УДК 517.518.87

ОЦЕНКИ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ НА ПРОСТРАНСТВАХ S_p ВЕСОВЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА

К. А. Кириллов[1]

Для весовых квадратурных формул получены оценки нормы функционала погрешности на пространствах S_p: нижняя оценка величины $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ для формул, точных на константах, и верхние оценки $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ для формул, обладающих d-свойством Хаара.

Ключевые слова: d-свойство Хаара, функционал погрешности квадратурной формулы, пространства функций S_p.

1. Введение. Задача построения и исследования кубатурных (квадратурных) формул, точных на некотором конечномерном классе функций, характеризует одно из важных направлений теории приближенного интегрирования. Ранее эта задача в основном решалась для вычисления интегралов, точных на алгебраических и тригонометрических многочленах. Кубатурные формулы, точные для конечных сумм Хаара, можно найти в монографии [1]. Описание всех минимальных весовых квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара (формул, точных для полиномов Хаара степеней, не превосходящих заданного числа d), проведено в [2, 3]. В [4] доказаны оценки нормы функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ и $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*}$ квадратурных формул, точных для полиномов Хаара с весовой функцией $g(x) \equiv 1$.

Результаты, полученные в [4] для величины $\|\delta_N\|_{S_p^*}$, в настоящей статье обобщены на случай квадратурных формул с весами: в случае весовой функции $g(x) \in L_1[0,1]$ выведена нижняя оценка нормы функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ квадратурных формул, точных на константах, а в случаях $g(x) \in L_\infty[0,1]$ и $g(x) \in L_q[0,1]$, где $p^{-1}+q^{-1}=1$, доказаны верхние оценки нормы функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара.

Отмечено, что для рассмотренных квадратурных формул величина $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ в случае $N \asymp 2^d$, $d \to \infty$, имеет наилучший порядок сходимости к нулю при $N \to \infty$, равный $N^{-1/p}$.

2. Основные определения. В настоящей статье используется оригинальное определение функций $\chi_{m,j}(x)$, введенное Хааром [5], отличное от определения этих функций из [1] в точках разрыва.

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $(j-1)/2^{m-1}$ и $j/2^{m-1}$, где $m=1,2,\ldots$ и $j=1,2,\ldots,2^{m-1}$. Если левый конец двоичного промежутка совпадает с 0, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1 — замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать $l_{m,j}^-$ и $l_{m,j}^+$ соответственно.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m=1,2,\ldots$ и $j=1,2,\ldots,2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{(m-1)/2} & \text{при} \quad x \in l_{m,j}^-, \\ -2^{(m-1)/2} & \text{при} \quad x \in l_{m,j}^+, \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m,j}}, \\ \dfrac{1}{2}\left[\chi_{m,j}(x-0)+\chi_{m,j}(x+0)\right], & \text{если} \quad x \text{ — внутренняя} \\ & \text{точка разрыва.} \end{cases}$$

Здесь $\overline{l_{m,j}} = \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}\right]$, $m=1,2,\ldots$ и $j=1,2,\ldots,2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_1(x) \equiv 1$, которая остается вне групп.

Полиномами Хаара степени d назовем линейные комбинации с вещественными коэффициентами функций $\chi_1(x)$ и $\chi_{m,j}(x)$, где $m=1,2,\ldots,d$ и $j=1,2,\ldots,2^{m-1}$, причем хотя бы один из коэффициентов при функциях Хаара $\chi_{d,j}(x)$ группы с номером d отличен от нуля.

[1] Сибирский Федеральный университет, кафедра “Прикладная математика и компьютерная безопасность”, ул. Киренского, 26, 660074, Красноярск; доцент, e-mail: kkirillov@rambler.ru

Будем рассматривать квадратурную формулу

$$I[f] = \int\limits_0^1 g(x)f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x^{(i)}) = Q_N[f], \tag{1}$$

где $x^{(i)} \in [0,1]$ — узлы и $C_i > 0$ — коэффициенты этой формулы соответственно. Функция $f(x)$ определена на $[0,1]$, а функция $g(x)$ такова, что произведение $g(x)f(x)$ суммируемо на $[0,1]$.

