УДК 519.6

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И СПУСКА ПО ПРЯМОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕГЛАДКИХ МОНОТОННЫХ РАВНОВЕСНЫХ ЗАДАЧ

О. В. Пинягина[1]

Предлагается комбинированный метод регуляризации и спуска по прямой интервальной (оценочной) функции для негладких монотонных равновесных задач. В предложенном методе применяется одна и та же равномерно выпуклая вспомогательная функция как для построения регуляризованных задач, так и для конструирования интервальной функции. Для решения регуляризованных задач используется метод спуска по интервальной функции с неточным линейным поиском.

Ключевые слова: негладкая монотонная равновесная задача, прямая интервальная функция, метод спуска, неточный линейный поиск, равномерно выпуклая функция.

1. Введение. Пусть U — непустое замкнутое выпуклое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая равновесная функция, для которой справедливо $\psi(u,u) = 0$ при любом $u \in \mathbb{R}^n$, и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклая субдифференцируемая функция. Негладкая равновесная задача определяется следующим образом.

Задача 1. Найти элемент $u^* \in U$, такой, что для всех $v \in U$ выполнено неравенство $\psi\big(u^*, v\big) + f(v) - f\big(u^*\big) \geqslant 0$.

Обозначим множество решений задачи 1 через U^*.

В теории равновесных задач один из известных подходов заключается в том, что исходная задача сводится к задаче минимизации некоторой так называемой оценочной (или интервальной) функции [1]. Для сходимости итерационных методов спуска по интервальной функции обычно требуются условия сильной монотонности равновесной функции [1, 2]. Это требование может быть ослаблено с помощью регуляризации Тихонова–Браудера [3, 4], которую можно использовать в комбинации с методами спуска [5–7]. В то же время, для многих задач удобно не ограничиваться квадратичными регуляризирующими добавками, поскольку это позволяет добиться лучшей аппроксимации исходной задачи последовательностью возмущенных задач, а также лучших дифференциальных свойств возмущенных задач [8–10]. В настоящей статье используется одна и та же равномерно выпуклая вспомогательная функция как для построения регуляризованных задач, так и для конструирования интервальной функции и предлагается метод спуска для довольно широкого класса негладких монотонных равновесных задач.

2. Регуляризация для негладких монотонных равновесных задач. Приведем некоторые свойства монотонности равновесных функций [11–13].

Равновесная функция ψ называется

(i) *монотонной*, если для всех $u,\, v \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие $\psi(u,v) + \psi(v,u) \leqslant 0$;

(ii) *сильно монотонной с константой* τ, если для всех $u,\, v \in \mathbb{R}^n$: $\psi(u,v) + \psi(v,u) \leqslant -\tau \|u-v\|^2$.

Следуя известному определению, функцию $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ будем называть *равномерно выпуклой с функцией* θ, если для всех $u,\, v \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\alpha\varphi(u) + (1-\alpha)\varphi(v) - 0.5\alpha(1-\alpha)\theta\big(\|v-u\|\big)\|v-u\| \geqslant \varphi\big(\alpha u + (1-\alpha)v\big),$$

где $\alpha \in [0,1]$ и $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция, такая, что $\theta(0) = 0$. Эта формулировка соответствует, например, определению равномерно выпуклой функции [14, с. 218], в котором используется функция $\eta(t) = 0.5t\theta(t)$.

Отметим, что для равномерно выпуклой функции для всех $u,\, v \in \mathbb{R}^n$ выполняется следующее неравенство [14, с. 221]: $\varphi(v) - \varphi(u) \geqslant \big\langle \nabla\varphi(u),\, v-u \big\rangle + 0.5\theta\big(\|v-u\|\big)\|v-u\|$.

Напомним также некоторые свойства монотонности отображений [11–13].

[1] Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет (КФУ), ул. Кремлевская, 18, 420008, г. Казань; доцент, e-mail: Olga.Piniaguina@ksu.ru

Отображение $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется
(i) *монотонным*, если для всех $u,\, v \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $\big\langle G(u) - G(v),\, u - v \big\rangle \geqslant 0$;
(ii) *сильно монотонным с константой* τ, если для всех $u,\, v \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\big\langle G(u) - G(v),\, u - v \big\rangle \geqslant \tau \|u - v\|^2;$$

(iii) *равномерно монотонным* с функцией θ, если для всех $u,\, v \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\big\langle G(u) - G(v),\, u - v \big\rangle \geqslant \theta\big(\|u - v\|\big)\|u - v\|,$$

где $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция, такая, что $\theta(0) = 0$.

Очевидным является тот факт, что градиент выпуклой (сильно выпуклой, равномерно выпуклой) функции является монотонным (сильно монотонным, равномерно монотонным) отображением.

Для задачи 1 в дальнейшем будем использовать следующие предположения.

(A1) Множество решений задачи U^* непусто.

(A2) Равновесная функция ψ монотонна, $\psi(u, \cdot)$ выпукла для любых $u \in \mathbb{R}^n$.

(A3) Для любых $u,\, v \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $\big\langle \nabla_u \psi(u, v) + \nabla_v \psi(u, v),\, v - u \big\rangle \geqslant 0$.

