УДК 517.958

КЛАССИЧЕСКОЕ И ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Н. Л. Гольдман[1]

Рассматриваются два подхода к постановке обратной задачи об определении неизвестного граничного режима для двухфазной квазилинейной проблемы Стефана с данными Коши на другой границе области. В соответствии с этими подходами вводятся понятия точного решения в классах Гельдера и обобщенного точного решения. Исследуются вопросы корректности постановки и единственности решения.

Ключевые слова: задача Стефана, двухфазные квазилинейные задачи, численный анализ, численные методы, обратные задачи, краевые задачи, параболические уравнения, области со свободными границами, фронт фазового перехода.

Введение. Обратные задачи Стефана представляют собой обратные задачи для параболических уравнений в областях со свободными границами. Они возникают при моделировании и управлении процессами с фазовыми переходами в теплофизике и механике сплошной среды и состоят в определении по некоторой дополнительной информации коэффициентов уравнения, граничных или каких-либо других функций, считающихся заданными в прямой постановке задачи Стефана. Этот класс обратных задач в отличие от обратных задач в областях с заданными границами еще недостаточно изучен, особенно для квазилинейных уравнений и при неизвестной зависимости от времени фронта фазового перехода.

Настоящая работа продолжает исследование обратных задач Стефана, выполненное ранее в [1–4]. Рассматриваются классическая и обобщенная постановки граничной обратной задачи Стефана, связанной с определением неизвестного граничного режима для двухфазной квазилинейной проблемы Стефана по заданной дополнительной информации на другой границе области.

Один из распространенных вариантов прямой постановки такой двухфазной задачи Стефана состоит в определении функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q} = \overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2$ и фазового фронта $\xi(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих условиям

$$c^k(u)u_t - \big(a^k(u)u_x\big)_x = f^k(x,t), \quad k = 1,2, \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q_1 = \big\{0 < x < \xi(t), 0 < t \leqslant T\big\},$$

$$(x,t) \in Q_2 = \big\{\xi(t) < x < l, 0 < t \leqslant T\big\},$$

$$u|_{x=0} = v(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{2}$$

$$a^k(u)u_x|_{x=l} = p(t), \quad 0 < t \leqslant T, \quad k = 2, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

$$u|_{x=\xi(t)} = u^*, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{5}$$

$$\gamma\xi_t = \big[a(u)u_x\big]_{x=\xi(t)}, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{6}$$

$$\xi|_{t=0} = l_0, \quad 0 < l_0 < l, \tag{7}$$

где $a^k(u) \geqslant a^k_{\min} > 0$, $c^k(u) \geqslant c^k_{\min} > 0$, f^k, v, p, φ — известные функции своих аргументов, u^*, $\gamma > 0$, $a^k_{\min}$, $c^k_{\min}$, $l_0 > 0$ — известные постоянные, $\big[a(u)u_x\big]_{x=\xi(t)} = a^2(u)u_x|_{x=\xi(t)+0} - a^1(u)u_x|_{x=\xi(t)-0}$ и где для определенности $Q_1 = \big\{(x,t) \in Q, u(x,t) > u^*\big\}$, $Q_2 = \big\{(x,t) \in Q, u(x,t) < u^*\big\}$.

Допустим, граничный режим при $x = 0$ неизвестен (т.е. неизвестна функция $v(t)$ в (2)), но на другой границе области $x = l$ кроме условия (3) задана еще дополнительная информация о решении прямой задачи Стефана (1)–(7):

$$u|_{x=l} = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

где $g(t)$ — известная при $0 \leqslant t \leqslant T$ функция. Тогда возникает

Граничная обратная задача Стефана: найти функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q} = \overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2$, $\xi(t)$ и $v(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющие условиям (1)–(7) и (8), в которых входные данные $a^k > 0$, $c^k > 0$, f^k, p, u^*, $\gamma > 0$, φ, g и $l_0 > 0$ предполагаются заданными.

Условия (3), (8) можно рассматривать как данные Коши на границе $x = l$, но в отличие от обычной нехарактеристической задачи Коши для параболического уравнения здесь существенное осложнение вносит наличие неизвестного фронта фазового перехода, движущегося со временем внутри области Q. Другая трудность связана с тем, что граничная обратная задача Стефана относится к некорректно поставленным задачам: при несогласованном задании входных данных точное решение отсутствует, в случае существования оно не обладает свойством устойчивости (см. примеры в [1, 2]).

1. Граничная обратная задача Стефана в классах Гельдера. Исследование обратной задачи Стефана (1)–(8), проведенное ранее в [1, 2], основано на представлении ее в виде операторного уравнения

$$Sv = g, \quad v \in V \subset L_2[0,T], \quad g \in G \subset L_2[0,T],$$

где $S : V \to G$ — нелинейный оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $v \in V$ след решения $u|_{x=l}$ прямой задачи Стефана (1)–(7). Точным решением этого уравнения является такой элемент $v^0 \in V$, для которого $u|_{x=l}$ совпадает с заданным элементом $g \in G$. Возможность определения оператора S для любой функции $v \in V$ обеспечивается выполнением входными данными условий однозначной разрешимости в соответствующих классах Гельдера прямой квазилинейной проблемы Стефана. Исходя из этого, в дальнейшем будем предполагать выполненными следующие требования к входным данным обратной задачи (1)–(8) (мы используем стандартные обозначения классов функций из [5]).

1. При $(x,t) \in \overline{Q}_k$, $|u| < \infty$, функции a^k, c^k, f^k равномерно ограничены, $a^k \geqslant a^k_{\min} > 0$, $c^k \geqslant c^k_{\min} > 0$, $k = 1, 2$.
2. При $(x,t) \in \overline{Q}_k$, $|u| \leqslant M^k_0$ ($M^k_0 \geqslant \max_{(x,t)\in\overline{Q}_k} |u|$) производные a^k_u, a^k_{uu}, c^k_u равномерно ограничены, f^k принадлежит $H^{1,\lambda/2}(\overline{Q}_k)$, $0 < \lambda < 1$, $k = 1, 2$.
3. Функция
$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi^1(x) > u^*, & 0 \leqslant x < l_0, \\ u^*, & x = l_0, \\ \varphi^2(x) < u^*, & l_0 < x \leqslant l, \end{cases}$$
где $\varphi^k(x) \in H^{2+\lambda}$, $p(t)$ и $g(t)$ принадлежат соответственно $O^1[0,T]$ и $C[0,T] \cap H^{1+\lambda/2}(0,T]$, $g(t) < u^*$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $g|_{t=0} = \varphi|_{x=l}$.
4. Входные данные обеспечивают невырожденность фазовых областей Q_k, т.е. фронт $\xi(t)$ не пересекает внешних границ $x = 0$, $x = l$ при $0 \leqslant t \leqslant T$: $0 < \beta_0 < \xi(t) < l - \beta_1$, β_0, $\beta_1 = \mathrm{const} > 0$.