Функционал погрешности квадратурной формулы (1) обозначим через $\delta_N[f]$:

$$\delta_N[f] = \sum_{i=1}^{N} C_i f(x^{(i)}) - \int\limits_0^1 g(x)f(x)\,dx. \tag{2}$$

Будем говорить, что квадратурная формула (1) обладает d-свойством Хаара (или просто d-свойством), если она точна для любого полинома Хаара $P_d(x)$ степени, не превосходящей d, т.е. $Q_N[P_d] = I[P_d]$.

3. Оценки нормы функционала погрешности весовых квадратурных формул. Сформулируем определение классов функций S_p, введенное в [1].

Множество функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0,1]$ и представимых в виде ряда Фурье–Хаара

$$f(x) = c_0^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_m^{(j)} \chi_{m,j}(x) \tag{3}$$

с вещественными коэффициентами $c_0^{(1)}$, $c_m^{(j)}$ ($m = 1,2,\ldots,$ $j = 1,2,\ldots,2^{m-1}$), которые удовлетворяют условию

$$A_p(f) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left| c_m^{(j)} \right|^p \right]^{1/p} \leqslant A, \tag{4}$$

где $p \geqslant 1$ и A — вещественная константа, определяется как класс $S_p(A)$. Множество функций $f(x)$, принадлежащих всем классам $S_p(A)$ (со всевозможными A, значение $1 \leqslant p < \infty$ фиксировано), является линейным пространством, обозначаемым через S_p, на котором норма вводится по формуле

$$||f||_{S_p} = A_p(f). \tag{5}$$

При этом все функции $f(x)$, отличающиеся постоянными слагаемыми, считаются за одну функцию.

В [6] вводится понятие пространства $L_\infty[0,1]$, состоящего из всех измеримых почти всюду конечных функций $g(x)$, для каждой из которых найдется число C_g, такое, что $|g(x)| \leqslant C_g$ почти всюду. Такие функции называют существенно ограниченными. Мы будем рассматривать функции, существенно ограниченные на $[0,1]$. Для функции $g \in L_\infty[0,1]$ определен истинный (существенный) супремум ее модуля

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in[0,1]} |g(x)|$$

как инфимум множества чисел $\alpha \in \mathbb{R}$, таких, что мера множества

$$\{x \in [0,1] : |g(x)| > \alpha\}$$

равна нулю. Здесь $L_\infty[0,1]$ — линейное подмножество в множестве измеримых почти всюду конечных функций. Норма в $L_\infty[0,1]$ вводится по формуле

$$\|g\|_{L_\infty[0,1]} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in[0,1]} |g(x)|. \tag{6}$$

Лемма 1. [2] *Функции*

$$\kappa_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^m & \text{при} \quad x \in l_{m+1,j}, \\ 2^{m-1} & \text{при} \quad x \in \overline{l_{m+1,j}} \setminus l_{m+1,j}, \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m+1,j}}, \end{cases} \tag{7}$$

$j = 1, 2, \ldots, 2^m$, *являются полиномами Хаара степени* m *и образуют базис в линейном пространстве полиномов Хаара степеней, не превосходящих* m, $m = 1, 2, \ldots$.

Лемма 2. *Имеют место равенства*

$$\chi_{m,j}(x) = 2^{-(m+1)/2}\big[\kappa_{m,2j-1}(x) - \kappa_{m,2j}(x)\big], \quad m = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}, \tag{8}$$

$$\kappa_{m,2j-1}(x) + \kappa_{m,2j}(x) = 2\kappa_{m-1,j}(x), \quad m = 2, 3, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}. \tag{9}$$

Соотношения (8), (9) непосредственно следуют из определения функций Хаара и равенства (7).

Зафиксируем $p > 1$. Пусть q — число, связанное с p следующим соотношением:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Лемма 3. *Для любого целого неотрицательного* $k \leqslant m$, $m \in \mathbb{N}$, *имеет место неравенство*

$$\sum_{j=1}^{2^m}\Bigg(\int\limits_{l_{m+1,j}} |g(x)|\,dx + 2^{-m}Q[\kappa_{m,j}]\Bigg)^q \leqslant \sum_{j=1}^{2^{m-k}}\Bigg(\int\limits_{l_{m-k+1,j}} |g(x)|\,dx + 2^{-m+k}Q[\kappa_{m-k,j}]\Bigg)^q. \tag{10}$$

Доказательство. Доказательство леммы проведем индукцией по k.

