_2(t)\,dt + \sum_{k=1}^3 \widetilde{\gamma}_k^* \int\limits_0^T g_2(t)g_k(t)\,dt\right| =$$

$$= \alpha\left|\int\limits_0^T (T-t)Q(t,z)\,dt + \frac{T^2}{2!}\,\widetilde{\gamma}_1^* + \frac{T^3}{3}\,\widetilde{\gamma}_2^* + \frac{T^4}{8}\,\widetilde{\gamma}_3^*\right|, \quad (70)$$

$$\varphi_3(\widetilde{z}) = \left|\overline{\varphi}_3(z) + \alpha \int\limits_0^T \frac{(T-t)^2}{2!}G(t,z)\,dt\right| = \alpha\left|\int\limits_0^T \frac{(T-t)^2}{2!}G(t,z)\,dt\right| =$$

$$= \alpha\left|\int\limits_0^T \frac{(T-t)^2}{2!}\left[Q(t,z) + \sum_{k=1}^3 g_k(t)\widetilde{\gamma}_k^*\right]dt\right| = \alpha\left|\int\limits_0^T Q(t,z)g_3(t)\,dt + \sum_{k=1}^3 \widetilde{\gamma}_k^* \int\limits_0^T g_3(t)g_k(t)\,dt\right| =$$

$$= \alpha\left|\int\limits_0^T \frac{(T-t)^2}{2!}\,Q(t,z)\,dt + \frac{T^3}{3!}\,\widetilde{\gamma}_1^* + \frac{T^4}{8}\,\widetilde{\gamma}_2^* + \frac{T^5}{20}\,\widetilde{\gamma}_3^*\right|. \quad (71)$$

Несложно проверить, что (69)–(71) можно записать в матричной форме таким образом:

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(\widetilde{z})\\ \varphi_2(\widetilde{z})\\ \varphi_3(\widetilde{z})\end{pmatrix} = \alpha|W\widetilde{\gamma}^* + V|.$$

Здесь модуль берется от каждого элемента вектора и выражение под модулем является с точностью до постоянного множителя градиентом минимизируемой функции в (64). Тогда из (65) следует, что $\varphi_1(\widetilde{z}) = \varphi_2(\widetilde{z}) = \varphi_3(\widetilde{z}) = 0$. Итак, мы показали, что $\varphi(\widetilde{z}) = 0$, т.е. $\widetilde{z} \in Z$. Из этого наблюдения вытекает следующая модификация метода наискорейшего спуска.

Выберем произвольное $z^0 \in P[0,T]$ так, чтобы $\varphi(z^0) = 0$, к примеру, $z^0(t) = x'''(t)$, где $x(t)$ — интерполяционный полином Эрмита [16], удовлетворяющий (1). Пусть уже найдено $z^k \in Z$. Если при этом выполнено условие (67), то точка $z^k$ является стационарной и процесс прекращается.

Если же условие (67) не выполнено, то возьмем функцию $G_{k\lambda}(t) = G_\lambda(t,z^k)$ — наименьший по норме субградиент функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z^k$. При достаточно больших $\lambda$ он равен выражению в (68).

Как отмечалось выше, при всех $\alpha$ имеем $\varphi(z^k - \alpha G_{k\lambda}) = 0$, т.е. $z^k - \alpha G_{k\lambda} \in Z$. Найдем

$$\min_{\beta \geqslant 0} \Phi_\lambda(z^k - \beta G_{k\lambda}) = \min_{\beta \geqslant 0} f(z^k - \beta G_{k\lambda}) = f(z^k - \beta_k G_{k\lambda}).$$

Теперь положим $z^{k+1} = z^k - \beta_k G_{k\lambda}$. Имеем $z_{k+1} \in Z$, $f(z^{k+1}) < f(z^k)$.