Здесь и далее $\nabla_u \psi(\cdot, \cdot)$ и $\nabla_v \psi(\cdot, \cdot)$ — частные градиенты функции ψ по первому и второму векторному аргументу соответственно.

Отметим, что в случае вариационного неравенства, т.е. когда функция ψ представлена в форме $\psi(u, v) = \big\langle G(u), v - u \big\rangle$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, свойство (A3) принимает вид $\big\langle \nabla G(u)^{\mathrm{T}}(v - u),\, v - u \big\rangle \geqslant 0$, что соответствует требованию монотонности отображения G.

Для применения регуляризации Тихонова–Браудера выберем вспомогательную функцию $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая обладает следующими свойствами:

(B1) φ равномерно выпукла с функцией θ и дифференцируема на $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим возмущенную задачу.

Задача 2. Найти точку $u^\varepsilon \in U$, такую, что

$$\psi\big(u^\varepsilon, v\big) + \varepsilon\Big[\varphi(v) - \varphi\big(u^\varepsilon\big)\Big] + f(v) - f\big(u^\varepsilon\big) \geqslant 0 \quad \forall v \in U, \tag{1}$$

где ε — положительное число, называемое параметром регуляризации.

Обозначим множество решений задачи 2 через U^ε.

Определим вначале условия оптимальности для задачи 2.

Предложение 1. *Точка u^ε является решением задачи 2 тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\Big\langle \nabla_v \psi\big(u^\varepsilon, u^\varepsilon\big) + \varepsilon \nabla \varphi\big(u^\varepsilon\big),\, v - u^\varepsilon \Big\rangle + f(v) - f\big(u^\varepsilon\big) \geqslant 0 \quad \forall v \in U \tag{2}$$

или

$$\psi\big(u^\varepsilon, v\big) + \varepsilon \Big\langle \nabla \varphi\big(u^\varepsilon\big),\, v - u^\varepsilon \Big\rangle + f(v) - f\big(u^\varepsilon\big) \geqslant 0 \quad \forall v \in U. \tag{3}$$

Доказательство. Докажем импликацию (1) $\Rightarrow$ (2). Поскольку $u^\varepsilon \in U^\varepsilon$, то u^ε является решением следующей оптимизационной задачи: $\min\limits_{u \in U} \longrightarrow \psi\big(u^\varepsilon, v\big) + \varepsilon \varphi(v) + f(v)$.

Условия оптимальности для этой задачи: $\Big\langle \nabla_v \psi\big(u^\varepsilon, u^\varepsilon\big) + \varepsilon \nabla \varphi\big(u^\varepsilon\big) + g,\, v - u^\varepsilon \Big\rangle \geqslant 0$ для всех $v \in U$, где g — субградиент функции f в точке u^ε. Учитывая определение субградиента, получим соотношение (2). Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) следует в силу выпуклости функции $\psi(u, \cdot)$ и утверждения $\psi(u, u) = 0$. Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) следует в силу выпуклости функции φ. Что и требовалось доказать.

Предложение 2. *Пусть выполнены предположения* (A2) *и* (B1). *Тогда задача* 2 *имеет единственное решение.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 3.1 из [15] с заменой условия сильной монотонности на равномерную монотонность.

Последовательность решений задач 2 при $\varepsilon \to 0$ представляет собой аппроксимацию решения задачи 1. Это свойство известно как регуляризация Тихонова–Браудера [3, 4, 16]. Доказательство следующей теоремы в основном аналогично результатам [7, 9].

Теорема 1. *При предположениях* (A1), (A2) *и* (B1) *любая последовательность* $\big\{u^{\varepsilon_k}\big\}$ *при* $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ *сходится к точке $u_n^* \in U^*$, такой, что*

$$\varphi(u_n^*) = \min_{u \in U^*} \varphi(u). \tag{4}$$

Таким образом, для решения исходной монотонной задачи 1 мы можем использовать общую схему регуляризации.

3. Прямая интервальная функция для регуляризованной задачи. Будем строить интервальную (оценочную) функцию для регуляризованной задачи следующим образом.

Определим функцию:

$$\mu_\varepsilon(u) = \max_{v \in U} \Phi_\varepsilon(u, v) = \Phi_\varepsilon\big(u, v_\varepsilon(u)\big), \tag{5}$$

где $\Phi_\varepsilon(u, v) = -\psi(u, v) - f(v) + f(u) - \varepsilon\big[\varphi(v) - \varphi(u)\big]$.

Это так называемая *прямая интервальная функция* (primal gap function) для задачи 2. Методы, основанные на этой функции, для смешанного вариационного неравенства изучены в [17] в предположении сильной выпуклости вспомогательной функции φ.

Заметим, что точка $v_\varepsilon(u)$ всегда существует и является единственным решением задачи (5), поскольку $\Phi_\varepsilon(u, \cdot)$ — равномерно вогнутая функция.

Условия оптимальности для задачи (5) можно записать в следующем виде.

