

УДК 519.6

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА СЕТОЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В УЗЛОВЫХ НЕЯВНЫХ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДВУМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ И ПОВЫШЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ АЛГОРИТМОВ

Н. В. Арделян¹, М. Н. Саблин¹

Работа посвящена анализу структурных свойств сеточных аналогов инвариантных дифференциальных операторов на неструктурированной треугольной сетке и совершенствованию на этой основе объектно-ориентированных алгоритмов численной реализации неявных сеточных задач двумерной газовой динамики с целью повышения вычислительной эффективности этих алгоритмов. Рассмотрение проводится для аксиально-симметричного случая в цилиндрической системе координат. Изучаются узловые задачи, когда сеточные функции определены, а сеточные уравнения записываются в узлах сетки.

Ключевые слова: разностные схемы, сеточные задачи, неструктурированные треугольные сетки, сеточные операторы, газовая динамика.

1. Введение. Во введении в общих терминах описывается проблематика работы и обосновывается актуальность ее выполнения.

Согласно принципам операторного подхода теории разностных схем [1], при численном решении начально-краевых задач математической физики сеточная задача сводится к решению системы сеточных операторно-разностных уравнений в конечномерных линейных пространствах сеточных функций. Теоретическое исследование методов решения таких сеточных задач и формулировка алгоритмов проводятся универсальными средствами теории операторов в конечномерных линейных пространствах, когда особенности реализации конкретной задачи, связанные с размерностью, используемой системой координат, топологией сетки, способом аппроксимации и учетом краевых условий, скрыты в определениях операторов [2–4]. Знания конкретных определений операторов при этом не требуется, а используется лишь информация об их свойствах общего функционального характера. Операторный подход теории разностных схем хорошо согласуется с принципами объектно-ориентированного обобщенного программирования [5], согласно которым операторные алгоритмы программируются в терминах объектов (сетка, сеточные функции и операторы) специализированных обобщенных классов (“операторных” классов), методы и свойства которых не зависят от особенностей сеточной задачи.

Система классов в языке программирования C++, структурно и иерархически описывающая программные объекты, используемые для объектно-ориентированного программирования решения неявных сеточных операторно-разностных нестационарных задач двумерной газовой динамики на неструктурированной треугольной сетке, описана в [6]. К высшему иерархическому уровню относятся “операторные” классы, предназначенные для работы с сеточными функциями (элементами конечномерных линейных пространств), операторами и операторными уравнениями. К низшему иерархическому уровню относятся “вспомогательные” классы, предназначенные для работы с конкретными формулами, определяющими сеточные операторы и процедуры их применения. В алгоритмах решения систем нелинейных сеточных операторных уравнений, получаемых при численном решении на шаге по времени сеточных операторных задач нестационарной газовой динамики, используются [4, 8, 9]:

1) сеточные аналоги инвариантных дифференциальных операторов первого порядка (*сеточные операторы “первого порядка”*) — дивергенция вектора и тензора ранга 2 (диадика), градиент вектора и скаляра, ротор вектора;

2) сеточные операторы, являющиеся их суперпозицией (*сеточные операторы “второго порядка”*).

На операции применения таких операторов приходится основная вычислительная нагрузка. Формулы применения сеточных операторов “первого порядка” обладают общими, универсальными в рамках

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992, Москва; Н. В. Арделян, вед. науч. сотр., e-mail: ardel@cs.msu.su; М. Н. Саблин, мл. науч. сотр., e-mail: msaml434@gmail.com

используемого набора сеточных операторов структурно-алгоритмическими свойствами [4, 8, 9], такими как

- значение сеточной функции в любом узле \mathbf{x} сетки, являющейся результатом применения сеточного оператора, вычисляется с использованием пронумерованной локальной сеточной структуры — окрестности узла \mathbf{x} сетки, включающей узлы и (или) треугольные ячейки сетки, смежные с узлом \mathbf{x} ;
- в формулах используются геометрические параметры сетки (нормали к сторонам треугольных ячеек, средние координаты и площади ячеек сетки и др.), отнесенные к элементам окрестности узла \mathbf{x} , вычисляемые заранее на всей сетке по однородным формулам.