Далее продолжается аналогично. В результате построим последовательность точек $\{z^k\} \subset Z$. Если эта последовательность конечна (состоит из конечного числа точек), то по построению последняя полученная точка является стационарной. Если же последовательность $\{z^k\}$ содержит бесконечное количество точек, то учитывая, что функция $G(t,z)$ (см. (68)) непрерывна как функция $z$, можно показать, что описанный метод сходится в следующем смысле: $\|G(t,z^k)\| \to 0$. Здесь $\|G\| = \int_0^T G^2\,dt$; следовательно, $G(t,z^k) \to 0$ в метрике $L_2$. Вопрос о существовании предельных точек последовательности $\{z^k\}$ остается открытым.

**9. Метод гиподифференциального спуска.** Вместо разложения (59) для вариации (14) из (20) и (46) можно получить другое представление. Имеем

$$\Phi_\lambda(z_\varepsilon) = \Phi_\lambda(z) + H_\lambda(\varepsilon,z,v) + o(\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} H_\lambda(\varepsilon,z,v) = \varepsilon \int\limits_0^T Q(t,z)v(t)\,dt + \\ + \lambda\Big[\max\Big\{\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)| + \varepsilon\int\limits_0^T g_1(t)v(t)\,dt,\ -\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)| - \varepsilon\int\limits_0^T g_1(t)v(t)\,dt\Big\} + \\ + \max\Big\{\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)| + \varepsilon\int\limits_0^T g_2(t)v(t)\,dt,\ -\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)| - \varepsilon\int\limits_0^T g_2(t)v(t)\,dt\Big\} + \\ + \max\Big\{\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)| + \varepsilon\int\limits_0^T g_3(t)v(t)\,dt,\ -\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)| - \varepsilon\int\limits_0^T g_3(t)v(t)\,dt\Big\}\Big]. \end{aligned} \tag{72}$$

Функции $Q(t,z)$, $\overline{\varphi}_k(z)$ и $g_k(t)$ при $k=\overline{1,3}$ заданы соответственно соотношениями (61), (13) и (60).

Из (72) следует, что функционал $\Phi_\lambda(z)$ гиподифференцируем в точке $z$ и его гиподифференциал имеет вид

$$\begin{aligned} d\Phi_\lambda(z) = [0,Q(t,z)] + \lambda\big(\mathrm{co}\big\{[\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)|,\ g_1(t)],\ [-\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)|,\ -g_1(t)]\big\} + \\ + \mathrm{co}\big\{[\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)|,\ g_2(t)],\ [-\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)|,\ -g_2(t)]\big\} + \\ + \mathrm{co}\big\{[\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)|,\ g_3(t)],\ [-\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)|,\ -g_3(t)]\big\}\big). \end{aligned}$$

Отметим, что отображение $d\Phi_\lambda(z)$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа [1, 6]. Нетрудно также показать, что необходимое условие минимума функции $\Phi_\lambda(z)$ (см. (67)) эквивалентно условию

$$[0, 0_{P[0,T]}] \in d\Phi_\lambda(z). \tag{73}$$

Найдем гипоградиент функционала $\Phi_\lambda(z)$:

$$\min_{u\in d\Phi_\lambda(z)} \|u\|^2 = \min_{\substack{\beta_k\in[0,1]\\ k=\overline{1,3}}} \|u(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\|^2 = u(\beta_1^*,\beta_2^*,\beta_3^*), \tag{74}$$

где

$$\begin{aligned} u(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = [0,Q(t,z)] + \lambda\big(\beta_1[\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)|,\ g_1(t)] + (1-\beta_1)[-\overline{\varphi}_1(z) - |\overline{\varphi}_1(z)|,\ -g_1(t)] + \\ + \beta_2[\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)|,\ g_2(t)] + (1-\beta_2)[-\overline{\varphi}_2(z) - |\overline{\varphi}_2(z)|,\ -g_2(t)] + \\ + \beta_3[\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)|,\ g_3(t)] + (1-\beta_3)[-\overline{\varphi}_3(z) - |\overline{\varphi}_3(z)|,\ -g_3(t)]\big) = \\ = [(2\beta_1-1)\lambda\overline{\varphi}_1(z) + (2\beta_2-1)\lambda\overline{\varphi}_2(z) + (2\beta_3-1)\lambda\overline{\varphi}_3(z) - \lambda\varphi(z), \\ Q(t,z) + (2\beta_1-1)\lambda g_1(t) + (2\beta_2-1)\lambda g_2(t) + (2\beta_3-1)\lambda g_3(t)]. \end{aligned}$$