При $k = 0$ неравенство (10) обращается в равенство.

Исходя из индуктивного предположения об истинности неравенства

$$\sum_{j=1}^{2^m}\Bigg(\int\limits_{l_{m+1,j}} |g(x)|\,dx + 2^{-m}Q[\kappa_{m,j}]\Bigg)^q \leqslant \sum_{j=1}^{2^{m-k+1}}\Bigg(\int\limits_{l_{m-k+2,j}} |g(x)|\,dx + 2^{-m+k-1}Q[\kappa_{m-k+1,j}]\Bigg)^q, \tag{11}$$

докажем неравенство (10). Легко видеть, что при $a, b > 0$ и $q > 1$ имеет место неравенство

$$a^q + b^q \leqslant (a+b)^q. \tag{12}$$

Применяя неравенство (12) и равенство (9), получим

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2^{m-k+1}}\Bigg(\int\limits_{l_{m-k+2,j}} |g(x)|\,dx + \frac{Q[\kappa_{m-k+1,j}]}{2^{m-k+1}}\Bigg)^q &\leqslant \sum_{j=1}^{2^{m-k}}\Bigg[\Bigg(\int\limits_{l_{m-k+2,2j}} |g(x)|\,dx + \frac{Q[\kappa_{m-k+1,2j}]}{2^{m-k+1}}\Bigg)^q + \\ + \Bigg(\int\limits_{l_{m-k+2,2j-1}} |g(x)|\,dx + \frac{Q[\kappa_{m-k+1,2j-1}]}{2^{m-k+1}}\Bigg)^q\Bigg] &\leqslant \sum_{j=1}^{2^{m-k}}\Bigg(\int\limits_{l_{m-k+1,j}} |g(x)|\,dx + \frac{Q[\kappa_{m-k,j}]}{2^{m-k}}\Bigg)^q.\end{aligned} \tag{13}$$

Из неравенств (11) и (13) следует (10). Лемма доказана.

Введем в рассмотрение величины

$$\Psi_q(m) = \Bigg[\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\Bigg|-\int\limits_{l^-_{m,j}} g(x)\,dx + \int\limits_{l^+_{m,j}} g(x)\,dx + 2^{-(m-1)/2}Q[\chi_{m,j}]\Bigg|^q\Bigg]^{1/q}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{14}$$

Лемма 4. *Если* $f \in S_p$ *и* $g \in L_1[0,1]$, *то для квадратурной формулы* (1) *все величины* $\Psi_q(m)$ *ограничены, при этом для значений* $m = d+1, d+2, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$|\Psi_q(m)| \leqslant 2\Bigg[\sum_{j=1}^{2^d}\Bigg(\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|\,dx\Bigg)^q\Bigg]^{1/q}. \tag{15}$$

Доказательство. Из (14) с учетом (8) и (9) получим

$$\begin{aligned}[\Psi_q(m)]^q &\leqslant \sum_{j=1}^{2^{m-1}}\Bigg[\int\limits_{l^-_{m,j}}|g(x)|\,dx + \int\limits_{l^+_{m,j}}|g(x)|\,dx + 2^{-m}\big|Q[\kappa_{m,2j-1}] - Q[\kappa_{m,2j}]\big|\Bigg]^q \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{2^{m-1}}\Bigg[\int\limits_{l_{m,j}}|g(x)|\,dx + \big|2^{-m}Q[\kappa_{m,2j-1} + \kappa_{m,2j}]\big|\Bigg]^q = \sum_{j=1}^{2^{m-1}}\Bigg[\int\limits_{l_{m,j}}|g(x)|\,dx + 2^{-m+1}Q[\kappa_{m-1,j}]\Bigg]^q.\end{aligned} \tag{16}$$