Предложение 3. *Пусть выполняются предположения* (A2) *и* (B1)*, и пусть u — некоторая точка из U. Тогда выполняется условие*

$$\Big\langle \nabla_v \psi\big(u, v_\varepsilon(u)\big) + \varepsilon \nabla \varphi\big(v_\varepsilon(u)\big),\, z - v_\varepsilon(u) \Big\rangle + f(z) - f\big(v_\varepsilon(u)\big) \geqslant 0 \quad \forall z \in U. \tag{6}$$

Доказательство. Выберем любую точку $z \in U$. Условия оптимальности для задачи (5) имеют вид

$$\Big\langle -\nabla_v \psi\big(u, v_\varepsilon(u)\big) - \varepsilon \nabla \varphi\big(v_\varepsilon(u)\big) - g,\, v_\varepsilon(u) - z \Big\rangle \geqslant 0,$$

где g — субградиент функции f в точке $v_\varepsilon(u)$. Отсюда, согласно определению субградиента, получим

$$\Big\langle \nabla_v \psi\big(u, v_\varepsilon(u)\big) + \varepsilon \nabla \varphi\big(v_\varepsilon(u)\big), z - v_\varepsilon(u) \Big\rangle + f(z) - f\big(v_\varepsilon(u)\big) \geqslant 0,$$

т.е. условие (6) выполняется. Что и требовалось доказать.

Определенная в (5) функция μ_ε будет служить интервальной функцией для задачи 2. По определению эта функция всегда неотрицательна, так как $\Phi_\varepsilon(u, u) = 0$. В следующем предложении доказываются ее основные свойства.

Предложение 4. *Пусть выполняются условия* (A2) *и* (B1). *Тогда для любой точки $u \in U$:*

1) $\mu_\varepsilon(u) \geqslant 0.5\varepsilon\theta\Big(\big\|u - v_\varepsilon(u)\big\|\Big)\big\|u - v_\varepsilon(u)\big\|$;

2) *следующие утверждения эквивалентны*:

  (i) $\mu_\varepsilon(u) = 0$,

  (ii) $u = v_\varepsilon(u)$,

  (iii) $u \in U^\varepsilon$.

Доказательство. Из соотношения (6) при $z = u$ имеем

$$\Big\langle \nabla_v \psi\big(u, v_\varepsilon(u)\big) + \varepsilon \nabla \varphi\big(v_\varepsilon(u)\big),\, u - v_\varepsilon(u) \Big\rangle + f(u) - f\big(v_\varepsilon(u)\big) \geqslant 0.$$

Учитывая, что функция $\psi(u, \cdot)$ выпукла, а функция φ равномерно выпукла, получим

$$\psi(u, u) - \psi\big(u, v_\varepsilon(u)\big) + \varepsilon\bigg[\varphi(u) - \varphi\big(v_\varepsilon(u)\big) - 0.5\theta\Big(\big\|u - v_\varepsilon(u)\big\|\Big)\big\|u - v_\varepsilon(u)\big\|\bigg] + f(u) - f\big(v_\varepsilon(u)\big) \geqslant 0.$$

Следовательно, из определения функции μ и соотношения $\psi(u, u) = 0$ имеем

$$\mu_\varepsilon(u) = \Phi_\varepsilon\big(u, v_\varepsilon(u)\big) \geqslant 0.5\varepsilon\theta\Big(\big\|u - v_\varepsilon(u)\big\|\Big)\big\|u - v_\varepsilon(u)\big\|.$$

Мы доказали, что утверждение (i) справедливо. Теперь, используя только что доказанное утверждение, из $\mu_\varepsilon(u) = 0$ получим $u = v_\varepsilon(u)$, т.е. (i) $\Rightarrow$ (ii). Обратное соотношение (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидно в силу определения функции μ_ε. Далее, при $u = v_\varepsilon(u)$ соотношение (6) принимает вид

$$\big\langle \nabla_v \psi(u, u) + \varepsilon \nabla \varphi(u), z - u \big\rangle + f(z) - f(u) \geqslant 0 \quad \forall z \in U,$$

откуда в силу выпуклости функций $\psi(u,\cdot)$ и φ следует

$$\psi(u,z)-\psi(u,u)+\varepsilon\big[\varphi(z)-\varphi(u)\big]+f(z)-f(u)\geqslant 0\quad\forall z\in U.$$

Это означает, что $u\in U^\varepsilon$, т.е., (ii) $\Rightarrow$ (iii). Наконец, пусть $u\in U^\varepsilon$, но $u\neq v_\varepsilon(u)$. Тогда из соотношения (6) при $z=u$ снова имеем

$$\Big\langle\nabla_v\psi\big(u,v_\varepsilon(u)\big)+\varepsilon\nabla\varphi\big(v_\varepsilon(u)\big),\,u-v_\varepsilon(u)\Big\rangle+f(u)-f\big(v_\varepsilon(u)\big)\geqslant 0.$$

Отсюда в силу выпуклости $\psi(u,\cdot)$ и равномерной выпуклости φ получим

$$\psi\big(u,v_\varepsilon(u)\big)+\varepsilon\Big[\varphi\big(v_\varepsilon(u)\big)-\varphi(u)\Big]+f\big(v_\varepsilon(u)\big)-f(u)\leqslant -0.5\varepsilon\theta\Big(\big\|u-v_\varepsilon(u)\big\|\Big)\big\|u-v_\varepsilon(u)\big\|<0,$$

т.е. мы пришли к противоречию, из которого следует, что соотношение (iii) $\Rightarrow$ (ii) также справедливо. Предложение 4 доказано.