Положим $\mu_k = (2\beta_k - 1)\lambda$, $k=\overline{1,3}$. Тогда в этих обозначениях $|\mu_k| \leqslant \lambda$, $k=\overline{1,3}$ и

$$u_1(\mu_1,\mu_2,\mu_3) := u(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \Big[\sum_{k=1}^3 \mu_k\overline{\varphi}_k(z) - \lambda\varphi(z),\ Q(t,z) + \sum_{k=1}^3 \mu_k g_k(t)\Big].$$

Задача (74) эквивалентна задаче

$$\min_{u\in d\Phi_\lambda(z)} \|u\|^2 = \min_{\substack{\mu_k\in[-\lambda,\lambda]\\ k=\overline{1,3}}} \|u_1(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\|^2.$$

Сперва найдем
$$\min_{\substack{\mu_k\in\mathbb{R}\\ k=\overline{1,3}}} \|u_1(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\|^2,$$
здесь $u_1=[q_1,q_2]$, $q_1\in\mathbb{R}$, $q_2\in P[0,T]$, $\|u_1\|^2=q_1^2+\int_0^T q_2^2(t)\,dt.$

Положим
$$h(\mu_1,\mu_2,\mu_3):=\|u_1(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\|^2=\left(\sum_{k=1}^3\mu_k\overline{\varphi}_k(z)-\lambda\varphi(z)\right)^2+\int\limits_0^T\left(Q(t,z)+\sum_{k=1}^3\mu_k g_k(t)\right)^2dt.$$
Приравняем к нулю производные функции $h(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ по $\mu_1$, $\mu_2$ и $\mu_3$. Получим систему
$$A\mu=\eta, \tag{75}$$
где
$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{pmatrix},\quad \psi(z)=\begin{pmatrix}\overline{\varphi}_1(z)\\ \overline{\varphi}_2(z)\\ \overline{\varphi}_3(z)\end{pmatrix},\quad \overline{g}(t)=\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\\ g_3(t)\end{pmatrix},\quad \varphi(z)=\sum_{k=1}^3|\overline{\varphi}_k(z)|,$$
$$A=\int\limits_0^T\overline{g}(t)\overline{g}^T(t)\,dt+\psi(z)\psi^T(z),\quad \eta=\lambda\varphi(z)\psi(z)-\int\limits_0^T Q(t,z)\overline{g}(t)\,dt.$$
Видим, что матрица $A$ не зависит от $\lambda$ и симметричная, так как является суммой двух симметричных матриц, одна из которых матрица Грама. Поэтому при достаточно малых абсолютных значениях $\overline{\varphi}_k(z)$, $k=\overline{1,3}$, имеем $\det A>0$, и система (75) имеет единственное решение
$$\mu^*=A^{-1}\eta.$$
При достаточно больших $\lambda$ и малых $\varphi(z)$. таких, что и $\lambda\varphi(z)$ малы, имеем $|\mu_k^*|\leqslant\lambda$, $k=\overline{1,3}$. Следовательно, при таких $\lambda$ получим
$$u_1(\mu_1^*,\mu_2^*,\mu_3^*):=u(\beta_1^*,\beta_2^*,\beta_3^*)=\left[\sum_{k=1}^3\mu_k^*\overline{\varphi}_k(z)-\lambda\varphi(z),Q(t,z)+\sum_{k=1}^3\mu_k^*g_k(t)\right].$$
Функция $q_2^*(t,z)=Q(t,z)+\sum\limits_{k=1}^3\mu_k^*g_k(t)$ является гипоградиентом функционала $\Phi_\lambda(z)$. Если $\|q_2^*\|>0$, т.е. точка $z$ не является стационарной, то направление $G_\lambda(t,z)=-\dfrac{q_2^*(t,z)}{\|q_2^*(t,z)\|}$ является направлением спуска функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z$. В отличие от направления наискорейшего спуска, направление $G_\lambda(t,z)$, будучи функцией от $z$, является непрерывным.