Для эффективного программирования функций применения сеточных операторов (методов “операторных” классов) предназначены опирающиеся на эти свойства “вспомогательные” классы и шаблоны классов, создание и использование которых упрощает код и повышает его вычислительную эффективность [6]. Такие классы позволяют включать в код практически в явном виде формулы применения сеточных операторов “первого порядка”. В рамках этих возможностей применение сеточных операторов “второго порядка” реализуется путем последовательного применения сеточных операторов “первого порядка”, так как операторы “второго порядка” определяются относительно более сложными формулами на более сложной сеточной структуре, что затрудняет применение принципов объектно-ориентированного программирования.

При многократном применении сеточных операторов, что характерно для алгоритмов решения неявных сеточных задач, в ряде случаев наиболее вычислительно эффективным является предварительное вычисление матриц сеточных операторов с последующей работой с этими матрицами. Ввиду большого набора сеточных операторов, фигурирующих в сеточных задачах газовой динамики, актуальна структуризация определяющих формул с целью уменьшения количества “опорных” структур сеточных данных, необходимых для работы с матрицами сеточных операторов, а также обеспечения высокой эффективности вычислений по этим формулам.

Задачи газовой динамики (механики сплошной среды) формулируются через дифференциальные инварианты $\nabla p, \nabla \mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{v}, \nabla \mathbf{U}, \nabla \times \mathbf{v}, \nabla \nabla \cdot \mathbf{v}, \nabla \cdot \nabla p, \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}, \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$, где p — скаляр (тензор ранга 0), \mathbf{v} — вектор (тензор ранга 1), \mathbf{U} — диадик (тензор ранга 2). Эти инварианты определяются через произведение (внешнее либо внутреннее или векторное) формального вектора слева на тензор (под формальным вектором понимается набла-оператор Гамильтона ∇ [7, глава 16; 11, приложение III]).

В настоящей статье получены формулы, определяющие сеточные аналоги дифференциальных инвариантов на неструктурированной треугольной сетке через формальную сеточную операцию — сеточный аналог “относительного” набла-оператора Гамильтона. Здесь термин “относительный” означает, что при применении оператора не производится дифференцирование векторов локального базиса криволинейной системы координат.

При алгоритмизации вычисляется вектор-матрица (с элементами — векторами), соответствующая указанной формальной сеточной операции, все необходимые сеточные аналоги дифференциальных инвариантов вычисляются через эту матрицу. Тем самым выделяется и реализуется важное структурное свойство сеточных операторов, состоящее в их определении через одну опорную структуру сеточных данных. Это позволяет увеличить вычислительную эффективность программ с сохранением простоты реализации в рамках объектно-ориентированного подхода.

2. Особенности организации процесса решения сеточной операторной задачи. В данном разделе формулируется модельная операторная задача и операторный алгоритм ее решения, на примере которых далее рассмотрены вопросы повышения вычислительной эффективности операций применения сеточных операторов на основе анализа их структурных свойств. Этот модельный пример включает все основные особенности алгоритма, существенные с точки зрения реализации объектно-ориентированного подхода с опорой на специализированные классы алгоритмического языка C++.

Рассматриваемая здесь операторная часть алгоритма программируется с использованием лишь “операторных” классов — классов высшего иерархического уровня.

Используем следующую систему операторных уравнений, к которой сводится решение сеточной нестационарной газодинамической задачи в изоэнтропическом (или изотермическом) случае в лагранжевых переменных [4, 6]:

$$\begin{cases} F_1(\eta, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \eta - \tau A_{12} \mathbf{v} + f_1 = 0, & \eta, f_1 \in \mathcal{H}_1, \quad A_{12} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1); \\ F_2(\eta, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} 2\mathbf{v} + \tau(A_{21} \mathcal{P}(\eta) + A_\nu \mathbf{v} + A_\xi \mathbf{v}) + \mathbf{f}_2 = 0, & \mathbf{v}, \mathbf{f}_2 \in \mathcal{H}_2, \quad A_{21} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $A_\nu \stackrel{\text{def}}{=} -A_{21} \nu A_{12}$; $A_\xi \stackrel{\text{def}}{=} -A_{23} \xi A_{32}$; $A_{23} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_2)$; $A_{32} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3)$; $\tau > 0$ — поло-