Свойства функции μ_ε, доказанные в предложении 4, т.е. неотрицательность функции на допустимом множестве и равенство нулю на множестве решений задачи 2, показывают, что μ_ε может служить интервальной (оценочной) функцией для задачи 2. Отсюда, в частности, следует, что исходная задача 2 эквивалентна задаче условной минимизации

$$\min_{u\in U}\longrightarrow\mu_\varepsilon(u).\tag{7}$$

Однако в данных условиях выпуклость функции μ_ε не гарантируется, и задача (7), вообще говоря, может иметь локальные минимумы, отличные от глобального. Поэтому было бы удобно заменить эту задачу на ее условия стационарности, которые будут сформулированы в следующем разделе этой статьи.

4. Непрерывность и стационарность.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (A2) *и* (B1). *Тогда отображение* $u\mapsto v_\varepsilon(u)$ *непрерывно.*

Доказательство. Выберем произвольные точки u', $u''\in U$ и обозначим $v'=v_\varepsilon(u')$, $v''=v_\varepsilon(u'')$. Тогда в силу (6) при $z=v''$ и $z=v'$ имеем соответственно

$$\big\langle\nabla_v\psi(u',v')+\varepsilon\nabla\varphi(v'),\,v''-v'\big\rangle+f(v'')-f(v')\geqslant 0,$$
$$\big\langle\nabla_v\psi(u'',v'')+\varepsilon\nabla\varphi(v''),\,v'-v''\big\rangle+f(v')-f(v'')\geqslant 0.$$

Просуммировав эти неравенства и прибавив к обеим частям слагаемое $\big\langle\nabla_v\psi(u'',v'),v''-v'\big\rangle$, получим

$$\big\langle\nabla_v\psi(u',v')-\nabla_v\psi(u'',v'),\,v''-v'\big\rangle+\big\langle\nabla_v\psi(u'',v')-\nabla_v\psi(u'',v''),\,v''-v'\big\rangle+\varepsilon\big\langle\nabla\varphi(v')-\nabla\varphi(v''),\,v''-v'\big\rangle\geqslant 0.$$

Поскольку отображение $\nabla\varphi$ равномерно монотонно, а отображение $\nabla_v\psi(u'',\cdot)$ монотонно, отсюда имеем

$$\big\|\nabla_v\psi(u',v')-\nabla_v\psi(u'',v')\big\|\,\|v'-v''\|\geqslant\varepsilon\theta\big(\|v'-v''\|\big)\|v'-v''\|.$$

Следовательно, $\big\|\nabla_v\psi(u',v')-\nabla_v\psi(u'',v')\big\|\geqslant\varepsilon\theta\big(\|v'-v''\|\big)$, и в силу непрерывности отображения $\nabla_v\psi$ отображение $u\mapsto v_\varepsilon(u)$ также непрерывно, что и требовалось доказать.

Из леммы 1 и формулы (5), в частности, следует, что функция μ_ε непрерывна на U.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (A2) *и* (B1). *Тогда функция* μ_ε *имеет производную в любой точке* $u\in U$ *по любому направлению* $d\in\mathbb{R}^n$, *причем* $\mu'_\varepsilon(u;d)=f'(u;d)-\Big\langle\nabla_u\psi\big(u,v_\varepsilon(u)\big)-\varepsilon\nabla\varphi(u),\,d\Big\rangle$.

Доказательство. Выберем произвольно вектор $d\in R^n$. Учитывая свойство непрерывности отображения $u\mapsto v_\varepsilon(u)$ и определение функции μ_ε, получаем, что в этих условиях можно применить теорему 3.4 из [18, гл. 1] о дифференцировании функции максимума, откуда следует, что функция μ_ε дифференцируема по направлениям в любой точке $u\in U$ и

$$\mu'_\varepsilon(u;d)=f'(u;d)-\Big\langle\nabla_u\psi\big(u,v_\varepsilon(u)\big)-\varepsilon\nabla\varphi(u),\,d\Big\rangle.$$

Что и требовалось доказать.