Эти требования обеспечивают существование и единственность решения в классах Гельдера $u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_k)$, $\xi(t) \in H^{(3+\lambda)/2}(0,T]$ прямой квазилинейной проблемы Стефана (1)–(7) при любой граничной функции $v(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T]$, такой, что $v|_{t=0} = \varphi|_{x=0}$, $v(t) > u^*$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ [1–3].

В соответствии с изложенным подходом сформулируем следующее

Определение 1. Точным решением граничной обратной задачи Стефана (1)–(8) в классах Гельдера назовем функции $\{u^0(x,t), \xi^0(t), v^0(t)\}$:

$$u^0(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q_k), \quad k = 1,2,$$
$$u^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_k) \quad \text{кроме } x = 0,\ x = l_0,\ x = l,\ t = 0,$$
$$\xi^0(t) \in C[0,T] \cap H^{(3+\lambda)/2}(0,T], \quad v^0(t) \in H^{1+\lambda/2}[0,T],$$

удовлетворяющие соотношениям (1)–(8) в обычном смысле.

При выполнении требований 1–4 точное решение граничной обратной задачи Стефана $\{u^0(x,t), \xi^0(t), v^0(t)\}$ в случае его существования принадлежит классам Гельдера, указанным в определении 1. Единственность точного решения в этих классах доказывает следующая теорема в предположении, что фазовые фронты, соответствующие разным граничным режимам, могут иметь лишь конечное число точек пересечения на интервале времени $[0,T]$, на котором существует решение.

Теорема 1. *При выполнении входными данными обратной задачи Стефана* (1) – (8) *требований* 1 – 4 *ее точное решение в смысле определения* 1 $\left\{u^0(x,t), \xi^0(t), v^0(t)\right\}$ *определяется однозначно.*

Доказательство. Допустим, что $\{u_1^0, \xi_1^0, v_1^0\}$ и $\{u_2^0, \xi_2^0, v_2^0\}$ — два решения обратной задачи Стефана. Так как функции $\{u_1^0, \xi_1^0\}$ и $\{u_2^0, \xi_2^0\}$ можно рассматривать как решения прямой двухфазной проблемы Стефана (1) – (7), удовлетворяющие при $x = 0$ граничным условиям первого рода: $u_1^0|_{x=0} = v_1^0$, $u_2^0|_{x=0} = v_2^0$, то для них справедливы оценки в соответствующих классах Гельдера $H^{2+\lambda, 1+\lambda/2}(Q_k)$ и $H^{(3+\lambda)/2}(0,T]$ (см. [1, 2]).

Предположим сначала, что $\xi_1^0(t) \neq \xi_2^0(t)$ и пусть для определенности $\xi_1^0(t) < \xi_2^0(t)$ при любом t, таком, что $0 < t \leqslant T$.

В области $\left\{\xi_2^0(t) \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\right\}$ для разности $\Delta u = u_2^0 - u_1^0$ справедливы соотношения

$$c^k(x,t,u_1^0)\Delta u_t - \left(a^k(x,t,u_1^0)\Delta u_x\right)_x + \mathcal{A}_1 \Delta u_x + \mathcal{A}_2 \Delta u = 0, \tag{9}$$

$$\xi_2^0(t) < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \quad k = 2,$$

$$\Delta u|_{x=l} = 0, \quad a^k(x,t,u_1^0)\Delta u_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{10}$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad l_0 \leqslant x \leqslant l, \tag{11}$$

в которых коэффициенты $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ зависят от производных u_{2x}^0, u_{2xx}^0, u_{2t}^0 и от значений функций a_u^k, a_{uu}^k, c_u^k в точке $\left(x, t, \sigma u_1^0 + (1-\sigma)u_2^0\right)$, $0 < \sigma < 1$, $k = 2$. В силу справедливости оценок в классах Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}_k)$ для u_1^0 и u_2^0 коэффициенты в уравнении (9) и в условии (10) равномерно ограничены в $\overline{Q}_k$ как функции (x,t), причем a^k, c^k и $\mathcal{A}_1$ — вместе со своими производными по x. Производные по t коэффициентов a^k и c^k также равномерно ограничены в $\overline{Q}_k$.

Введем вспомогательную функцию

$$z(x,t) = \Delta u(x,t)\exp(-\mathcal{K}t), \quad \mathcal{K} = \mathrm{const} > 0, \quad \mathcal{K} \geqslant \max_{(x,t)\in Q_k} |\mathcal{A}_2| \left(c_{\min}^k\right)^{-1}, \quad k = 2.$$

Для нее в силу (9) – (11) имеют место соотношения

$$c^k z_t - (a^k z_x)_x + \mathcal{A}_1 z_x + (\mathcal{A}_2 + c^k \mathcal{K}) z = 0,$$

$$\xi_2^0(t) < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \quad k = 2,$$

$$z|_{x=l} = 0, \quad z_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T,$$

т.е. $z(x,t)$ — решение нехарактеристической задачи Коши для линейного параболического уравнения, все коэффициенты которого удовлетворяют условиям единственности такого решения [6]. Следовательно, $z(x,t) \equiv 0$ при $\xi_2^0(t) \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T$. Но тогда и $\Delta u(x,t) \equiv 0$ в этой области. В частности,

$$\Delta u|_{x=\xi_2^0(t)} = 0, \quad \Delta u_x|_{x=\xi_2^0(t)} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Но это означает, что кривая $x = \xi_2^0(t)$ является фазовым фронтом не только для прямой задачи Стефана (1) – (7) с граничной функцией $v = v_2^0$ при $x = 0$, но и для задачи Стефана (1) – (7) с граничной функцией $v = v_1^0$ при $x = 0$. Действительно, при $x = \xi_2^0(t)$ выполнены соотношения

$$u_1^0|_{x=\xi_2^0(t)} = u_2^0|_{x=\xi_2^0(t)} = u^*, \quad u_{1x}^0|_{x=\xi_2^0(t)} = u_{2x}^0|_{x=\xi_2^0(t)},$$

производная $u_{2x}^0|_{x=\xi_2^0(t)}$ удовлетворяет условию Стефана (6) при $x = \xi_2^0(t)$. В силу однозначной разрешимости прямой задачи Стефана (1) – (7) при выполнении требований 1 – 4 [2] отсюда следует, что $\xi_2^0(t) \equiv \xi_1^0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассматривая затем уравнение (9) для $\Delta u(x,t)$ в области $\left\{0 < x < \xi_1^0(t),\ 0 < t \leqslant T\right\}$ и учитывая, что при $x = \xi_1^0(t)$ заданы нулевые данные Коши, повторим предыдущие рассуждения уже для этой области. Это позволяет установить в силу единственности решения нехарактеристической задачи Коши для линейных параболических уравнений, что $\Delta u \equiv 0$ и в этой области тоже. Отсюда уже следует, что $\Delta u|_{x=0} = 0$, т.е. $v_2^0 \equiv v_1^0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Таким образом, доказана единственность точного решения

$\{u^0, \xi^0, v^0\}$ граничной обратной задачи Стефана (1) – (8) в предположении, что фронты фазового перехода не пересекаются.