Имеют место неравенства

$$\int\limits_{l_{d+1,j}} g(x)\,dx \geqslant 0, \tag{17}$$

так как в силу леммы 1 и положительности коэффициентов формулы (1) имеем

$$\int\limits_{l_{d+1,j}} g(x)\,dx = 2^{-d}\int\limits_0^1 g(x)\kappa_{d,j}(x)\,dx = 2^{-d}\sum_{i=1}^N C_i\kappa_{d,j}(x^{(i)}) \geqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,2^d.$$

Применяя лемму 3 и учитывая лемму 1, а также неравенство (17), при $m = d+1, d+2, \ldots$ получим

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left[\int\limits_{l_{m,j}} |g(x)|\,dx + 2^{-m+1}Q[\kappa_{m-1,j}]\right]^q \leqslant \sum_{j=1}^{2^d}\left[\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|\,dx + 2^{-d}Q[\kappa_{d,j}]\right]^q \leqslant \\ \leqslant \sum_{j=1}^{2^d}\left[\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|\,dx + \int\limits_{l_{d+1,j}} g(x)\,dx\right]^q \leqslant \sum_{j=1}^{2^d}\left[2\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|\,dx\right]^q.\end{gathered} \tag{18}$$

Из неравенств (16), (18) следует (15).

Ограниченность всех величин $\Psi_q(m)$ следует из неравенства

$$|\Psi_q(m)| \leqslant \max\left\{\Psi_q(1), \Psi_q(2), \ldots, \Psi_q(d), 2\left[\sum_{j=1}^{2^d}\Big(\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|\,dx\Big)^q\right]^{1/q}\right\}, \quad m = 1,2,\ldots.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $g \in L_1[0,1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы* (1), *точной на константах, имеет место равенство*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = \sup_{1\leqslant m<\infty} \Psi_q(m). \tag{19}$$

Если при выполнении вышеперечисленных условий формула (1) *обладает d-свойством, то*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = \sup_{d<m<\infty} \Psi_q(m). \tag{20}$$

Доказательство. Подставив (3) в (2), с учетом точности формулы (1) на константах приходим к следующему выражению для функционала ее погрешности:

$$\delta_N[f] = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_m^{(j)}\left[\sum_{i=1}^N C_i\chi_{m,j}(x^{(i)}) - \int\limits_0^1 g(x)\chi_{m,j}(x)\,dx\right]. \tag{21}$$

Принимая во внимание определение функций Хаара, равенство (21) запишем в виде

$$\delta_N[f] = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2}\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left\{c_m^{(j)}\left[-\int\limits_{l^-_{m,j}} g(x)\,dx + \int\limits_{l^+_{m,j}} g(x)\,dx + 2^{-(m-1)/2}Q[\chi_{m,j}]\right]\right\}. \tag{22}$$

В силу абсолютной сходимости ряда в правой части равенства (22) имеет место неравенство

$$|\delta_N[f]| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2}\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left\{\left|c_m^{(j)}\right|\left|-\int\limits_{l^-_{m,j}} g(x)\,dx + \int\limits_{l^+_{m,j}} g(x)\,dx + 2^{-(m-1)/2}Q[\chi_{m,j}]\right|\right\}. \tag{23}$$

Оценивая с помощью неравенства Гельдера сумму по j в правой части (23), получим неравенство

$$|\delta_N[f]| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\left\{2^{(m-1)/2}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_m^{(j)}|^p\right]^{1/p}\Psi_q(m)\right\}. \tag{24}$$

Учитывая равенства (4) и (5), из (24) получаем следующую оценку величины $|\delta_N[f]|$:

$$|\delta_N[f]| \leqslant \|f\|_{S_p} \sup_{1\leqslant m<\infty} \Psi_q(m). \tag{25}$$

Для того чтобы установить неулучшаемость этого неравенства, воспользуемся техникой доказательств, примененной в [7]. Зафиксируем значение $m = m_0 \in \mathbb{N}$ и рассмотрим функцию

$$f_{m_0}(x) = \sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} \Bigg\{ \Bigg| -\int\limits_{l^-_{m_0,j}} g(x)\,dx + \int\limits_{l^+_{m_0,j}} g(x)\,dx + 2^{-(m_0-1)/2} Q[\chi_{m_0,j}] \Bigg|^{q-1} \times$$
$$\times \operatorname{sgn}\Bigg[-\int\limits_{l^-_{m_0,j}} g(x)\,dx + \int\limits_{l^+_{m_0,j}} g(x)\,dx + 2^{-(m_0-1)/2} Q[\chi_{m_0,j}] \Bigg] \chi_{m_0,j}(x) \Bigg\}.$$