жительный числовой параметр, шаг сетки по времени; \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_3 — конечномерные линейные пространства сеточных функций со скалярными произведениями $(\cdot)_1$, $(\cdot)_2$, $(\cdot)_3$ соответственно; η и \mathbf{v} — искомые величины, элементы пространств \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 (по физическому смыслу — это сеточные функции удельного объема и скорости соответственно); \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 — известные величины, элементы пространств \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 соответственно; $A_{12} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1)$ и $A_{21} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2)$ — линейные операторы, определяемые через сеточные аналоги дифференциальных операторов дивергенции вектора и градиента скаляра соответственно с учетом краевых условий (обладают свойством “взаимосопряженности”: $A_{21} = -A_{12}^*$); $A_{32} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3)$ и $A_{23} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_2)$ — линейные операторы, определяемые через сеточные аналоги дифференциальных операторов градиента вектора и дивергенции диадика соответственно с учетом краевых условий (обладают свойством “взаимосопряженности”: $A_{23} = -A_{32}^*$); $\mathcal{P} : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ — нелинейный оператор простейшей структуры, определяемый покомпонентно с помощью функции \mathcal{P} одной переменной: $\forall y = \{y_i, i = 1, \dots, N_2\} \in \mathcal{H}_2 : [\mathcal{P}(y)]_i = \mathcal{P}(y_i)$ (по физическому смыслу величина $\mathcal{P}(\eta)$ — сеточная функция давления, а функция \mathcal{P} задает уравнение состояния для давления); ν и ξ — известные переменные неотрицательные скалярные коэффициенты (в строгой операторной интерпретации в системе уравнений (1) — это линейные операторы $\nu \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2)$ и $\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3)$ простейшей структуры, определяемые через покомпонентное умножение следующим образом: $\forall y = \{y_i, i = 1, \dots, N_2\} \in \mathcal{H}_2 : (\nu y)_i = \nu_i y_i$, $\forall u = \{u_i, i = 1, \dots, N_3\} \in \mathcal{H}_3 : (\xi u)_i = \xi_i u_i$; по физическому смыслу эти переменные являются коэффициентами объемной и динамической вязкости соответственно); A_ν и $A_\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2)$ — линейные операторы, определяемые через суперпозицию указанных выше операторов (см. (1)) (обладают свойствами самосопряженности и неотрицательности: $A_\nu = A_\nu^* \geq 0$ и $A_\xi = A_\xi^* \geq 0$ — в силу “взаимосопряженности” операторов из суперпозиции; по физическому смыслу — это сеточные аналоги дифференциальных операторов объемной и динамической вязкости соответственно с учетом краевых условий).

Задача нелинейна в силу нелинейной зависимости $\mathcal{P}(\eta)$, итерационный метод ее решения [4] записывается в виде

$$F_1 \left(\begin{matrix} k+1 & k+1 \\ \eta & \mathbf{v} \end{matrix} \right) = 0, \quad E_\nu \mathbf{z}_\nu^k + \mathbf{F}_2 \left(\begin{matrix} k & k \\ \eta & \mathbf{v} \end{matrix} \right) = 0, \quad \mathbf{z}_\nu^k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad E_\nu \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2). \quad (2)$$

Здесь k — номер итерации, E_ν — линейный оператор “верхнего слоя”, являющийся параметром метода. На каждой итерации сначала находится поправка $\mathbf{z}_\nu^k = \mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k$ путем решения линейного операторного уравнения

$$E_\nu \mathbf{z}^k = \mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{F}_2 \left(\begin{matrix} k & k \\ \eta & \mathbf{v} \end{matrix} \right), \quad (3)$$

после чего вычисляется величина η^{k+1} из первого уравнения системы (2). Самосопряженный положительно-определенный оператор “верхнего слоя” E_ν определяется по формуле

$$E_\nu = I + \tau(A_{\tilde{\nu}} + A_\xi) = E_\nu^* > 0, \quad A_{\tilde{\nu}} \stackrel{\text{def}}{=} -A_{21} \tilde{\nu} A_{12}, \quad A_\xi \stackrel{\text{def}}{=} -A_{23} \xi A_{32}, \quad (4)$$

где I — тождественный оператор; $\tilde{\nu} = \nu - \tau \mathcal{P}_\eta > 0$ — положительный коэффициент; $\mathcal{P}_\eta < 0$ — производная оператора \mathcal{P} , отрицательный коэффициент. При таком выборе оператора E_ν итерационный метод (2) представляет собой вариант метода Ньютона решения задачи (1) [4].