Для разработки метода спуска по интервальной функции нам потребуется направление убывания этой функции. Если точка u не является решением задачи 2, то вектор $d=v_\varepsilon(u)-u$ представляет собой направление убывания для функции μ_ε в точке u.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* (A2), (A3) *и* (B1). *Тогда для любого* $u \in U$ *выполняется неравенство*

$$\mu'_\varepsilon\big(u; v_\varepsilon(u) - u\big) \leqslant -\varepsilon\theta\Big(\big\|v_\varepsilon(u) - u\big\|\Big)\big\|v_\varepsilon(u) - u\big\|.$$

Доказательство. Выберем любую точку $u \in U$. Согласно лемме 2 имеем

$$\mu'_\varepsilon\big(u; v_\varepsilon(u) - u\big) = f'\big(u; v_\varepsilon(u) - u\big) - \Big\langle \nabla_u\psi\big(u, v_\varepsilon(u)\big) - \varepsilon\nabla\varphi(u),\, v_\varepsilon(u) - u\Big\rangle.$$

С другой стороны, в силу предложения 3, полагая в (6) $z = u$, приходим к неравенству

$$0 \leqslant \Big\langle \nabla_v\psi\big(u, v_\varepsilon(u)\big) + \varepsilon\nabla\varphi\big(v_\varepsilon(u)\big),\, u - v_\varepsilon(u)\Big\rangle + f(u) - f\big(v_\varepsilon(u)\big).$$

Складывая эти соотношения, получим

$$\mu'_\varepsilon\big(u; v_\varepsilon(u) - u\big) \leqslant f'\big(u; v_\varepsilon(u) - u\big) + f(u) - f\big(v_\varepsilon(u)\big) -$$
$$- \bigg\langle \Big[\nabla_u\psi\big(u, v_\varepsilon(u)\big) + \nabla_v\psi\big(u, v_\varepsilon(u)\big)\Big] + \varepsilon\Big[\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi\big(v_\varepsilon(u)\big)\Big],\, v_\varepsilon(u) - u\bigg\rangle.$$

Для любой точки u из множества U сумма первых трех слагаемых в правой части неравенства неположительна вследствие выпуклости функции f. Поэтому в силу предположений (A3) и (B1) о свойстве типа монотонности для функции ψ и равномерной монотонности отображения $\nabla\varphi$ получаем утверждение леммы.

Итак, решение задачи (5) позволяет получить направление убывания функции μ_ε в любой точке $u \in U \backslash U^\varepsilon$.

Сформулируем теперь необходимое и достаточное условие оптимальности для задачи (7).

Теорема 2 (условие стационарности). *Пусть выполняются условия* (A2), (A3) *и* (B1). *Тогда* $\mu'_\varepsilon(u; v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in U \Longleftrightarrow u \in U^\varepsilon$.

Доказательство. То, что решение задачи 2 и эквивалентной ей задачи (7) должно удовлетворять условию неотрицательности производной по любому направлению в этой точке, является очевидным. Предположим теперь, что $\mu'_\varepsilon(u; v - u) \geqslant 0$ для всех $v \in U$.

Тогда из леммы 3 следует, что $-\theta\Big(\big\|u - v_\varepsilon(u)\big\|\Big)\|u - v_\varepsilon(u)\| \geqslant 0$, а это неравенство выполняется только тогда, когда $u = v_\varepsilon(u)$. Согласно предложению 4, получим $u \in U^\varepsilon$. Теорема доказана.

Итак, любая стационарная точка задачи (7) дает решение исходной задачи 2, поэтому для отыскания решения можно использовать соответствующие итеративные методы минимизации с учетом негладкости функции μ_ε.

5. Метод спуска. Сформулируем следующий метод для задачи 2 на основе результатов предыдущего раздела.

Метод 1.

Шаг 0. Выберем произвольно точку $u^0 \in U$, непрерывно возрастающую функцию $\eta : R \to R$, такую, что $\eta(0) = 0$, и число $\gamma \in (0, 1)$. Положим $k = 0$.

Шаг 1. Вычислим $\mu_\varepsilon\big(u^{(k)}\big)$ и $v_\varepsilon\big(u^{(k)}\big)$ по формуле $\mu_\varepsilon\big(u^{(k)}\big) = \max\limits_{v\in U}\Phi_\varepsilon\big(u^{(k)}, v\big) = \Phi_\varepsilon\Big(u^{(k)},\, v_\varepsilon\big(u^{(k)}\big)\Big)$. Если $\mu_\varepsilon\big(u^{(k)}\big) = 0$, то $u^{(k)}$ является решением задачи 2 и процесс решения останавливается.

Шаг 2. Положим $d^{(k)} = v_\varepsilon\big(u^{(k)}\big) - u^{(k)}$. Находим m как наименьшее целое неотрицательное число, такое, что

$$\mu_\varepsilon\big(u^{(k)} + \gamma^m d^{(k)}\big) - \mu_\varepsilon\big(u^{(k)}\big) \leqslant -\gamma^m\eta\Big(\big\|d^{(k)}\big\|\Big)\big\|d^{(k)}\big\|; \tag{8}$$

положим $\lambda_k = \gamma^m$, $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \lambda_k d^{(k)}$, заменим k на $k + 1$ и перейдем к шагу 1.

В дальнейшем нам понадобится также следующая оценка точности приближений.