Предположим теперь, что фронты $\xi_1^0(t)$ и $\xi_2^0(t)$ пересекаются в конечном числе точек t_j $(j = 0, 1, \ldots, J)$ на отрезке $[0, T]$, т.е. будем считать, что точки пересечения фазовых фронтов могут скапливаться лишь на бесконечности или, иными словами, последовательность точек пересечения фронтов не имеет предельных точек сгущения на конечном интервале $[0, T]$.

Это позволяет разбить весь отрезок времени $[0, T]$ на конечное число интервалов (t_{j-1}, t_j), $j = 1, \ldots, J$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_J \leqslant T$, на каждом из которых последовательно, начиная с интервала (t_0, t_1), можно провести рассуждения, аналогичные проведенным выше. Таким образом, рассматривая уравнение (9) для $\Delta u(x,t)$ в подобластях $\{0 < x < l,\ t_{j-1} < t \leqslant t_j\}$, устанавливаем, что $u_1^0(x,t) \equiv u_2^0(x,t)$, $\xi_1^0(t) \equiv \xi_2^0(t)$, $v_1^0(t) \equiv v_2^0(t)$ в этих подобластях. Исчерпав весь отрезок $[0, T]$ за конечное число шагов, завершаем доказательство теоремы 1.

Замечание 1. Класс задач Стефана, в которых фазовые фронты, соответствующие разным граничным режимам, пересекаются в конечном числе точек на отрезке $[0, T]$, весьма обширен. Он включает в себя, в частности, задачи Стефана, в которых фазовые фронты являются кусочно-аналитическими функциями [7]. Указанное ограничение на число точек пересечения фронтов является естественным для параболических уравнений, связанных с теплофизическими процессами (см., например, [8, 9] о сравнении решений двухфазной задачи Стефана при разных граничных режимах для уравнения теплопроводности как в линейном, так и нелинейном случаях).

Замечание 2. Теорема 1 остается справедливой и в том случае, когда дополнительная информация задана не при $x = l$, а в некоторой внутренней точке интервала $0 < x < l$. Ее доказательство аналогично проведенному выше, но, кроме теорем о единственности решения нехарактеристической задачи Коши и прямой квазилинейной задачи Стефана, оно еще опирается на однозначную разрешимость краевых задач для квазилинейных параболических уравнений.

Схема доказательства теоремы 1 допускает также рассмотрение двухфазной квазилинейной проблемы Стефана более общего вида, чем постановка (1) – (7) (см. [3]), при сохранении ограничения на число точек пересечения фазовых фронтов при разных граничных функциях. Однако приведенное выше доказательство единственности точного решения в классах Гельдера граничной обратной задачи Стефана может быть применено только для двухфазного случая и не допускает обобщения для нескольких фазовых фронтов.

2. Обобщенная постановка граничной обратной задачи Стефана. В [4] был предложен новый подход к исследованию обратной задачи (1) – (8), основанный на сведении ее к решению последовательности вспомогательных граничных обратных задач с гладкими коэффициентами без фазовых переходов. При таком подходе вводится понятие обобщенного точного решения граничной обратной задачи Стефана. Прежде чем дать его определение, уточним, что мы понимаем под обобщенным решением соответствующей прямой задачи Стефана. Следуя, например, [5], перейдем к рассмотрению задачи (1) – (7) в более простом виде, введя вместо $u(x,t)$ новую неизвестную функцию

$$\theta(x,t) = \int\limits_0^{u(x,t)} a(y)\,dy, \quad a(u) = \begin{cases} a^1(u), u \geqslant u^*, \\ a^2(u), u < u^*, \end{cases} \tag{12}$$

$$\rho^k(\theta)\theta_t - \theta_{xx} = f^k(x,t), \quad (x,t) \in Q_k, \quad k = 1, 2, \tag{13}$$

$$\theta|_{x=0} = \vartheta(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{14}$$

$$\theta_x|_{x=l} = p(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{15}$$

$$\theta|_{t=0} = \Phi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{16}$$

$$\theta|_{x=\xi(t)} = \theta^*, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{17}$$

$$\gamma\xi_t = [\theta_x]_{x=\xi(t)}, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{18}$$

$$\xi|_{t=0} = l_0, \quad 0 < l_0 < l, \tag{19}$$

где

$$\rho^k(\theta) = \frac{c^k(A^{-1}(\theta))}{a^k(A^{-1}(\theta))}, \quad \vartheta(t) = \int\limits_0^{v(t)} a^1(y)\,dy,$$

$$\Phi(x) = \int\limits_0^{\varphi(x)} a(y)\,dy, \quad \theta^* = \int\limits_0^{u^*} a^1(y)\,dy$$

и где A^{-1} означает обратное преобразование Кирхгофа, $\theta = A(u)$, $[A(u)](x,t)$ определено в (12). Дополнительное условие (8) на границе $x = l$ принимает вид

$$\theta|_{x=l} = w(t), \quad 0 < t \leqslant T, \quad w(t) = \int\limits_0^{g(t)} a^2(y)\,dy. \tag{20}$$

Дальнейшие рассуждения основаны на том, что прямая задача Стефана (13) – (19) сводится к краевой задаче для уравнения с разрывными коэффициентами (по аналогии с [5, 8 – 10])

$$U_t(\theta) - \theta_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T,$$

где $U = U(\theta)$ — монотонно возрастающая кусочно-гладкая функция, определяемая как

$$U = \int\limits_{\theta^*}^{\theta} \rho^k(y)\,dy - \gamma \quad \text{при} \ \ \theta < \theta^*, \quad k = 2,$$
$$U = \int\limits_{\theta^*}^{\theta} \rho^k(y)\,dy \quad \text{при} \ \ \theta > \theta^*, \quad k = 1.$$

Функция U терпит разрыв первого рода при $\theta = \theta^*$: $U \in [-\gamma, 0]$, а ее производная U_θ равна $\rho^k(\theta)$ при $(x,t) \in Q_k$, $k = 1,2$. Коэффициент $f(x,t)$ — кусочно-гладкая функция, имеющая разрыв первого рода в точках $(x,t) \in Q$, где $\theta = \theta^*$, и равная $f^k(x,t)$ при $(x,t) \in Q_k$, $k = 1,2$.

Ограниченная измеримая функция $\theta(x,t)$ из $W_2^{1,1}(Q)$ называется *обобщенным решением прямой задачи Стефана* для уравнения (13) с граничными условиями $\theta|_{x=0} = \vartheta(t)$, $\theta|_{x=l} = w(t)$ и с начальным условием $\theta|_{t=0} = \Phi(x)$, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l \bigl\{F(x,t,\theta)\psi_t + \theta\psi_{xx} + f\psi\bigr\}\,dx\,dt = \int\limits_0^T \psi_x|_{x=l} w(t)\,dt - \int\limits_0^T \psi_x|_{x=0}\vartheta(t)\,dt - \int\limits_0^l F(x,0,\Phi)\psi(x,0)\,dx, \tag{21}$$

при любой функции $\psi(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q})$, удовлетворяющей условиям $\psi|_{x=0} = 0$, $\psi|_{x=l} = 0$, $\psi|_{t=T} = 0$, и при какой-нибудь одной измеримой функции $F(x,t,\theta)$, равной $U(\theta)$ при $\theta \neq \theta^*$, $(x,t) \in \overline{Q}$, и принимающей значения из интервала $[-\gamma, 0]$ в любой точке $(x,t) \in Q$, где $\theta = \theta^*$.

