УДК 519.6, 517.958:5

СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В РАЗРАБОТКЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В УЗИ-ТОМОГРАФИИ

А. В. Гончарский[1], С. Ю. Романов[1]

Работа посвящена созданию эффективных методов решения обратных задач волновой томографии. Обратная задача рассматривается как коэффициентная обратная задача для волнового уравнения. Использование суперкомпьютерных технологий позволяет получать томографические изображения диагностируемых объектов с высоким разрешением.

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, волновое уравнение, компьютерное моделирование, ультразвуковая томография, параллельные вычисления, суперкомпьютер.

1. Введение. В настоящее время в США, Германии, Японии и России интенсивно разрабатываются томографические установки [1–4], которые имеют целый ряд преимуществ в сравнении с рентгеновской томографией. Современная медицина немыслима без рентгеновских томографических исследований, которые имеют лишь один недостаток. Регулярное использование рентгеновских томографов само по себе опасно для пациентов из-за высокой лучевой нагрузки. Альтернативой рентгеновской томографии могут стать разрабатываемые ультразвуковые томографы. В первую очередь УЗИ-томография призвана решать проблемы дифференциальной диагностики рака молочной железы.

С математической точки зрения обратные задачи, возникающие в УЗИ-томографии, являются намного более сложными по сравнению с обратными задачами рентгеновской томографии. Если в рентгеновской томографии хорошо работают модели геометрической оптики, то для описания процессов взаимодействия ультразвукового излучения с веществом необходимо использовать волновые модели. В рамках волновых моделей обратные задачи УЗИ-томографии являются нелинейными.

Существует несколько подходов к решению обратных задач волновой томографии. В работах [5, 6] было показано, что с применением аппарата функции Грина обратные задачи волновой томографии можно свести к системе интегральных операторных уравнений. Существует другая возможность решения обратных задач УЗИ-томографии как коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений в частных производных [1, 2, 7, 8]. В работе [7] было показано, что второй подход требует существенно меньшего количества операций и поэтому является перспективным. В работе [8] алгоритмы решения обратной задачи УЗИ-томографии были протестированы на грубой сетке с использованием персональных компьютеров. Было показано, что получение томографических УЗИ-изображений с высоким разрешением возможно только с использованием суперкомпьютерных технологий.

Целью настоящей работы является разработка эффективных методов решения обратных задач УЗИ-диагностики с высоким разрешением на современных суперкомпьютерах. С медицинской точки зрения для дифференциальной диагностики онкологических заболеваний диагностические комплексы должны иметь разрешение не хуже 3 мм.

2. Постановка и методы решения обратной задачи. Рассмотрим волновое уравнение, которое в скалярном приближении описывает акустическое поле $u(r,t)$ в трехмерной области $\Omega \in \mathbb{R}^3$, ограниченной поверхностью S в течение времени $[0,T]$ с точечным источником, располагающимся в точке r_0:

$$c(r)u_{tt}(r,t) - \Delta u(r,t) = \delta(r-r_0)f(t). \tag{1}$$

Начальные и граничные условия запишем в виде

$$u(r,t=0) = u_t(r,t=0) = 0, \quad \partial_n u\big|_{ST} = p(r,t). \tag{2}$$

Здесь $c^{-0.5}(r)$ — скорость волны в среде; $r \in \mathbb{R}^3$ — положение точки в пространстве; Δ — оператор Лапласа по переменной r; генерируемый источником импульс описывается функцией $f(t)$; $\partial_n u\big|_{ST}$ — производная

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 4, 119991, Москва; А. В. Гончарский, зав. лабораторией, e-mail: gonchar@srcc.msu.ru; С. Ю. Романов, вед. науч. сотр., e-mail: romanov60@gmail.com

вдоль нормали к поверхности S в области $S\times(0,T)$; $p(r,t)$ — некоторая известная функция. Будем предполагать, что неоднородность среды вызвана только изменениями скорости, а вне области неоднородности скорость $c(r)=c_0=\mathrm{const}$, где постоянная c_0 известна.

Обратная задача состоит в нахождении функции $c(r)$, которая описывает неоднородность, по экспериментальным данным измерения волны $U(s,t)$ на границе S области за время $(0,T)$ при различных положениях r_0 источника.

Введем функционал невязки:

$$\Phi\big(u(c),c\big)=\frac{1}{2}\left\|u|_{ST}-U\right\|^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_S\big(u(s,t)-U(s,t)\big)^2\,ds\,dt. \qquad (3)$$

Здесь $\|\cdot\|^2$ — квадрат нормы в пространстве $L_2(S\times(0,T))$ и $U(s,t)$ — экспериментальные данные измерения волны на границе S области за время $(0,T)$.