Очевидно, что коэффициенты Фурье–Хаара этой функции определяются равенствами

$$c^{(j)}_{m_0} = \Bigg| -\int\limits_{l^-_{m_0,j}} g(x)\,dx + \int\limits_{l^+_{m_0,j}} g(x)\,dx + 2^{-(m_0-1)/2} Q[\chi_{m_0,j}] \Bigg|^{q-1} \times$$
$$\times \operatorname{sgn}\Bigg[-\int\limits_{l^-_{m_0,j}} g(x)\,dx + \int\limits_{l^+_{m_0,j}} g(x)\,dx + 2^{-(m_0-1)/2} Q[\chi_{m_0,j}] \Bigg], \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{m_0-1},$$

$c^{(0)}_0 = 0,\ c^{(j)}_m = 0,\ m \in \mathbb{N} \setminus \{m_0\},\ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Следовательно, в силу (22) имеем

$$|\delta_N[f_{m_0}]| = 2^{(m_0-1)/2} \sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} \Bigg| -\int\limits_{l^-_{m_0,j}} g(x)\,dx + \int\limits_{l^+_{m_0,j}} g(x)\,dx + 2^{-(m_0-1)/2} Q[\chi_{m_0,j}] \Bigg|^q = \|f_{m_0}\|_{S_p} \Psi_q(m_0). \tag{26}$$

Поскольку рассматриваемую функцию $f_{m_0}(x)$ можно построить для любого значения $m_0 \in \mathbb{N}$, из (26) следует равенство (19). Конечность нормы вытекает из леммы 4.

Если квадратурная формула (1) обладает d-свойством, то в силу ее точности на полиномах Хаара степеней, не превосходящих d, в равенствах (21), (22) и неравенстве (24) нижний индекс в сумме по m будет равен $d+1$, и неравенство (25) перепишется в виде

$$|\delta_N[f]| \leqslant \|f\|_{S_p} \sup_{d<m<\infty} \Psi_q(m).$$

Тогда из существования для любого $m_0 > d$ функции $f_{m_0}(x)$, удовлетворяющей равенству (26), следует (20). Лемма доказана.

Пусть

$$G = \int\limits_0^1 g(x)\,dx. \tag{27}$$

Теорема 1. *Если $g \in L_1[0,1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы* (1), *точной на константах, имеет место нижняя оценка*

$$\|\delta_N\|_{S^*_p} \geqslant 2^{-1/p} G N^{-1/p}, \tag{28}$$

где константа G определяется согласно (27).

Доказательство. Выберем ε, удовлетворяющее условию

$$0 < \varepsilon < \min_{1\leqslant i\leqslant N} \left\{ \frac{C_i}{2} \right\}. \tag{29}$$

Существует такое число $m_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $m \geqslant m_0$ выполняются неравенства

$$\Bigg| \int\limits_{l_{m+1,j}} g(x)\,dx \Bigg| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}.$$

Пусть m_1 — минимальное из чисел m, удовлетворяющих следующему условию: каждый из отрезков $\overline{l_{m+1,1}}, \ldots, \overline{l_{m+1,2^m}}$ содержит не более одного узла формулы (1).

Если каждый из узлов формулы (1) отличен от точек $\frac{2j-1}{2^{m_1}}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m_1-1}$, то положим $m_2 = m_1$. В противном случае положим

$$m_2 = 1 + \max\{m : \text{ существует } x_r = \frac{2j_r - 1}{2^m},\ j_r \in \{1, 2, \ldots, 2^{m-1}\}\}.$$

Пусть $m' = \max\{m_0, m_2\}$. Тогда для всех значений $m \geqslant m'$ выполняются следующие три условия:

— для всех $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$ выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_{l^-_{m,j}} g(x)\,dx - \int\limits_{l^+_{m,j}} g(x)\,dx \right| \leqslant \varepsilon; \tag{30}$$

— каждый отрезок $\overline{l_{m+1,j}}$ содержит не более одного узла квадратурной формулы (1), $j = 1, 2, \ldots, 2^m$;

– узлы формулы (1) не являются точками вида $\frac{2j-1}{2^m}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$.