Аналогичным образом определяется обобщенное решение прямой задачи Стефана для уравнения (13) с граничными условиями $\theta|_{x=0} = \vartheta(t)$, $\theta_x|_{x=l} = p(t)$ и с начальным условием $\theta|_{t=0} = \Phi(x)$ как ограниченная функция $\theta(x,t)$ из $W_2^{1,1}(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l \bigl\{F(x,t,\theta)\eta_t + \theta\eta_{xx} + f\eta\bigr\}\,dx\,dt = -\int\limits_0^T \eta|_{x=l} p(t)\,dt - \int\limits_0^T \eta_x|_{x=0}\vartheta(t)\,dt - \int\limits_0^l F(x,0,\Phi)\eta(x,0)\,dx, \tag{22}$$

при любой функции $\eta(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q})$, такой, что $\eta|_{x=0} = 0$, $\eta_x|_{x=l} = 0$, $\eta|_{t=T} = 0$, и при какой-нибудь одной функции $F(x,t,\theta)$ типа $U(\theta)$.

Исходя из этого, дадим следующее

Определение 2. Обобщенным точным решением граничной обратной задачи Стефана (13) – (19) с неизвестным граничным режимом при $x = 0$ и с дополнительной информацией (20) при $x = l$ назовем пару ограниченных функций $\bigl\{\theta^0(x,t), \vartheta^0(t)\bigr\} \in W_2^{1,1}(Q) \times W_2^1[0,T]$, удовлетворяющих одновременно интегральным тождествам (21), (22), в которых F, ψ, η — функции с указанными выше свойствами, $\vartheta = \vartheta^0$.

Замечание 3. Если $\bigl\{u^0(x,t), \xi^0(t), v^0(t)\bigr\}$ — точное решение граничной обратной задачи Стефана (1) –

(8) в классах Гельдера в смысле определения 1, то соответствующие функции

$$\theta^0(x,t) = \int\limits_0^{u^0(x,t)} a(y)\,dy, \quad \vartheta^0(t) = \int\limits_0^{v^0(t)} a^1(y)\,dy$$

являются и обобщенным точным решением в смысле определения 2.

3. Существование обобщенного точного решения. Исследование этого вопроса для обратной задачи Стефана связано с проблемой существования точного решения в классах Гельдера вспомогательных граничных обратных задач с гладкими коэффициентами: требуется найти функцию $\theta_m(x,t)$ в области $\overline{Q}$ и граничный режим $\vartheta_m(t)$ при $x=0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющие соотношениям

$$U_{m\theta}(\theta_m)\theta_{mt} - \theta_{mxx} = f_m(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{23}$$

$$\theta_m|_{x=0} = \vartheta_m(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{24}$$

$$\theta_m|_{x=l} = w(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{25}$$

$$\theta_m|_{t=0} = \Phi_m(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{26}$$

и дополнительному условию при $x = l$

$$\theta_{mx}|_{x=l} = p(t), \quad 0 < t \leqslant T. \tag{27}$$

Имеет место

Теорема 2. *Предположим, что*

1) *входные данные обратной задачи Стефана* (1) – (8) *удовлетворяют требованиям* 1 – 4*;*

2) $U_m(\theta)$*,* $f_m(x,t)$*,* $\Phi_m(x)$ *— гладкие аппроксимации функций* $U(\theta)$*,* $f(x,t)$*,* $\Phi(x)$*, такие, что* $U_m(\theta)$ *равномерно ограничена по* m *вместе со своими производными* $U_{m\theta} > 0$ *и* $U_{m\theta\theta}$ *при* $|\theta| \leqslant M_0$ $(M_0 \geqslant \max_{(x,t)\in\overline{Q}}|\theta|)$*,* $f_m(x,t) \in H^{1,\lambda/2}(\overline{Q})$*,* $\Phi_m(x) \in H^{2+\lambda}[0,l]$*,* $0<\lambda<1$*,* $\Phi_m|_{x=l} = w|_{t=0}$*, и пусть при* $m \to \infty$

$$U_m \to U\ (L_2[-M_0, M_0]), \quad f_m \to f\ (L_2(Q)), \quad \Phi_m \to \Phi\ (W_2^1[0,l])$$

равномерно по m*;*

3) *при каждом* m *существует точное решение* $\left\{\theta_m^0(x,t), \vartheta_m^0(t)\right\}$ *граничной обратной задачи* (23) – (27) *в классах Гельдера*

$$\theta_m^0(x,t) \in C(\overline{Q}) \cap H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q),$$
$$\theta_m^0(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}) \quad \textit{кроме} \quad x=0,\ x=l,\ t=0,$$
$$\vartheta_m^0(t) \in C[0,T] \cap H^{1+\lambda/2}(0,T],$$
$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\vartheta_m^0| \leqslant \vartheta_{\max}, \quad \|\vartheta_m^0\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant K,$$

где $\vartheta_{\max} > 0$*,* $K > 0$ *— постоянные, не зависящие от* m*.*

Тогда существует и обобщенное точное решение граничной обратной задачи Стефана $\{\theta^0(x,t), \vartheta^0(t)\}$ *в* $W_2^{1,1}(Q) \times W_2^1[0,T]$*, причем*

$$\|\vartheta^0\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant K, \quad \vartheta_{m_s}^0 \to \vartheta^0\ (H^{\lambda/2}[0,T]),\ 0<\lambda<1,$$

$$\vartheta_{m_s}^0 \to \vartheta^0 \ \textit{слабо в}\ W_2^1[0,T], \quad \theta_{m_s}^0 \to \theta^0\ \textit{слабо в}\ W_2^{1,1}(Q)$$

при $s \to \infty$ *по некоторой подпоследовательности* $\{m_s\} \in \{m\}$*.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из равномерной ограниченности $\{\vartheta_m^0\}$ в $W_2^1[0,T]$ в силу теорем вложения следует компактность $\{\vartheta_m^0\}$ в $H^{\lambda/2}[0,T]$ $(0<\lambda<1)$. Это позволяет выделить подпоследовательность $\{\vartheta_{m_s}^0\} \subseteq \{\vartheta_m^0\}$, которая при $s\to\infty$ сходится слабо в $W_2^1[0,T]$ и в норме $H^{\lambda/2}[0,T]$ $(0<\lambda<1)$ к некоторой функции $\vartheta(t)\} \in W_2^1[0,T]$, причем $\|\vartheta\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant K$ в силу слабой полунепрерывности снизу нормы в $W_2^1[0,T]$.