Для минимизации функционала будем использовать градиентные итерационные методы. В работе [7] было показано, что градиент функционала (3) можно выписать в форме

$$\Phi'_c\big(u(c),c\big)=\int\limits_0^T w_t(r,t)u_t(r,t)\,dt, \qquad (4)$$

где $u(r,t)$ — решение основной задачи (1), (2), а $w(r,t)$ — решение следующей "сопряженной" задачи при заданном $c(r)$:

$$c(r)w_{tt}(r,t)-\Delta w(r,t)=0,$$
$$w(r,t=T)=w_t(r,t=T)=0,\quad \partial_n w\big|_{ST}=u\big|_{ST}-U,$$

где u — решение основной задачи (1), (2).

Таким образом, для вычисления градиента функционала необходимо решить основную и "сопряженную" задачи.

Зная Φ'_c из (4), можно построить различные итеративные схемы для минимизации функционала невязки (3) [5].

3. Численные алгоритмы решения обратной задачи. Решение обратных задач ультразвуковой томографии в приведенной выше постановке (1), (2) в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ представляет собой сложную задачу. Следуя стандартному томографическому подходу, заменим задачу диагностики трехмерного объекта на исследование двумерных сечений этого объекта. Будем считать, что в каждом из сечений процесс распространения ультразвуковой волны описывается уравнением (1) в $\mathbb{R}^2$ при фиксированном z, так что $r=(x,y)$. Для вычисления градиента функционала невязки будем использовать формулу (4), где $r\in\mathbb{R}^2$. Аналогично функционал невязки $\Phi\big(u(c),c\big)$ вычисляется по функции $u(r,t)$, где $r\in\mathbb{R}^2$.

Для решения обратной задачи в каждом из слоев будем использовать метод конечных разностей. В такой постановке решение волновых дифференциальных уравнений сводится к решению разностных уравнений. На области изменения аргументов введем равномерную дискретную сетку

$$v_{ijk}=\big\{(x_i,y_j,t_k):\,x_i=ih,\,0<i<n;\,y_j=jh,\,0<j<n;\,t_k=k\tau,\,0<k<m\big\},$$

где h — шаг сетки по пространственным переменным и τ — шаг сетки по времени. Параметры h и τ связаны условием устойчивости Куранта $c^{-0.5}\tau<h$, где $c^{-0.5}(r)$ — скорость волны.

Используем следующие аппроксимации производных 2-го порядка в уравнении (1):

$$u_{tt}(r,t)=\frac{u_{ijk+1}-2u_{ijk}+u_{ijk-1}}{\tau^2},\quad \Delta u(r,t)=\frac{u_{i+1jk}-2u_{ijk}+u_{i-1jk}}{h^2}+\frac{u_{ij+1k}-2u_{ijk}+u_{ij-1k}}{h^2}.$$

В области, не содержащей источников, получаем явную разностную схему для дифференциального уравнения (1):

$$c_{ij}\,\frac{u_{ijk+1}-2u_{ijk}+u_{ijk-1}}{\tau^2}-\frac{u_{i+1jk}-2u_{ijk}+u_{i-1jk}}{h^2}-\frac{u_{ij+1k}-2u_{ijk}+u_{ij-1k}}{h^2}=0.$$

Здесь u_{ijk} — значения функции $u(r,t)$ в точках (x_i,y_j) в момент времени t_k и c_{ij} — значения функции $c(r)$ в точках (x_i,y_j). Аналогично выписывается разностная схема для w. Решение находится по слоям в явной форме. Градиент (4) функционала (3) вычислялся по разностной формуле

$$\mathrm{grad}_{ij} = \sum_{k=0}^{m} \frac{u_{ijk+1} - u_{ijk}}{\tau} \, \frac{w_{ijk+1} - w_{ijk}}{\tau} \, \tau.$$

4. Численный эксперимент. Для демонстрации эффективности предложенных алгоритмов приведем решение модельной задачи восстановления двумерных неоднородностей в томографическом слое.

Расчеты проводились при длине волны 5 мм, размер области расчетов 150 × 150 мм, количество точек сетки 1000×1000, количество приемников — 4000. Модельная задача решалась для четырех источников (рис. 1). На рис. 1 приведена схема эксперимента; источники обозначены цифрой 1, приемники обозначены цифрой 2.

На рис. 2 приведен модельный фантом, в котором были использованы как области пониженной эхоплотности, так и области повышенной эхоплотности. Размер диагностируемой области около 100 мм. Размер минимальной неоднородности не превосходит 2 мм. На рис. 3 приведено восстановленное распределение скорости $c(x, y)$, полученное через 500 итераций. Начальное приближение в итерационном процессе было выбрано следующим образом: $c(x, y) = \mathrm{const} = c_0$. Из сопоставления рис. 2 и 3 видно, что разрешающая способность УЗИ-томографического комплекса, полученная как результат модельных расчетов, не хуже 3 мм. Для решения задачи использовалось 64 ядра суперкомпьютера “Ломоносов”, установленного в Научно-исследовательском вычислительном центре МГУ им. М. В. Ломоносова. Время решения на суперкомпьютере “Ломоносов” составило около 3 часов.