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения* (A2) *и* (B1). *Тогда верна оценка*

$$0.5\varepsilon\theta\Big(\big\|u - u^\varepsilon\big\|\Big)\big\|u - u^\varepsilon\big\| \leqslant \mu_\varepsilon(u) \quad \forall u \in U, \quad u^\varepsilon \in U^\varepsilon. \tag{9}$$

Доказательство. По определению функции μ_ε, в силу монотонности функции ψ, равномерной выпуклости функции φ и соотношения (3) получаем

$$\mu_\varepsilon(u) \geqslant \Phi_\varepsilon\big(u, u^\varepsilon\big) = -\psi\big(u, u^\varepsilon\big) - f\big(u^\varepsilon\big) + f(u) - \varepsilon\Big[\varphi\big(u^\varepsilon\big) - \varphi(u)\Big] \geqslant$$
$$\geqslant \psi\big(u^\varepsilon, u\big) + \varepsilon\Big\langle \nabla\varphi\big(u^\varepsilon\big),\, u - u^\varepsilon\Big\rangle + f(u) - f\big(u^\varepsilon\big) + \varepsilon\Big[\varphi(u) - \varphi\big(u^\varepsilon\big) - \Big\langle \nabla\varphi\big(u^\varepsilon\big),\, u - u^\varepsilon\Big\rangle\Big] \geqslant$$
$$\geqslant 0.5\varepsilon\theta\Big(\big\|u - u^\varepsilon\big\|\Big)\big\|u - u^\varepsilon\big\|,$$

что и требовалось доказать.

Введем обозначение: $S_\varepsilon(u) = \big\{v \in U \,|\, \mu_\varepsilon(v) \leqslant \mu_\varepsilon(u)\big\}$ для всех $u \in U$.

Следствие. Пусть выполняются предположения (A2) и (B1). Тогда лебегово множество $S_\varepsilon(u)$ для любого $u \in U$ является ограниченным.

Доказательство сходимости метода в основном следует методике работы [19].

Теорема 4. *Пусть выполняются предположения* (A2), (A3) *и* (B1). *Если* $\eta(x) < \varepsilon\theta(x)$ *для всех* $x > 0$ *и метод спуска строит бесконечную последовательность* $\big\{u^{(k)}\big\}$, *то она сходится к единственному решению задачи* 2.

Доказательство. Сначала докажем конечность процедуры поиска по критерию (8). Предположим, что эта процедура бесконечна, т.е.

$$\mu'_\varepsilon\big(u^{(k)}; d^{(k)}\big) = \lim_{k\to\infty} \gamma^{-m}\Big(\mu_\varepsilon\big(u^{(k)} + \gamma^m d^{(k)}\big) - \mu_\varepsilon\big(u^{(k)}\big)\Big) \geqslant -\eta\Big(\big\|d^{(k)}\big\|\Big)\big\|d^{(k)}\big\|.$$

В силу леммы 3: $\mu'_\varepsilon\big(u^{(k)}; d^{(k)}\big) \leqslant -\varepsilon\theta\Big(\big\|d^{(k)}\big\|\Big)\big\|d^{(k)}\big\|$. Следовательно, $\eta\Big(\big\|d^{(k)}\big\|\Big)\big\|d^{(k)}\big\| \geqslant \varepsilon\theta\Big(\big\|d^{(k)}\big\|\Big)\big\|d^{(k)}\big\|$, а это неравенство выполняется только при условии $d^{(k)} = 0$, что невозможно по построению алгоритма.

Таким образом, процедура линейного поиска в методе спуска конечна и $\lambda_k > 0$ для всех k. В силу условия (8) и неотрицательности функции μ_ε на U, последовательность $\mu_\varepsilon\big(u^{(k)}\big)$ монотонно убывает и ограничена снизу, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_\varepsilon\big(u^{(k)}\big) = C \geqslant 0$. В то же время, согласно следствию 1, итерационная последовательность $\big\{u^{(k)}\big\}$ ограничена и имеет предельные точки, поэтому в силу леммы 1 последовательность $\big\{d^{(k)}\big\}$ также ограничена и имеет предельные точки.

Предположим, что $\lim\limits_{k\to\infty} d^{(k)} \neq 0$. Тогда в силу (8) найдется бесконечная последовательность номеров $\{k_s\}$, такая, что $\liminf\limits_{s\to\infty} \big\|d^{(k_s)}\big\| \geqslant C' > 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, поэтому

$$\mu_\varepsilon\big(u^{(k_s)} + (\lambda_{k_s}/\gamma)d^{(k_s)}\big) - \mu_\varepsilon\big(u^{(k_s)}\big) > -\eta\Big(\big\|d^{(k_s)}\big\|\Big)\big\|d^{(k_s)}\big\|.$$

Отсюда, используя теорему о среднем (например, теорему 3.1 из [18, гл. 1]), имеем

$$\mu'_\varepsilon\big(u^{(k_s)} + \xi_{k_s}(\lambda_{k_s}/\gamma)d^{(k_s)};\, d^{(k_s)}\big) > -\eta\Big(\big\|d^{(k_s)}\big\|\Big)\big\|d^{(k_s)}\big\|$$