Далее, так как функция $\theta_m^0(x,t)$ — точное решение граничной обратной задачи (23) – (27), то ее можно рассматривать и как решение одновременно двух краевых задач с граничным условием $\theta_m^0|_{x=0} = \vartheta_m^0(t)$ и с соответствующими граничными условиями (25) или (27) при $x = l$. Следовательно, для $\theta_m^0(x,t)$ справедливы независящие от m оценки [5]

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}} |\theta_m^0| \leqslant M_0, \tag{28}$$

$$\|\theta_{mx}^0\|_{L_2(Q)} + \nu \|\theta_{mt}^0\|_{L_2(Q)} \leqslant M_1.$$

Постоянная $M_0 > 0$ в (28) определяется из принципа максимума. Вторая оценка — результат интегрирования уравнения (23) по области Q после умножения его на θ_{mt}^0, постоянные $\nu > 0$ и $M_1 > 0$ зависят, соответственно, от $a_{\max}^k$, $c_{\min}^k$ $(k = 1,2)$ и от $\|f\|_{L_2(Q)}$, $\|\varphi_x\|_{L_2[0,l]}$, $\|g_t\|_{L_2[0,T]}$, K.

Наличие таких оценок позволяет выделить из последовательности $\{\theta_m^0\}$ подпоследовательность $\{\theta_{m_s}^0\}$, которая при $s \to \infty$ сходится слабо в $W_2^{1,1}(Q)$ и почти всюду в Q к некоторой ограниченной функции $\theta(x,t) \in W_2^{1,1}(Q)$. Но для $\theta_{m_s}^0(x,t)$ (как для решения одновременно двух краевых задач с граничным режимом $\vartheta_{m_s}(t)$ при $x = 0$ и с граничными условиями (25) или (27) при $x = l$) справедливы тождества (21) и (22) при $F(x,t,\theta) = U_{m_s}(\theta_{m_s}^0(x,t))$, $\vartheta(t) = \vartheta_{m_s}^0(t)$, $\Phi = \Phi_{m_s}$. Переходя в этих тождествах к пределу при $s \to \infty$, убеждаемся в их справедливости и для $\theta(x,t)$ при $\vartheta = \lim\limits_{s\to\infty} \vartheta_{m_s}^0$, $\Phi = \lim\limits_{s\to\infty} \Phi_{m_s}$, $F(x,t,\theta) = \tilde{U}(x,t)$, где $\tilde{U}(x,t)$ — некоторая ограниченная функция из $L_2(Q)$, являющаяся слабым пределом в $L_2(Q)$ равномерно ограниченной по m подпоследовательности $\big\{U_{m_s}(\theta_{m_s}^0(x,t))\big\}$.

Следовательно, пара функций $\big\{\theta(x,t), \vartheta(t)\big\}$ является обобщенным точным решением граничной обратной задачи Стефана в смысле определения 2. Теорема 2 доказана.

Более того, при наших предположениях о входных данных имеет место

Лемма 1. *Обобщенное точное решение $\theta^0(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям при $x = 0$ и $x = l$ в обычном смысле.*

Доказательство. Действительно, в областях

$$Q' = \big\{(x,t) \in \overline{Q},\ \theta(x,t) > \theta^* + \sigma\big\}, \quad Q'' = \big\{(x,t) \in \overline{Q},\ \theta(x,t) < \theta^* - \sigma\big\}, \quad \sigma > 0, \tag{29}$$

в силу (28) имеют место равномерные по m оценки (см., например, [2, 5])

$$\Big\{|\theta_m^0|_{Q'}^{\lambda,\lambda/2},\ |\theta_m^0|_{Q''}^{\lambda,\lambda/2}\Big\} \leqslant M_2 \tag{30}$$

для функций $\theta_m^0(x,t)$ как для решений краевых задач (23)–(26). Постоянная $M_2 > 0$ зависит от M_0, $a_{\max}^k$, $|\varphi^k|^\lambda$ $(k = 1,2)$, $|g|^{\lambda/2}[0,T]$ и от K.

Кроме того, для $\theta_m^0(x,t)$ справедливы также и равномерные по m оценки [2, 5]

$$\Big\{\max_{(x,t)\in Q'} |\theta_{mx}^0|,\ \max_{(x,t)\in Q''} |\theta_{mx}^0|\Big\} \leqslant M_3, \quad |\theta_{mx}^0|_{Q''}^{\lambda,\lambda/2} \leqslant M_4,$$

где $M_3 > 0$ — постоянная, зависящая от M_0, $a_{\max}^k$, $c_{\max}^k$, $f_{\max}^k$, $\max|\varphi_x^k|$ $(k = 1,2)$, $g_{\max}$, $\vartheta_{\max}$, и $M_4 > 0$ — постоянная, зависящая от M_3, $a_{\max}^k$, $|\varphi_x^k|^\lambda$ $(k = 2)$ и от $\max_{0\leqslant t\leqslant T}|g_t|$.

Отсюда и из неравенства (30) следует, что из последовательности $\{\theta_m^0\}$ можно выделить некоторую подпоследовательность $\{\theta_{m_s}^0\}$, которая при $s \to \infty$ сходится к $\theta^0(x,t)$ равномерно в Q', Q'', причем в Q'' — вместе со своими производными по x. Но так как фазовый фронт не пересекает внешних границ области Q, то Q' и Q'' включают в себя приграничные области, где

$$\theta_{m_s}^0|_{x=l} = w(t), \quad (\theta_{m_s}^0)_x|_{x=l} = p(t),$$

$$\theta_{m_s}^0|_{x=0} = \vartheta_{m_s}^0(t), \quad 0 < t \leqslant T,$$

и где $\vartheta_{m_s}^0(t)$ сходится в норме $H^{\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$ к $\vartheta^0(t)$ при $s \to \infty$. Лемма 1 доказана.

Замечание 4. При наших предположениях о гладкости входных данных обобщенное точное решение $\theta^0(x,t)$ принадлежит классу Гельдера $H^{2+\lambda',1+\lambda'/2}$ с некоторым показателем $0 < \lambda' < 1$ в любых внутренних подобластях из Q' и Q''. Это утверждение основано на том, что $\theta^0(x,t)$ является также и обобщенным решением прямой задачи Стефана с граничным условием $\theta^0|_{x=0} = \vartheta^0(t)$, для которого это утверждение справедливо (см., например, [5, 8]).

4. О корректности обобщенной постановки обратной задачи Стефана. Особенностью некорректных задач является их неустойчивость относительно погрешностей входных данных. Однако если известно, что точное решение существует и принадлежит некоторому компактному множеству, то задача становится корректно поставленной. В силу теоремы 2 и оценок (30) леммы 1 справедливо

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 2 *вспомогательная обратная задача* (23) – (27) *при каждом* m *является корректно поставленной. Ее точное решение* $\{\theta^0_m(x,t), \vartheta^0_m(t)\}$ *принадлежит независимо от номера* m *компактным множествам в соответствующих классах Гельдера* $H^{\lambda',\lambda'/2}(\overline{Q}')$, $H^{\lambda',\lambda'/2}(\overline{Q}'')$ *и* $H^{\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda' < \lambda < 1)$, *где* Q' *и* Q'' *— области вида* (29).