Таким образом, если точка $z\in P[0,T]$ не является стационарной точкой функционала $\Phi_\lambda$, то можно найти направление спуска функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z$. Опишем следующий метод гиподифференциального спуска для нахождения стационарных точек, т.е. точек, удовлетворяющих условию (67) или (73).

Выберем произвольное $z\in P[0,T]$. Пусть уже найдено $z_k\in P[0,T]$. Если $\varphi(z_k)=0$ и выполнено условие (67) (или (73)), то точка $z_k$ является стационарной и процесс прекращается. Если же условие (67) не выполнено, то возьмем функцию $G_{k\lambda}(t)=q_2^*(t,z)$ — гипоградиент функционала $\Phi_\lambda$ в точке $z_k$. Далее решаем задачу одномерной минимизации
$$\min_{\beta\geqslant0}\Phi_\lambda(z^k-\beta G_{k\lambda})=\Phi_\lambda(z^k-\beta_kG_{k\lambda})$$
и положим $z^{k+1}=z^k-\beta_kG_{k\lambda}$. Имеем $\Phi_\lambda(z^{k+1})<\Phi_\lambda(z^k)$. Пользуясь непрерывностью в метрике Хаусдорфа гиподифференциального отображения как функции от $z$, можно показать, что описанный метод сходится в следующем смысле: $\|u\|\to0$, где $u$ задано в (74). Вопрос о существовании предельных точек последовательности $\{z^k\}$ остается открытым.

Указанный метод можно модернизировать. Пусть $z \in Z$, т.е. $\varphi(z) = 0$. Этого всегда можно добиться, взяв в качестве $x(t)$ интерполяционный полином Эрмита [16], удовлетворяющий (1); тогда $z(t) = x'''(t)$.

Из (75) имеем

$$A = \int\limits_0^T \overline{g}(t)\overline{g}^T(t)\,dt, \quad \eta = -\int\limits_0^T Q(t,z)\overline{g}(t)\,dt,$$

поскольку $\overline{\varphi}_k(z) = 0$, $k = \overline{1,3}$.

Тогда решение системы (75) совпадает с решением (65), так как матрицы $A$ и $W$, а также векторы $\eta$ и $V$ соответственно равны. Значит, направление $G_\lambda(t,z)$ в методе гиподифференциального спуска совпадает с направлением наискорейшего спуска (68). Аналогично можно показать, что если $z \in Z$ и $\widetilde{z}(t) = z(t) - \alpha G_\lambda(t,z)$, то $\widetilde{z} \in Z$. В том числе в методе гиподифференциального спуска также имеет место $z^k - \alpha G_{k\lambda} \in Z$.

**Пример.** Определить экстремаль функционала

$$I(x) = \int\limits_0^1 \left(x'''(t)\right)^2 dt,$$

удовлетворяющую условиям

$$x(0) = x'(0) = 0, \;\; x''(0) = 1, \quad x(1) = \frac{1}{2}, \;\; x'(1) = 1, \;\; x''(1) = 1.$$

В качестве начальной точки удовлетворяющей краевым условиям, выберем полином $z^0(t) = 600t^3 - 900t^2 + 360t - 30$. Имеем значение функционалов $I(z^0) = 128.57$, $\varphi(z^0) = 0$ и $\|G(t,z^0)\| = 22.7$, где $G(t,z^0) = 2z^0(t) = 1200t^3 - 1800t^2 + 720t - 60$. Далее, строим точку $z^0(t) - \beta G(t,z^0)$ и решаем задачу одномерной минимизации $I(z^0(t) - \beta G(t,z^0))$ по $\beta \geqslant 0$. Получаем, что $z^1(t) = z^0(t) - \dfrac{1}{2}G(t,z^0) = 0$ при $\beta = \dfrac{1}{2}$. В точке $z^1(t) = 0$ находим, что $I(z^1) = 0$, $\varphi(z^1) = 0$ и $\|G(t,z^1)\| = 0$, т.е. минимизирующая последовательность сошлась к стационарной точке $x(t) = \dfrac{1}{2}t^2$. Заметим, что в данном примере величина шага спуска $\beta$ вычисляется аналитически.