Уравнение (3) приближенно решается подходящим итерационным методом вариационного типа, например методом сопряженных направлений [3]. На каждой n -й итерации этого метода в алгоритме метода вычисляется невязка $\mathbf{r}_n = E_\nu \mathbf{z}_n^k - \mathbf{F}$. Набор “операторных” классов в [6] позволяет запрограммировать это действие одной строкой кода, как и в формуле (4), через суперпозицию операторов A_{ij} с использованием следующей функции для их вычисления:

```
//...
rn = zkn - tau * (A12(nu * A21(zkn)) + A23(ksi * A32(zkn))) - F;
//...,
```

или эквивалентным способом, когда `zkn - tau * (A12(nu * A21(zkn)) + A23(ksi * A32(zkn)))` скрыто в промежуточной функции для вычисления E_ν :

```
//...
rn = Ev(zkn) - F;
//...
```

Для эффективной реализации сформулированного метода решения модельной задачи (1) необходима вычислительная оптимизация алгоритмов применения сеточных операторов, что особенно актуально на стадии решения сеточного операторного уравнения (3) (обращения оператора E_ν) итерационным методом, когда многократно применяется сложный сеточный оператор E_ν “второго порядка”.

3. Анализ структурных свойств сеточных операторов. В данном разделе проводится конкретизация модельной системы операторных уравнений (1) для случая узловой аппроксимации аксиально-симметричной задачи [8], приводятся формулы, определяющие сеточные операторы, анализируются их структурные свойства, на основе чего формулируются оптимальные алгоритмы применения сеточных операторов, удобные для объектно-ориентированной программной реализации.

3.1. Сетка и сеточные функции. В рассматриваемом случае исходная модельная газодинамическая задача, аппроксимируемая сеточной операторной задачей (1), решается в цилиндрической (ортогональной) системе координат $\{r, \varphi, z\}$ в ограниченной области G с кусочно-гладкой границей, лежащей в плоскости $\varphi = \text{const}$. Задача аксиально-симметрична, т.е. параметры задачи не зависят от переменной φ .

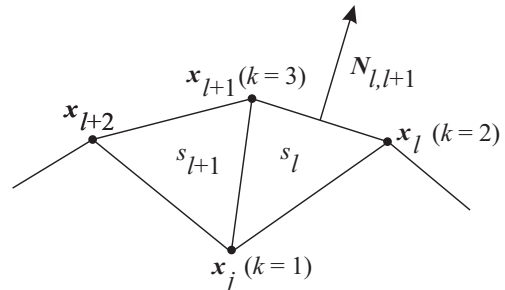
В области G задана треугольная сетка ω и система $\{\varphi_x\}$ кусочно-линейных финитных базисных функций на этой сетке [10]. Введены обозначения: $\omega_x = \{\mathbf{x}_j, j = 1, 2, \dots, N_x\}$ — множество узлов сетки ω ; $\omega_\Delta = \{\Delta_i, i = 1, 2, \dots, N_\Delta\}$ — множество ее ячеек; G_ω — сеточная область (объединение ячеек $\Delta \in \omega_\Delta$); ∂G_ω — граница сеточной области G_ω ; $\omega_\gamma = \{\mathbf{x}_q \in \partial G_\omega, q = 1, 2, \dots, N_\gamma\} \subset \omega_x$ — множество граничных узлов сетки ω_x ; s_l — площадь ячейки $\Delta_l \in \omega_\Delta$; $\mathbf{N}_{k,i}$ — правая нормаль к отрезку $[\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i]$; $\mathbf{L}_{k,i} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k$ — направленный вектор отрезка $[\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i]$.

Окрестностью Π_j любого узла $\mathbf{x}_j \in \omega_x(t)$ будем называть множество смежных с ним узлов и треугольных ячеек (см. рисунок). Используем обозначения: $G_j \stackrel{\text{def}}{=} \cup \Delta_l \in \Pi_j$, ∂G_j — граница области G_j .

Элементы (узлы и ячейки) в окрестности Π_j любого узла $\mathbf{x}_j \in \omega_x$ нумеруются (как правило, индексом l) в порядке его обхода против часовой стрелки, при этом вершинами ячейки $\Delta_l \in \Pi_j$ являются узлы $\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_{l+1}$.

Узлы $\mathbf{x}_l \in \Pi_j$, соединенные стороной треугольной ячейки с узлом $\mathbf{x}_j \in \omega_x$, будем называть соседями узла \mathbf{x}_j .