Доказательство. Предположение 3 теоремы 2 означает, что при каждом m точное решение $\{\theta^0_m(x,t), \vartheta^0_m(t)\}$ граничной обратной задачи (23) – (27) существует в соответствующих классах Гельдера, причем $\|\vartheta^0_m\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant K$ равномерно относительно m. Но множество функций, ограниченных в $W_2^1[0,T]$, является в силу теорем вложения компактным в $H^{\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$.

Покажем, что не только $\vartheta^0_m(t)$, но и $\theta^0_m(x,t)$ принадлежит некоторому компактному множеству в классах Гельдера. Повторяя схему доказательства теоремы 2 и леммы 1 и рассматривая функцию $\theta^0_m(x,t)$ как решение краевой задачи (23) – (26) с граничным условием $\theta^0_m|_{x=0} = \vartheta^0_m(t)$, можно получить для нее равномерные по m оценки (30) в $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}')$, $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q}'')$. Из этих оценок и следует искомое утверждение при любом λ', $0 < \lambda' < \lambda < 1$.

Подробное исследование устойчивости граничных обратных задач типа (23) – (27) в различных классах Гельдера относительно погрешностей входных данных проведено в [1, 2].

В силу теоремы 2 и следствия 1 имеет место

Теорема 3. *Пусть входные данные обратной задачи Стефана и их аппроксимации удовлетворяют условиям теоремы* 2. *Тогда из корректности постановки при каждом* m *аппроксимирующих обратных задач* (23) – (27) *следует, что и обратная задача Стефана является корректно поставленной: ее точное решение* $\{\theta^0(x,t), \vartheta^0(t)\}$ *в смысле определения* 2 *существует и принадлежит тем же независящим от* m *компактным множествам, что и точные решения* $\{\theta^0_m(x,t), \vartheta^0_m(t)\}$ *вспомогательных обратных задач* (23) – (27).

Доказательство. Существование обобщенного точного решения $\{\theta^0(x,t), \vartheta^0(t)\}$ обратной задачи Стефана установлено в теореме 2. Из доказанного там же неравенства $\|\vartheta^0\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant K$ ($K > 0$ — постоянная, не зависящая от m) вытекает в силу теорем вложения принадлежность $\vartheta^0(t)$ компактному в $H^{\lambda/2}[0,T]$ $(0 < \lambda < 1)$ множеству, которое не зависит от m.

Заметим далее, что $\theta^0(x,t)$ является также и обобщенным решением прямой задачи Стефана с граничным условием $\theta^0|_{x=0} = \vartheta^0(t)$. Как известно (см., например, [8]), обобщенное решение прямой задачи Стефана есть классическое решение соответствующего параболического уравнения в любой внутренней подобласти областей Q' и Q'' вида (29). Более того, в силу леммы 1 $\theta^0(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям при $x = 0$ и $x = l$ в обычном смысле. Следовательно, в Q' и Q'', содержащих приграничные области, для $\theta^0(x,t)$ справедливы оценки, аналогичные оценкам (30):

$$\left\{|\theta^0|^{\lambda,\lambda/2}_{Q'},\ |\theta^0|^{\lambda,\lambda/2}_{Q''}\right\} \leqslant M_2,$$

где $M_2 > 0$ — постоянная, зависящая от M_0, $a^k_{\max}$, $|\varphi^k|^\lambda$ $(k = 1,2)$, $|g|^{\lambda/2}[0,T]$, K. Из этих оценок в силу теорем вложения и вытекает доказательство теоремы 3.

5. Единственность обобщенного точного решения. Имеет место

Теорема 4. *При выполнении входными данными требований* 1 – 4 *граничная обратная задача Стефана* (13) – (20) *не может иметь двух различных обобщенных точных решений в смысле определения* 2.

Доказательство. Допустим, что $\{\theta^0(x,t), \vartheta^0(t)\}$ и $\{\tilde\theta^0(x,t), \tilde\vartheta^0(t)\}$ — два таких решения, принадлежащих $W_2^{1,1}(Q) \times W_2^1[0,T]$, $\|\vartheta^0,\ \tilde\vartheta^0\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant K$, $K = \mathrm{const} > 0$.

Рассмотрим сначала $\{\theta^0(x,t), \vartheta^0(t)\}$ и заметим прежде всего, что функция $\theta^0(x,t)$ как точное решение обратной задачи Стефана является обобщенным решением одновременно двух прямых задач Стефана с граничным условием $\theta^0|_{x=0} = \vartheta^0(t)$ и с соответствующими граничными условиями (15) и (20) при $x = l$.

Как установлено в лемме 1 при наших предположениях гладкости, эти граничные условия выполняются в обычном смысле (см. также замечание 4).

Известно [5, 8, 9], что обобщенное решение прямой задачи Стефана единственно, т.е. однозначно определяется при заданных коэффициентах уравнения, граничных и начальных условиях. Оно может быть аппроксимировано с помощью решений краевых задач с гладкими входными данными, которые являются приближениями в соответствующих функциональных пространствах входных данных прямой задачи Стефана [5, 8, 9]. Причем в силу единственности обобщенного решения прямой задачи Стефана такое представление не связано с конкретным выбором аппроксимирующих краевых задач.

Применим эти рассуждения к функции $\theta^0(x,t)$. Для этого аппроксимируем граничный режим $\vartheta^0(t)$ при $x=0$ ($\vartheta^0 \in W_2^1[0,T]$, $\|\vartheta^0\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant K$) любыми функциями $\vartheta_m^0(t) \in C[0,T] \cap H^{1+\lambda/2}(0,T]$ $(0<\lambda<1)$, такими, что

$$\|\vartheta_m\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant K, \quad \vartheta_m(t) \to \vartheta^0(t)$$

при $m\to\infty$ слабо в $W_2^1[0,T]$ и в норме $H^{\lambda/2}[0,T]$ $(0<\lambda<1)$.

Обозначим через $\theta_m(x,t)$ решение краевой задачи для параболического уравнения (23) с начальным условием (26) и с граничными условиями

$$\theta_m|_{x=0} = \vartheta_m(t), \quad \theta_{mx}|_{x=l} = p(t), \quad 0<t\leqslant T,$$

в которой $U_m(\theta)$, $f_m(x,t)$ и $\Phi_m(x)$ — гладкие аппроксимации функций $U(\theta)$, $f(x,t)$, $\Phi(x)$, удовлетворяющие требованиям 2 теоремы 2. В качестве таких аппроксимаций возьмем U_m, f_m, Φ_m, совпадающие с U, f, Φ при $(x,t)\in Q'$ и $(x,t)\in Q''$ (см. (29)) и "сглаживающие" разрывы этих функций при $(x,t)\in Q$: $\theta^*-\sigma \leqslant \theta(x,t) \leqslant \theta^*+\sigma$, $\sigma>0$.