Из (14) с учетом (8) получим

$$\Psi_q(m') = \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m'-1}} \left| -\int\limits_{l^-_{m',j}} g(x)\,dx + \int\limits_{l^+_{m',j}} g(x)\,dx + 2^{-m'} \sum_{i=1}^{N} C_i \left(\kappa_{m',2j-1}(x^{(i)}) - \kappa_{m',2j}(x^{(i)}) \right) \right|^q \right\}^{1/q}. \tag{31}$$

По определению числа m' узлы квадратурной формулы (1) не являются точками вида

$$\left\{ \frac{2j-1}{2^{m'}} \right\} = \operatorname{supp}\{\kappa_{m',2j-1}\} \cap \operatorname{supp}\{\kappa_{m',2j}\}$$

и каждый отрезок $\overline{l_{m'+1,j}}$ содержит не более одного узла формулы. Тогда равенство (31) можно записать в следующем виде:

$$\Psi_q(m') = \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m'}} \left| \pm 2^{-m'} \sum_{i=1}^{N} C_i \kappa_{m',j}(x^{(i)}) - \left(\int\limits_{l^-_{m',j}} g(x)\,dx - \int\limits_{l^+_{m',j}} g(x)\,dx \right) \right|^q \right\}^{1/q}, \tag{32}$$

причем перед выражением $2^{-m'} \sum\limits_{i=1}^{N} C_i \kappa_{m',j}(x^{(i)})$ будет стоять знак ”+”, если $x^{(i)} \in l^-_{m',j}$, и знак ”−”, если $x^{(i)} \in l^+_{m',j}$.

Принимая во внимание (29) и (30), из (32) получим

$$\begin{gathered} \Psi_q(m') = \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m'}} \left| 2^{-m'} \sum_{i=1}^{N} C_i \kappa_{m',j}(x^{(i)}) - \left[\pm \left(\int\limits_{l^-_{m',j}} g(x)\,dx - \int\limits_{l^+_{m',j}} g(x)\,dx \right) \right] \right|^q \right\}^{1/q} \geqslant \\ \geqslant \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m'}} \left| 2^{-m'} \sum_{i=1}^{N} C_i \kappa_{m',j}(x^{(i)}) \right|^q \right\}^{1/q}. \end{gathered} \tag{33}$$

Обозначим через N_1 число узлов квадратурной формулы (1), лежащих на границах отрезков $\overline{l_{m'+1,j}} = \operatorname{supp}\{\kappa_{m',j}\}$ и отличных от 0 и 1, т.е. в точках $\{\frac{j}{2^{m'}}\}$ $(j = 1, \ldots, 2^{m'}-1)$. Для определенности будем считать, что это узлы $x^{(1)}, \ldots, x^{(N_1)}$ формулы. С учетом того, что каждый отрезок $\overline{l_{m'+1,j}}$ содержит не более одного узла формулы (1), из (33) получим неравенство

$$\Psi_q(m') \geqslant \left\{ \sum_{i=N_1+1}^{N} {C_i}^q + 2 \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{C_i}{2} \right)^q \right\}^{1/q}. \tag{34}$$

Из точности квадратурной формулы (1) на константах следует равенство

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_N = G, \tag{35}$$

где G определяется согласно (27). В силу положительности коэффициентов при узлах квадратурной формулы (1) из (35), в частности, вытекает, что $G > 0$.

Несложно показать, что при условии (35), т.е. $C_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, функция

$$\varphi(C_1, C_2, \dots, C_N) = 2\sum_{i=1}^{N_1}\left(\frac{C_i}{2}\right)^q + \sum_{i=N_1+1}^{N} {C_i}^q$$

достигает своего наименьшего значения, равного $G^q(N+N_1)^{1-q}$, когда

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{N_1} = 2G(N+N_1)^{-1}, \quad C_{N_1+1} = C_{N_1+2} = \ldots = C_N = G(N+N_1)^{-1}.$$

Тогда из (34) получим

$$\Psi_q(m') \geqslant G(N+N_1)^{-1/p} \geqslant 2^{-1/p}GN^{-1/p}.$$

В силу равенства (19) отсюда следует (28). Теорема доказана.