для некоторого $\xi_{k_s} \in (0,1)$. Учитывая лемму 2, получим

$$f'\big(u^{(k_s)} + \xi_{k_s}(\lambda_{k_s}/\gamma)d^{(k_s)};\, d^{(k_s)}\big) - \Big\langle\ \nabla_u\psi\Big(u^{(k_s)} + \xi_{k_s}(\lambda_{k_s}/\gamma)d^{(k_s)},\, v_\varepsilon\big(u^{(k_s)} + \xi_{k_s}(\lambda_{k_s}/\gamma)d^{(k_s)}\big)\Big) -$$
$$- \varepsilon\nabla\varphi\big(u^{(k_s)} + \xi_{k_s}(\lambda_{k_s}/\gamma)d^{(k_s)}\big),\, d^{(k_s)}\Big\rangle > -\eta\Big(\big\|d^{(k_s)}\big\|\Big)\big\|d^{(k_s)}\big\|.$$

Переходя к пределу при $k_s \to \infty$ и беря подпоследовательность, если необходимо, получим с учетом непрерывности $\nabla_u\psi$, φ и f:

$$f'\big(\widetilde{u}; \widetilde{d}\big) - \Big\langle \nabla_u\psi\Big(\widetilde{u},\, v_\varepsilon\big(\widetilde{u}\big)\Big) - \varepsilon\nabla\varphi\big(\widetilde{u}\big),\, \widetilde{d}\Big\rangle \geqslant -\eta\Big(\big\|\widetilde{d}\big\|\Big)\big\|\widetilde{d}\big\|,$$

где $\widetilde{u}$ и $\widetilde{d}$ — соответствующие предельные точки последовательностей $\big\{u^{(k_s)}\big\}$ и $\big\{d^{(k_s)}\big\}$. Однако из леммы 3 следует, что $\eta\Big(\big\|\widetilde{d}\big\|\Big)\big\|\widetilde{d}\big\| \geqslant \varepsilon\theta\Big(\big\|\widetilde{d}\big\|\Big)\big\|\widetilde{d}\big\|$, а это возможно только при $\widetilde{d} = 0$. Получили противоречие, поскольку $\big\|\widetilde{d}\big\| \geqslant C' > 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} d^{(k)} = 0$. Пусть $\widetilde{u}$ — любая предельная точка последовательности $u^{(k)}$. Тогда из леммы 1 следует $v_\varepsilon(\widetilde{u}) = \widetilde{u}$. Согласно предложению 4 это означает, что $\widetilde{u} = u^\varepsilon$, где u^ε — единственное решение задачи 2. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} u^{(k)} = u^\varepsilon$. Теорема доказана.

Представим теперь метод решения исходной монотонной задачи 1.

Метод 2.

Шаг 0. Выберем произвольную точку $z^0 \in U$, число $\delta > 0$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\} \searrow 0$. Положим $i = 1$.

Шаг 1. Применим метод 1 при $y^{(0)} = z^{(i-1)}$ и $\varepsilon = \varepsilon_i$ и будем строить последовательность $\{y^{(k)}\}$ до тех пор, пока не выполнится условие

$$\mu_\varepsilon(y^{(k)}) \leqslant \varepsilon^{1+\delta}. \tag{10}$$

Шаг 2. Положим $z^{(i)} = y^{(k)}$, заменим i на $i+1$ и перейдем к шагу 1.

Теорема 5. *Пусть выполняются предположения* (A1)–(A3) *и* (B1) *и последовательность* $\{z^{(i)}\}$ *построена методом* 2. *Тогда*

(i) *каждая* i*-я итерация метода является конечной;*

(ii) *последовательность* $\{z^{(i)}\}$ *сходится к точке* $u_n^* \in U^*$*, такой, что выполняется условие* (4).

Доказательство. Прежде всего, отметим, что поскольку $\mu_{\varepsilon_i}(y^{(k)}) \to 0$ при $k \to \infty$, из пункта 1 предложения 4 мы получим, что $\left\|y^{(k)} - v_{\varepsilon_i}(y^{(k)})\right\| \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, неравенство (10) будет выполнено после конечного числа итераций метода 1. Таким образом, утверждение (i) доказано. Теперь, комбинируя (9) и (10), получим $0.5\theta\Big(\|z^{(i)} - u^{\varepsilon_i}\|\Big)\|z^{(i)} - u^{\varepsilon_i}\| \leqslant \varepsilon_i^\delta$, где u^{ε_i} является решением задачи 2 при $\varepsilon = \varepsilon_i$, отсюда $\|z^{(i)} - u^{\varepsilon_i}\| \to 0$ при $i \to \infty$.

Кроме того, выполняется неравенство $\|z^{(i)} - u_n^*\| \leqslant \|z^{(i)} - u^{\varepsilon_i}\| + \|u^{\varepsilon_i} - u_n^*\|$. По теореме 1 имеем, что $\lim\limits_{i\to\infty} u^{\varepsilon_i} = u_n^*$, поэтому утверждение (ii) также верно. Теорема 5 доказана.

6. Численные эксперименты. Предложенные в работе методы за счет применения *равномерно выпуклых* вспомогательных функций позволяют добиться более высокой скорости сходимости по сравнению с известными методами, использующими *сильно выпуклые* функции.

Рассмотрим частный случай задачи 1, где равновесная функция $\psi(u,v) = \langle G(u), v-u\rangle$, а функция f представлена в виде суммы выпуклых функций $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$.