Повторяя доказательство теоремы 2, устанавливаем, что из последовательности $\{\theta_m\}$ можно выделить некоторую подпоследовательность $\{\theta_{m_s}\}$, сходящуюся к $\theta^0(x,t)$ слабо в $W_2^{1,1}(Q)$ при $s\to\infty$. Более того, эта сходимость является равномерной в областях Q' и Q'' вида (29). В частности, $\theta_{m_s}|_{x=l} \to \theta^0|_{x=l}$ при $s\to\infty$ равномерно при $0\leqslant t\leqslant T$. Так как $\theta_{m_s}(x,t)$ как решение краевой задачи для параболического уравнения с гладкими входными данными принадлежит $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}'')$ [5], то $\theta_{m_s}|_{x=l}$ как след такого решения на границе $x=l$ является функцией из $C[0,T]\cap H^{1+\lambda/2}(0,T]$. Но $\theta^0|_{x=l}=w(t)$, $0<t\leqslant T$ (см. (20) и лемму 1), причем функция $w(t)$ обладает в силу условий теоремы теми же свойствами гладкости, что и след $\theta_{m_s}|_{x=l}$. Следовательно, среди рассматриваемых гладких приближений граничного режима $\vartheta^0(t)$ при $x=0$ есть и такое приближение, для которого след решения $\theta_{m_s}|_{x=l}$ совпадает с $w(t)$ (см. далее замечание 5 к этой теореме). Но это означает, что такая аппроксимирующая граничная функция, которую мы обозначим $\vartheta_m^0(t)$, и соответствующее ей решение $\theta_m^0(x,t)$ являются точным решением в классах Гельдера граничной обратной задачи (23) – (27).

Аналогичные выводы справедливы и для $\theta_m(x,t)$ — решения краевой задачи для параболического уравнения (23) с начальным условием (26) и с граничными условиями

$$\theta_m|_{x=0} = \vartheta_m(t), \quad \theta_m|_{x=l} = w(t), \quad 0<t\leqslant T,$$

в силу равномерной сходимости $\{\theta_{m_s}(x,t)\} \subseteq \{\theta_m(x,t)\}$ к $\theta^0(x,t)$ в области Q'' вместе со своими производными при $s\to\infty$

$$(\theta_{m_s})_x|_{x=l} \to \theta_x^0|_{x=l}, \quad \theta_x^0|_{x=l} = p(t), \quad 0<t\leqslant T.$$

Тем самым доказана следующая

Лемма 2. *Если существует обобщенное точное решение граничной обратной задачи Стефана $\{\theta^0(x,t), \vartheta^0(t)\}$ в смысле определения 2, $\|\vartheta^0\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant K$, то при каждом m существует и точное решение в классах Гельдера $\{\theta_m^0(x,t), \vartheta_m^0(t)\}$ граничной обратной задачи* (23) – (27) *с гладкими входными данными, аппроксимирующими соответствующим образом входные данные обратной задачи Стефана. При этом*

$$\|\vartheta_{m_s}^0\|_{W_2^1[0,T]} \leqslant K, \quad \vartheta_{m_s}^0 \to \vartheta^0 \ (H^{\lambda/2}[0,T]),\ 0<\lambda<1,$$

$$\vartheta_{m_s}^0 \to \vartheta^0 \text{ слабо в } W_2^1[0,T], \quad \theta_{m_s}^0 \to \theta^0 \text{ слабо в } W_2^{1,1}(Q)$$

при $s\to\infty$ по некоторой подпоследовательности $\{m_s\}\in\{m\}$.

Дальнейшее доказательство основано на противоречии между предположением, что $\{\theta^0(x,t),\vartheta^0(t)\}$ и $\{\tilde\theta^0(x,t),\tilde\vartheta^0(t)\}$ — два обобщенных точных решения обратной задачи Стефана, и единственностью θ^0 и $\tilde\theta^0$ как обобщенных решений прямой задачи Стефана с граничными режимами ϑ^0 и $\tilde\vartheta^0$ при $x=0$, в силу которой их определение не зависит от конкретного выбора аппроксимирующих функций для $U(\theta)$, $f(x,t)$, $\Phi(x)$ в вспомогательных краевых задачах с гладкими входными данными. Это позволяет, рассматривая доказательство леммы 2 уже применительно к $\tilde\vartheta^0(t)$ и $\tilde\theta^0(x,t)$, использовать те же самые аппроксимации $U_m(\theta)$, $f_m(x,t)$ и $\Phi_m(x)$, что и в предыдущих рассуждениях этой леммы для $\vartheta^0(t)$ и $\theta^0(x,t)$.

Таким образом, предположение о существовании двух обобщенных точных решений $\{\theta^0(x,t),\vartheta^0(t)\}$ и $\{\tilde\theta^0(x,t),\tilde\vartheta^0(t)\}$ приводит к существованию двух последовательностей $\{\theta^0_m(x,t),\vartheta^0_m(t)\}$ и $\{\tilde\theta^0_m(x,t),\tilde\vartheta^0_m(t)\}$, сходящихся к $\{\theta^0(x,t),\vartheta^0(t)\}$ и $\{\tilde\theta^0(x,t),\tilde\vartheta^0(t)\}$ и являющихся точными решениями в классах Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(Q)\times H^{1+\lambda/2}(0,T]$ обратных задач (23) – (27) с одними и теми же гладкими функциями U_m, f_m, Φ_m.

Тогда для разности $\Delta\theta_m=\tilde\theta^0_m-\theta^0_m$ в силу (23)–(27) справедливы соотношения

$$U_{m\theta}(\theta^0_m)\Delta\theta_{mt}-\Delta\theta_{mxx}+A_m\Delta\theta_m=0,\quad (x,t)\in Q, \tag{31}$$

$$\Delta\theta_m|_{x=0}=\tilde\vartheta^0_m-\vartheta^0_m,\quad 0<t\leqslant T, \tag{32}$$

$$\Delta\theta_m|_{x=l}=0,\quad \Delta\theta_{mx}|_{x=l}=0,\quad 0<t\leqslant T, \tag{33}$$

в которых коэффициент A_m зависит от $\tilde\theta^0_{mt}$ и от значения $U_{m\theta\theta}$ в точке $\sigma\theta^0_m+(1-\sigma)\tilde\theta^0_m$, $0<\sigma<1$. Заметим, что коэффициенты уравнения (31) равномерно ограничены в $\overline{Q}$ как функции (x,t), причем $U_{m\theta}$ вместе с производной $U_{m\theta\theta}$. Это следует из свойств аппроксимирующих функций U_m и из справедливости оценок в $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ для $\theta^0_m(x,t)$ и $\tilde\theta^0_m(x,t)$ как для решений краевых задач (23)–(26) с граничными режимами при $x=0$ ϑ^0_m и $\tilde\vartheta^0_m$ из класса $H^{1+\lambda/2}(0,T]$ [5].

Введем новую неизвестную функцию $z_m(x,t)=\Delta\theta_m(x,t)\exp(-\mathcal{K}_m t)$, где $\mathcal{K}_m=\text{const}>0$, $\mathcal{K}_m\geqslant\max\limits_{(x,t)\in Q}|A_m|\left(\min\limits_{|\theta_m|\leqslant M_0}|U_{m\theta}|\right)^{-1}$.