**Заключение.** В настоящей статье продемонстрировано применение негладкого анализа и теории точных штрафных функций для решения вариационной задачи для функционала, зависящего от производной третьего порядка. Получены необходимые условия экстремума и на их основе разработаны "прямые" численные методы минимизации, а именно методы наискорейшего и гиподифференциального спуска. Показано, что если в качестве начальной точки выбрать произвольную допустимую кривую, то методы наискорейшего и гиподифференциального спуска "эквивалентны".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
2. *Rockafellar R.T.* Convex analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1997.
3. *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.* Nonsmooth analysis and control theory. Berlin: Springer, 1998.
4. *Shor N.Z.* Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Berlin: Springer, 1998.
5. *Иоффе А.Д.* Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // Успехи матем. наук. 2000. bf 55, вып. 3. 103–162.
6. *Giannessi F., Maugeri A., Pardalos P.M.* Equilibrium problems: nonsmooth optimization and variational inequality models. Berlin: Springer, 2001.
7. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал, 2003.
8. *Alart P., Maisonneuve O., Rockafellar R.T.* Nonsmooth mechanics and analysis: theoretical and numerical advances. Berlin: Springer, 2006.
9. *Moreau J.J., Panagiotopoulos P.D.* Nonsmooth mechanics and applications. Berlin: Springer, 1988.
10. *Dem'yanov V.F., Stavroulakis G.E., Polyakova L.N., Panagiotopoulos P.D.* Quasidifferentiability and nonsmooth modelling in mechanics, engineering and economics. Doordrecht: Kluwer Academic, 1996.
11. *Демьянов В.Ф., Демьянова В.В., Кокорина А.В., Моисеенко В.М.* Прогнозирование эффективности химиотерапии при лечении онкологических заболеваний // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Серия 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2006. № 4. 30–36.

12. *Демьянов В.Ф.* Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. 1994. № 4. С. 21–27.
13. *Демьянов В.Ф.* Условия экстремума и вариационные задачи. М.: Высшая школа, 2005.
14. *Demyanov V.F., Giannessi F., Tamasyan G.Sh.* Variational control problems with constraints via exact penalization // Nonconvex optimization and its applications. Vol. 79. Variational Analysis and Applications / Eds. F. Giannessi and A. Maugeru. New York: Springer, 2005. 301–342.
15. *Demyanov V.F., Tamasyan G.Sh.* Exact penalty functions in isoperimetric problems // Optimization. 2011. **60**, Issue 1. 153–177.
16. *Демьянов В.Ф., Тамасян Г.Ш.* О прямых методах решения вариационных задач // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. **16**, № 5. 36–47.
17. *Еремин И.И.* Метод “штрафов” в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. **143**, № 4. 748–751.
18. *Demyanov V.F., Giannessi F., Karelin V.V.* Optimal control problems via exact penalty functions // J. Global Optim. 1998. **12**, N 3. 215–223.
19. *Карелин В.В.* Штрафные функции в одной задаче управления // Автомат. и телемех. 2004. № 3. 137–147.
20. *Гюнтер Н.М.* Курс вариационного исчисления. М.: Гостехиздат, 1941.
21. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
22. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
23. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.
24. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
25. *Утешев А.Ю., Тамасян Г.Ш.* К задаче полиномиального интерполирования с кратными узлами // Вестн. Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. 2010. Вып. 3. 76–85.

Поступила в редакцию
16.01.2012