Кроме того, для любой треугольной ячейки $\Delta \in \omega_\Delta$ будем нумеровать (как правило, индексом k) в порядке ее обхода против часовой стрелки узлы — ее вершины (нумерация циклическая по модулю 3). При использовании этой локальной нумерации для ячейки $\Delta_l \in \Pi_j$ номер 1 имеет узел \mathbf{x}_j . Для кусочно-линейных базисных функций $\varphi_j \in \{\varphi_x\}, j = 1, 2, \dots, N_x$, ниже используются следующие формулы:



Окрестность узла \mathbf{x}_j

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{N}_{l,l+1} \cdot \mathbf{L}_{x,l}}{2s_l}, & \mathbf{x} \in \Delta_l \in \Pi_j, \quad \forall \mathbf{x} \in \Delta_l \in \Pi_j: \nabla \varphi_j(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{N}_{l,l+1}}{2s_l}; \\ 0, & \mathbf{x} \notin G_j; \end{cases} \quad (5)$$

$$\mathbf{L}_{x,l} = \mathbf{x}_l - \mathbf{x}, \quad s_l = \frac{1}{2} \mathbf{N}_{l,l+1} \cdot \mathbf{L}_{j,l}.$$

Определим линейные пространства $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ (см. задачу (1)) как пространства сеточных функций ранга 0 (скаляров), ранга 1 (векторов) и ранга 2 (диадиков) соответственно, определенных на сетке ω_x .

В пространствах $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ определим скалярные произведения сеточных функций в виде, допускающем использование двух эквивалентных способов его записи (в виде суммы по узлам сетки от произведения сеточных функций и в виде интеграла от кусочно-линейного восполнения этого произведения):

$$\forall a, b \in \mathcal{H}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (a, b)_\alpha = \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} V_j a_j * b_j = \int_G (a * b)_\pi r \, dr \, dz, \quad (6)$$

$$(a * b)_\pi \equiv \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} a_j * b_j \varphi_j, \quad V_j = \int_{G_j} \varphi_j r \, dr \, dz.$$

Здесь $(*) = (\circ), (\cdot), (\cdot\cdot)$ — соответственно знак произведения скаляров, скалярного произведения векторов и двойного скалярного произведения диадиков [7, с. 510] (в отличие от двойного свертывания, обозначаемого тем же символом в [11, с. 432]), равного сумме произведений физических компонент диадиков с одинаковыми индексами).

3.2. Определение сеточных операторов. Определим линейные сеточные операторы

$$(\nabla_x \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1), \quad (\nabla_x \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_2), \quad \nabla_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2), \quad \nabla_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3)$$

как сеточные аналоги операторов дивергенции вектора и диадика, градиента скаляра и вектора соответственно по следующим формулам для $\mathbf{x}_j \in \omega_x$, $p \in \mathcal{H}_1$, $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_2$, $\mathbf{U} \in \mathcal{H}_3$:

$$\begin{aligned} (\nabla_x \cdot \mathbf{v})_j &= \frac{1}{V_j} \int_{G_j} (\nabla \cdot \mathbf{v}_n) \varphi_j r dr dz, & (\nabla_x \cdot \mathbf{U})_j &= \frac{1}{V_j} \int_{G_j} (\nabla \cdot \mathbf{U}_n) \varphi_j r dr dz, \\ (\nabla_x p)_j &= \frac{1}{V_j} \int_{G_j} (\nabla p_n) \varphi_j r dr dz, & (\nabla_x \mathbf{v})_j &= \frac{1}{V_j} \int_{G_j} (\nabla \mathbf{v}_n) \varphi_j r dr dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Операторы (7) аппроксимируют локально свои дифференциальные аналоги с первым порядком точности [8, 9].

3.3. Свойства сеточных операторов — аналогия с набла-оператором. Укажем, что для гладких скаляра p , вектора \mathbf{v} и диадика \mathbf{U} используемые в работе дифференциальные инварианты ∇p , $\nabla \mathbf{v}$, $\nabla \cdot \mathbf{v}$ и $\nabla \cdot \mathbf{U}$ определяются в соответствии с [11, приложение III] через произведение (внешнее либо внутреннее) формального вектора слева на соответствующий тензор. Как указывалось выше, под формальным вектором понимается вектор набла-оператора Гамильтона:

$$\alpha = r, \varphi, z : \nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_\alpha \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \alpha},$$

где $g_{\alpha\alpha}$ — компоненты метрического тензора и \mathbf{u}_α ($\alpha = r, \varphi, z$) — ортонормированный базис (для рассматриваемой криволинейной ортогональной системы координат). В этом состоит отличие от определения ковариантной производной тензора [7], в котором фактически умножение на вектор набла-оператора производится справа.