Для нее в силу (31) – (33) имеют место соотношения

$$U_{m\theta}z_{mt}-z_{mxx}+(A_m+\mathcal{K}_mU_{m\theta})z_m=0,\quad (x,t)\in Q,\quad z_m|_{x=l}=0,\quad z_{mx}|_{x=l}=0,\quad 0<t\leqslant T,$$

т.е. $z_m(x,t)$ — решение нехарактеристической задачи Коши для линейного параболического уравнения, для которого выполнены все условия единственности такого решения [6]. Следовательно, $z_m\equiv0$ в $\overline{Q}$, но тогда и $\Delta\theta_m\equiv0$ в $\overline{Q}$, в том числе при $x=0$. Это означает, что $\tilde\vartheta^0_m(t)\equiv\vartheta^0_m(t)$ при $0\leqslant t\leqslant T$. Отсюда, переходя к пределу по соответствующей подпоследовательности $\{m_s\}\in\{m\}$, заключаем, что $\tilde\vartheta^0(t)\equiv\vartheta^0(t)$ при $0\leqslant t\leqslant T$. Но тогда $\tilde\theta^0\equiv\theta^0$ как обобщенные решения в $W^{1,1}_2(Q)$ прямой задачи Стефана с граничными режимами $\tilde\vartheta^0$ и ϑ^0 при $x=0$ в силу единственности таких решений. Теорема 4 доказана.

Замечание 5. Если граничный режим $\vartheta^0(t)$ достаточно гладкий, то при том выборе аппроксимаций U_m, f_m, Φ_m, который сделан при доказательстве леммы 2, сам этот граничный режим и соответствующее ему решение $\theta_m(x,t)$ краевой задачи для уравнения (23) являются точным решением аппроксимирующей обратной задачи с гладкими входными данными. Действительно, в силу леммы 1 и замечания 4 $\theta_m(x,t)$ совпадает в областях Q' и Q'' (см. (29)) с $\theta^0(x,t)$, так как в этих областях $\theta^0(x,t)$ есть классическое решение того же параболического уравнения с теми же краевыми условиями. Но это означает, что

$$\theta_m|_{x=0}=\theta^0|_{x=0}=\vartheta^0(t),\quad 0<t\leqslant T,\quad \theta_m|_{x=l}=\theta^0|_{x=l}=w(t),\quad \theta_{mx}|_{x=l}=\theta^0_x|_{x=l}=p(t),\quad 0<t\leqslant T.$$

6. Единственность точного решения в смысле определения 1. Проведенное доказательство теоремы 1 об однозначном определении точного решения граничной обратной задачи Стефана (1) – (8) в классах Гельдера требует предположения о конечном числе точек пересечения фазовых фронтов, соответствующих разным граничным режимам. Покажем, что от такого ограничения можно избавиться, опираясь на замечание 3 и теорему 5 о единственности обобщенного точного решения.

Доказательство теоремы 1 без ограничения на фазовые фронты. Допустим, что $\{u^0_1,\xi^0_1,v^0_1\}$ и $\{u^0_2,\xi^0_2,v^0_2\}$ — два точных решения в смысле определения 1. В силу замечания 3 соответствующие им функции, которые обозначим $\{\theta_1^0, \vartheta_1^0\}$ и $\{\theta_2^0, \vartheta_2^0\}$, являются обобщенными точными решениями граничной обратной задачи Стефана в смысле определения 2. Из их единственности (теорема 5) и неравенства $a^k(u) \geqslant a^k_{\min} > 0$ заключаем, возвращаясь к исходным функциям, что $u_1^0(x,t) \equiv u_2^0(x,t)$ и $v_1^0(t) \equiv v_2^0(t)$.

Заметим далее, что $\{u_1^0, \xi_1^0\}$ и $\{u_2^0, \xi_2^0\}$ можно рассматривать как решения прямой квазилинейной проблемы Стефана (1) – (7), соответствующие граничным условиям $u_1^0|_{x=0} = v_1^0(t)$, $u_2^0|_{x=0} = v_2^0(t)$. Но так как $v_1^0(t) \equiv v_2^0(t)$, то из однозначной разрешимости в классах Гельдера прямой задачи Стефана [1 – 3] сразу вытекает, что и $\xi_1^0(t) \equiv \xi_2^0(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Доказательство теоремы 1 завершено.

Заключение. Предложенный в [4] и получивший дальнейшее развитие в настоящей работе подход к построению обобщенных точных решений обратных задач Стефана основан на связи между такими решениями и точными решениями в классах Гельдера аппроксимирующих обратных задач с гладкими коэффициентами без фазовых переходов. Это позволяет использовать для исследования обратных задач Стефана уже известные результаты для более изученного класса обратных задач для параболических уравнений в областях с заданными границами. В частности, при таком подходе удается установить единственность обобщенного точного решения, а также точного решения в классах Гельдера без указанного выше предположения о фазовых фронтах. Более того, утверждения теорем 2 – 4, а также проведенное последним доказательство теоремы 1 допускают обобщения для многофазной задачи Стефана с несколькими неизвестными фронтами $\xi_1(t), \ldots, \xi_K(t)$. Эти же результаты очевидным образом распространяются также на параболическое уравнение

$$c^k(u)u_t - \left(a^k(x,t,u)u_x\right)_x + b^k(x,t,u)u_x + d^k(x,t)u = f^k(x,t),$$

где $a^k(x,t,u) = \alpha^k a(x,t)$, $b^k(x,t,u) = \alpha^k b(x,t)$, $\alpha^k = \mathrm{const} > 0$, $k = 1, 2$. В этом случае $\theta(x,t) = \alpha(u)u(x,t)$, где $\alpha(u)$ — кусочно-постоянная функция ($\alpha(u) = \alpha^1$ при $u \geqslant u^*$ и $\alpha(u) = \alpha^2$ при $u < u^*$).

Случай входных данных более общего вида лишь более громоздок технически. При этом основные трудности связаны с переходом от прямой квазилинейной проблемы Стефана к краевой задаче с разрывными коэффициентами. Обоснование такого перехода см., например, в [11, 12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gol'dman N.L.* Inverse Stefan Problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
2. *Гольдман Н.Л.* Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
3. *Гольдман Н.Л.* Теория и методы решения обратных задач Стефана: Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. М., 2000.
4. *Гольдман Н.Л.* Граничная обратная задача Стефана. Новый подход к исследованию // Доклады РАН. 2001. **380**, № 6. 736–740.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
6. *Ландис Е.М.* Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // УМН. 1959. **14**, № 1. 21–85.
7. *Friedman A.* Analyticity of the free boundary for the Stefan problem // Arch. Rat. Mech. Anal. 1976. **61**. 97–125.
8. *Friedman A.* One-dimensional Stefan problem with nonmonotone free boundary // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. **133**. 89–114.
9. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986.
10. *Олейник О.А.* Об одном методе решения общей задачи Стефана // Доклады АН СССР. 1960. **135**, № 5. 1054–1057.
11. *Будак Б.М., Гапоненко Ю.Л.* О решении задачи Стефана для квазилинейного параболического уравнения с квазилинейными граничными условиями // Решения задач Стефана. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. 235–312.
12. *Niezgódka M., Pawlow I.* A generalized Stefan problem in several space variables // Appl. Math. Optim. 1983. **9**. 193–224.

Поступила в редакцию
03.04.2002