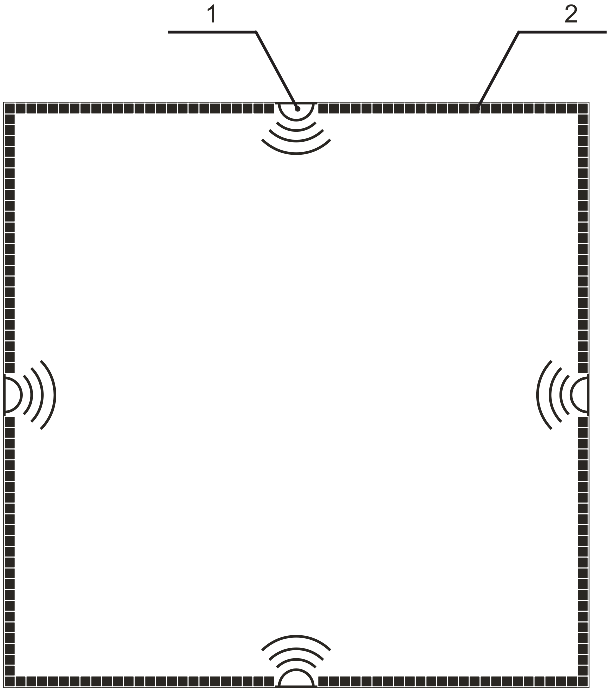

Рис. 1. Схема эксперимента

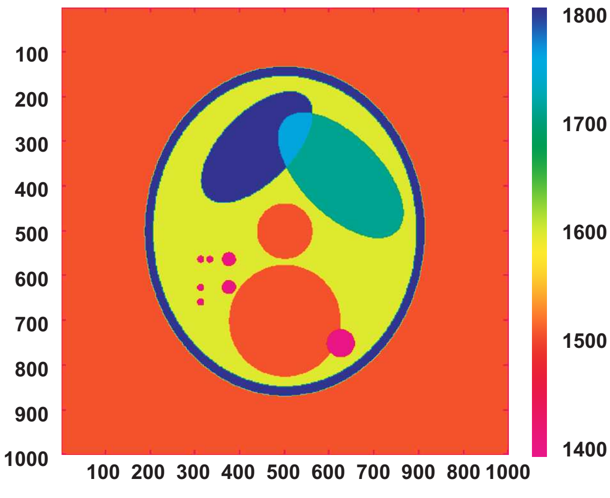

Рис. 2. Модельная неоднородность

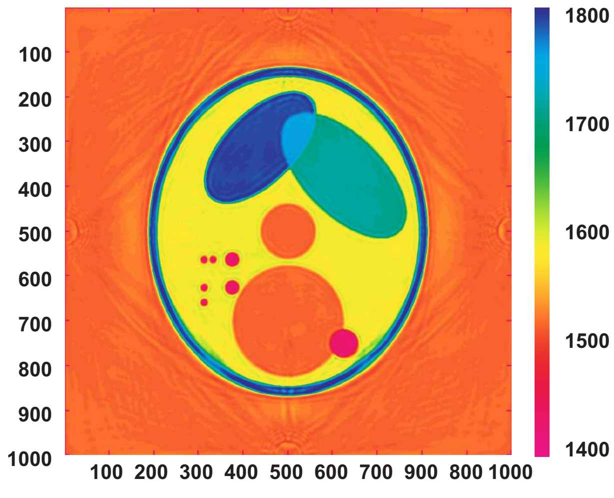

Рис. 3. Восстановленное изображение

5. Выводы. Использование суперкомпьютеров позволяет создать эффективные методы решения обратных задач ультразвуковой диагностики с высоким разрешением. Восстановленные в модельных расчетах результаты были получены на сетках из 1000 × 1000 точек. Проведенные модельные расчеты показывают, что реальное разрешение восстановленных изображений не хуже 3 мм.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы”, госконтракт № 07.514.12.4024.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Natterer F., Wubbeling F.* A propagation-backpropagation method for ultrasound tomography // Inverse Problems. 1995. **11**, N 6. 1225–1232.
2. *Beilina L., Klibanov M.V., Kokurin M.Yu.* Adaptivity with relaxation for ill-posed problems and global convergence for a coefficient inverse problem. Chalmers Preprint Series. Preprint 2009:47. Gothenburg: University of Gothenburg, 2009.
3. *Duric N., Littrup P., Poulo L., et al.* Detection of breast cancer with ultrasound tomography: first results with the Computed Ultrasound Risk Evaluation (CURE) prototype // Medical Physics. 2007. **34**. 773–785.
4. *Gemmeke H., Menshikov A., Tchernikovski D., et al.* Hardware setup for the next generation of 3D ultrasound computer tomography // Proc. IEEE Nuclear Science Simposium. Knoxville, 2010. 2449–2454.
5. *Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V.* Ill-posed problems. Theory and applications. Dordrect: Kluwer Academic Publ., 1994.
6. *Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Об одной задаче волновой диагностики // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2010. № 1. 7–13.
7. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* О двух подходах к решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. **52**, № 2. 1–7.
8. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* Об одной задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**, № 1. 317–320.

Поступила в редакцию
29.01.2012