В настоящей статье и в других работах по рассматриваемой тематике мы используем ортонормированный базис и физические компоненты тензоров, так как это удобно в ортогональных системах координат, когда ковариантные и контравариантные базисные векторы совпадают по направлению. Здесь и далее в формулах для тензорных величин по повторяющемуся индексу проводится суммирование.

Кроме того, для дальнейшего удобно ввести формальный вектор $\overline{\nabla}$ — относительный набла-оператор

$$\alpha = r, z : \overline{\nabla} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_\alpha \frac{\overline{\partial}}{\partial \alpha}, \quad (8)$$

где черта над символом дифференцирования ∂ означает, что при применении этого оператора к тензору дифференцируются только компоненты тензоров, базисные векторы формально считаются постоянными при дифференцировании. В формуле (8) учтены вид метрического тензора в цилиндрической системе координат и факт аксиальной симметрии (независимости компонент тензоров от угловой координаты φ) — считается, что φ -компонента формального вектора $\overline{\nabla}$ равна нулю.

Далее нами используется представление в цилиндрической системе координат в аксиально симметричном случае дифференциального инварианта $\nabla \mathbf{v}$ в виде суммы двух слагаемых, первое из которых соответствует дифференцированию компонент тензора (относительному дифференцированию), а второе — дифференцированию базисных векторов:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{u}_\alpha \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \alpha} (v_\beta \mathbf{u}_\beta) = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\beta + \frac{v_\beta}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{u}_\beta) = \overline{\nabla} \mathbf{v} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{v}, \quad \alpha, \beta = r, \varphi, z; \\ \overline{\nabla} \mathbf{v} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\beta, \quad \alpha = r, z; \quad \beta = r, \varphi, z; \quad \mathbf{\Gamma} \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_\varphi \left(\frac{v_r}{r} \mathbf{u}_\varphi - \frac{v_\varphi}{r} \mathbf{u}_r \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь через $\mathbf{\Gamma}$ обозначен оператор, соответствующий дифференцированию базисных векторов при определении инварианта $\nabla \mathbf{v}$. Аналогично можно представить и другие используемые нами дифференциальные инварианты, однако это не требуется в данной работе. Отметим, что в таком представлении дифференциального инварианта ∇p (здесь p — скаляр) отсутствует слагаемое, обусловленное дифференцированием базисных векторов: $\nabla p = \overline{\nabla} p$.

Представим сеточный оператор ∇_x из (7) в виде, аналогичном (9):

$$\begin{aligned} (\nabla_x \mathbf{v})_j &= \frac{1}{V_j} \int_{G_j} (\nabla \mathbf{v}_\perp) \varphi_j r \, dr \, dz = \frac{1}{V_j} \sum_{\Delta_l \in \Pi_j} \int_{\Delta_l} \sum_{\mathbf{x}_k \in \Delta_l} (\nabla(\mathbf{v}_k \varphi_k)) \varphi_j r \, dr \, dz = \\ &= \frac{1}{V_j} \left(\sum_{\Delta_l \in \Pi_j} \int_{\Delta_l} \sum_{\mathbf{x}_k \in \Delta_l} ((\nabla \varphi_k) \mathbf{v}_k) \varphi_j r \, dr \, dz + \int_{G_j} (v_{r\perp} \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi - v_{\varphi\perp} \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_r) \varphi_j \, dr \, dz \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{x}_j \in \omega_x$ и $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_2$.

По аналогии с формулой (9), представим сеточный оператор ∇_x в виде суммы операторов $\bar{\nabla}_x$ и $\Gamma_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3)$ в соответствии с формулой (10):

$$(\bar{\nabla}_x \mathbf{v})_j = \frac{1}{V_j} \sum_{\Delta_l \in \Pi_j} \int_{\Delta_l} \sum_{\mathbf{x}_k \in \Delta_l} ((\nabla \varphi_k) \mathbf{v}_k) \varphi_j r \, dr \, dz, \quad (\Gamma_x \mathbf{v})_j = \frac{1}{V_j} \int_{G_j} (v_{r\perp} \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi - v_{\varphi\perp} \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_r) \varphi_j \, dr \, dz, \quad (11)$$

где $\nabla_x = \bar{\nabla}_x + \Gamma_x$.