Задача 3. *Найти точку* $u^* \in U$*, такую, что* $\Big\langle G(u^*),\, u - u^*\Big\rangle + \sum\limits_{i=1}^n \big[f_i(u_i) - f_i(u_i^*)\big] \geqslant 0$ *для всех* $u \in U$.

Пример. В задаче 3 для построения монотонных отображений будем использовать кососимметрическую матрицу $Q = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}$. Здесь A — произвольная квадратная матрица. Если положить $G(u) = Q^{\mathrm{T}} u$, то получим отображение G, которое является линейным и монотонным, но не является ни потенциальным, ни строго монотонным.

Негладкие функции зададим в следующем виде:

$$f_i(u_i) = \gamma_i h(u_i), \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1,\dots,n, \quad h(t) = \max\{t-1, 0\}.$$

Допустимое множество задачи зададим как $U = \{u \in \mathbb{R}^n : d_i \leqslant u_i \leqslant e_i, i = 1,\dots,n\}$ — n-мерный параллелепипед.

Пусть размерность задачи равна 50. Коэффициенты матрицы A — случайные числа в диапазоне $[-20; 20]$, коэффициенты γ_i — случайные числа в диапазоне $[0; 10]$, $d_i = -10$, $e_i = 10$, $i = 1,\dots,n$. Параметры метода: $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.5$, $\theta = 1$.

Количество итераций и время расчета

$\varphi(u)$	ε		
	10	25	50
$\|u\|^2$	313 с, 1062 ит.	38 с, 98 ит.	13 с, 27 ит.
$\|u\|^{2.5}$	12 с, 118 ит.	609 мс, 14 ит.	125 мс, 3 ит.
$\|u\|^3$	12 с, 32 ит.	172 мс, 5 ит.	78 мс, 2 ит.

Для иллюстрации нашего подхода рассмотрим более подробно поведение метода 2 на основном шаге 1. Каждая итерация на этом шаге представляет собой применение метода 1 к регуляризованной задаче 2 с фиксированным значением параметра регуляризации вплоть до получения приближенного решения с заданной погрешностью по расстоянию, оценку которой дает значение интервальной функции.

Результаты вычислений для разных значений параметра ε и разных видов вспомогательной функции φ приведены в таблице. Время расчета и количество итераций для равномерно выпуклых вспомогательных функций, не являющихся сильно выпуклыми (вторая и третья строки) существенно лучше, чем для сильно выпуклой функции (первая строка).

Расчеты проводились в среде Visual C++ на компьютере Athlon (2.3 ГГц, 2 Гб).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Patriksson M.* Nonlinear programming and variational inequality problems: a unified approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1999.
2. *Konnov I.V., Pinyagina O.V. D*-gap functions for a class of equilibrium problems in Banach spaces // Computational Methods in Applied Mathematics. 2003. **3**. 274–286.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. *Browder F.E.* Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1966. **56**. 1080–1086.
5. *Konnov I.V., Kum S.* Descent methods for mixed variational inequalities in a Hilbert space // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2001. **47**. 561–572.
6. *Konnov I.V., Kum S., Lee G.M.* On convergence of descent methods for variational inequalities in a Hilbert space // Math. Meth. Oper. Res. 2002. **55**. 371–382.
7. *Konnov I.V., Pinyagina O.V. D*-gap functions and descent methods for a class of monotone equilibrium problems // Lobachevskii J. of Mathematics. 2003. **13**. 57–65.
8. *Kaplan A., Tichatschke R.* Auxiliary problem principle and the approximation of variational inequalities with non-symmetric multi-valued operators // CMS Conf. Proc. 2000. **27**. 185–209.
9. *Pinyagina O.V., Ali M.S.S.* Descent method for monotone mixed variational inequalities // Calcolo. 2008. **45**. 1–15.
10. *Коннов И.В., Пинягина О.В.* Метод решения монотонных смешанных вариационных неравенств // Уч. зап. Казанск. ун-та. 2011. **153**, кн. 1. 221–230.
11. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988.
12. *Blum E., Oettli W.* From optimization and variational inequalities to equilibrium problems // The Mathem. Student. 1994. **63**. 123–145.
13. *Konnov I.V.* Combined relaxation methods for variational inequalities. Berlin: Springer, 2001.
14. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
15. *Chadli O., Konnov I.V., Yao J.C.* Descent method for equilibrium problems in a Banach space // Comp. Mathem. Appl. 2004. **48**. 609–616.
16. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итерационные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
17. *Konnov I.V.* Iterative solution methods for mixed equilibrium problems and variational inequalities with non-smooth functions // Game Theory: Strategies, Equilibria, and Theorems. Ed. by I.N. Haugen and A.S. Nilsen. Hauppauge: NOVA, 2008. Chapter 4. 117–160.
18. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.И.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
19. *Коннов И.В.* Метод спуска с неточным линейным поиском для смешанных вариационных неравенств // Известия вузов. Математика. 2009. № 8. 37–44.

Поступила в редакцию
09.02.2012