Введем следующее обозначение:

$$G_0 = \int\limits_0^1 |g(x)|\,dx. \tag{36}$$

Теорема 2. *Если $g \in L_\infty[0,1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы* (1), *обладающей d-свойством, имеет место оценка*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2\Big(2^{-d}\Big)^{1/p} {G_0}^{1/q} \|g\|^{1/p}_{L_\infty[0,1]}, \tag{37}$$

где константа G_0 определяется согласно (36).

Доказательство. Учитывая определение (6) нормы в пространстве $L_\infty[0,1]$ и равенство (36), имеем:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2^d}\Big(\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|\,dx\Big)^q &= \sum_{j=1}^{2^d}\left[\Big(\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|\,dx\Big)^{q-1}\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|\,dx\right] \leqslant \\ &\leqslant \Big(2^{-d}\|g\|_{L_\infty[0,1]}\Big)^{q-1}\sum_{j=1}^{2^d}\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|\,dx \leqslant \Big(2^{-d}\|g\|_{L_\infty[0,1]}\Big)^{q-1} G_0.\end{aligned} \tag{38}$$

Из равенства (20), неравенств (15), (38) следует оценка (37). Теорема доказана.

Теорема 3. *Если $g \in L_q[0,1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы* (1), *обладающей d-свойством, имеет место следующая оценка:*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2\Big(2^{-d}\Big)^{1/p}\|g\|_{L_q[0,1]}. \tag{39}$$

Доказательство. Применяя интегральное неравенство Гельдера, приходим к неравенствам

$$\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|\,dx \leqslant \Big(2^{-d}\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|^q\,dx\Big)^{1/q}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^d. \tag{40}$$

Из (15), (40) следует, что

$$|\Psi_q(m)| \leqslant 2\left[\sum_{j=1}^{2^d}\Big(2^{-d}\Big)^{q/p}\int\limits_{l_{d+1,j}} |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q} = 2\Big(2^{-d}\Big)^{1/p}\left[\int\limits_0^1 |g(x)|^q\,dx\right]^{1/q} = 2\Big(2^{-d}\Big)^{1/p}\|g\|_{L_q[0,1]}.$$

Отсюда с учетом равенства (20) получаем оценку (39). Теорема доказана.

4. Заключение. В [7] для в случая $g(x) \geqslant 0$ построена формула с положительными коэффициентами при узлах, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^{N} C_i = \int\limits_0^1 g(x)\,dx = G,$$

для нормы функционала погрешности которой выполняются неравенства

$$GN^{-1/p} \leqslant \|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2GN^{-1/p}.$$

Следовательно, для такой формулы имеем $\|\delta_N\|_{S_p^*} \asymp N^{-1/p}$, $N \to \infty$.

Как в случае $g \in L_\infty[0,1]$, так и в случае $g \in L_q[0,1]$, в силу теорем 1–3 при $N \asymp 2^d$, $d \to \infty$, для формул, рассмотренных в настоящей статье, порядок величины $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ так же в точности равен $N^{-1/p}$, $N \to \infty$.

Условию $N \asymp 2^d$, $d \to \infty$, удовлетворяют построенные в [2] минимальные весовые квадратурные формулы, обладающие d-свойством. В то же время указанные квадратурные формулы, будучи минимальными формулами приближенного интегрирования, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.
2. *Кириллов К.А., Носков М.В.* Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2002. **42**, № 6. 791–799.
3. *Noskov M.V., Kirillov K.A.* Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials // J. of Approximation Theory. 2010. **162**, N 3. 615–627.
4. *Кириллов К.А.* Об оценках погрешности квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**, № 2. 94–101.
5. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. **69**. 331–371.
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
7. *Соболь И.М.* О весовых квадратурных формулах // Сиб. матем. журн. 1978. **19**, № 5. 1196–1200.

Поступила в редакцию
28.03.2012