Из (11) видно, что можно определить сеточный аналог формального вектора $\bar{\nabla}$ — относительно набла-оператора (8) — формальную сеточную операцию $\bar{\nabla}_x(*)$ относительного дифференцирования, действующую на сеточный тензор A по правилу

$$\forall \mathbf{x}_j \in \omega_x : (\bar{\nabla}_x(*)A)_j = \frac{1}{V_j} \sum_{\Delta_l \in \Pi_j} \int_{\Delta_l} \sum_{\mathbf{x}_k \in \Delta_l} ((\nabla \varphi_k) * A_k) \varphi_j r \, dr \, dz, \quad (12)$$

где $(*) = (\circ), (\cdot)$ — параметр введенной сеточной операции: соответственно знак внешнего или внутреннего произведения вектора $\nabla \varphi$ слева на тензор A . Тогда сеточные операторы можно определять с помощью сеточной операции $\bar{\nabla}_x(*)$ относительного дифференцирования, в частности,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2 \quad p \in \mathcal{H}_1 : \bar{\nabla}_x \mathbf{v} = \bar{\nabla}_x(\circ) \mathbf{v}, \quad \nabla_x p = \bar{\nabla}_x(\circ) p. \quad (13)$$

Нами также будет использоваться детализация структуры оператора Γ_x на основе вспомогательного оператора $\bar{\Gamma}_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1)$, действующего в пространстве сеточных скаляров:

$$\forall \mathbf{x}_j \in \omega_x, \quad \forall u \in \mathcal{H}_1 : (\bar{\Gamma}_x u)_j = \frac{1}{V_j} \int_{G_j} u_\perp \varphi_j \, dr \, dz. \quad (14)$$

Оператор $\bar{\Gamma}_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1)$ в (14) является самосопряженным и положительно определенным:

$$\begin{aligned} \forall u, p \in \mathcal{H}_1 : (\bar{\Gamma}_x u, p)_1 &= \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} p_j \int_{G_j} u_\perp \varphi_j \, dr \, dz = \sum_{\Delta_l \in \omega_\Delta} \int_{\Delta_l} u_\perp \sum_{\mathbf{x}_k \in \Delta_l} (p_k \varphi_k) \, dr \, dz = \\ &= \int_{G_\omega} u_\perp p_\perp \, dr \, dz \iff \bar{\Gamma}_x = (\bar{\Gamma}_x)^* > 0. \end{aligned}$$

Из определения (14) следует требуемое представление оператора Γ_x :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2 : \Gamma_x \mathbf{v} = (\bar{\Gamma}_x v_r) \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi - (\bar{\Gamma}_x v_\varphi) \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_r. \quad (15)$$

Заметим, что сеточный аналог оператора ротор ($\nabla \times$) может быть определен аналогично с использованием сеточного аналога (12) относительного набла-оператора (8) и вспомогательного оператора (14), при этом в (12) операция $(*) = (\times)$ означает операцию векторного произведения. Такой подход используется, например, в сеточных задачах магнитной гидродинамики, учитывающих уравнения Максвелла для электромагнитных полей.

3.4. “Выделение границы” в определении сеточных операторов. В этой части статьи приводятся формулы, дающие эквивалентные определения сеточных операторов (7), необходимые для операторной постановки краевых условий.

Подставив в подынтегральные выражения из (7) формулы

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_\perp) \varphi_j = \nabla \cdot (\mathbf{v}_\perp \varphi_j) - \mathbf{v}_\perp \cdot (\nabla \varphi_j), \quad (\nabla \cdot \mathbf{U}_\perp) \varphi_j = \nabla \cdot (\mathbf{U}_\perp \varphi_j) - (\nabla \varphi_j) \cdot \mathbf{U}_\perp, \quad (16)$$

определения из (7) сеточных операторов $(\nabla_x \cdot)$ и $(\nabla_x \cdot)$ можно представить в другой форме для $\forall \mathbf{x}_j \in \omega_x$, $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2$ и $\mathbf{U} \in \mathcal{H}_3$:

$$\begin{aligned} (\nabla_x \cdot \mathbf{v})_j &= \frac{1}{V_j} \left(- \int_{G_j} \mathbf{v}_n \cdot \nabla \varphi_j r \, dr \, dz + \int_{\partial G_j \cap \partial G_\omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_n r \varphi_j \, d\tau \right); \\ (\nabla_x \cdot \mathbf{U})_j &= \frac{1}{V_j} \left(- \int_{G_j} \nabla \varphi_j \cdot \mathbf{U}_n r \, dr \, dz + \int_{G_j} ((\mathbf{U}_n)_{\varphi r} \mathbf{u}_\varphi - (\mathbf{U}_n)_{\varphi \varphi} \mathbf{u}_r) \varphi_j \, dr \, dz + \int_{\partial G_j \cap \partial G_\omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_n r \varphi_j \, d\tau \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь \mathbf{n} и $d\tau$ — вектор единичной внешней нормали к контуру ∂G_j и элемент его длины соответственно. Отметим, что для сеточных операторов ∇_x , ∇_x справедливы аналогичные формулы, которые не требуются далее в настоящей работе и поэтому здесь не приводятся. Кратко поясним способ получения формул (17) на примере более сложной — второй из них. Подставим последнее выражение из (16) в определение сеточного оператора $(\nabla_x \cdot)$ из (7):

$$V_j (\nabla_x \cdot \mathbf{U})_j = - \int_{G_j} (\nabla \varphi_j) \cdot \mathbf{U}_n r \, dr \, dz + \int_{G_j} \nabla \cdot (\mathbf{U}_n \varphi_j) r \, dr \, dz. \quad (18)$$

Интеграл от дивергенции в правой части формулы (18) преобразуем к поверхностному интегралу, переходя к пределу при $d\varphi \rightarrow 0$ интеграла по объему $(G_j \times d\varphi)$, получающемуся вращением области G_j на угол $d\varphi$, и учитывая независимость компонент $U_{\alpha\beta}$ тензора \mathbf{U} от угла φ :

$$\begin{aligned} \int_{G_j} \nabla \cdot (\mathbf{U}_n \varphi_j) r \, d\sigma &= \lim_{d\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{d\varphi} \int_{G_j \times d\varphi} \nabla \cdot (\mathbf{U}_n \varphi_j) r \, d\varphi \, d\sigma = \lim_{d\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{d\varphi} \int_{\partial(G_j \times d\varphi)} \mathbf{dS} \cdot \mathbf{U}_n \varphi_j = \\ &= \int_{\partial G_j} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_n r \varphi_j \, d\tau + \int_{G_j} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{U}_n) \varphi_j \, d\sigma = \\ &= \int_{\partial G_j} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_n r \varphi_j \, d\tau + \int_{G_j} ((\mathbf{U}_n)_{\varphi r} \mathbf{u}_\varphi - (\mathbf{U}_n)_{\varphi \varphi} \mathbf{u}_r) \varphi_j \, d\sigma. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь \mathbf{dS} — векторный элемент поверхности, т.е. границы $\partial(G_j \times d\varphi)$ объема $(G_j \times d\varphi)$; $d\sigma = dr \, dz$ — элемент площади в области G_ω . Подставляя в (18) результат преобразования (19), получаем искомую формулу из (17).

В формуле (19) интеграл по границе ∂G_j окрестности G_j узла \mathbf{x}_j не равен нулю только тогда, когда операторы определяются в граничных узлах $\mathbf{x}_j \in \omega_\gamma$, так как для внутренних узлов сетки базисная функция φ_j равна нулю на границе области G_j и вне ее. В соответствии с формулами (17) вводятся следующие “граничные” сеточные операторы $(\Phi_\gamma \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1)$ и $(\Phi_\gamma \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_2)$ для $\forall \mathbf{x}_j \in \omega_x$, $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_2$ и $\mathbf{U} \in \mathcal{H}_3$:

$$[\Phi_\gamma \cdot \mathbf{v}]_j = \begin{cases} \frac{1}{V_j} \int_{\partial G_j \cap G_\omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_n r \varphi_j \, d\tau, & \mathbf{x}_j \in \omega_\gamma, \\ 0, & \mathbf{x}_j \in \omega_x \setminus \omega_\gamma; \end{cases} \quad [\Phi_\gamma \cdot \mathbf{U}]_j = \begin{cases} \frac{1}{V_j} \int_{\partial G_j \cap G_\omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_n r \varphi_j \, d\tau, & \mathbf{x}_j \in \omega_\gamma, \\ 0, & \mathbf{x}_j \in \omega_x \setminus \omega_\gamma. \end{cases} \quad (20)$$

Как видно из (20), эти операторы определяются через граничные значения сеточных функций и результат их применения не равен нулю только в граничных узлах. “Граничные” операторы (20) необходимы для операторной постановки краевых условий [8, 9].

Из формул (17), с учетом определения “граничных” операторов (20), определяются сеточные операторы $(\nabla_x^0 \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1)$, $(\nabla_x^0 \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_2)$, в которых не учитываются интегралы по границе:

$$\begin{aligned} (\nabla_x^0 \cdot) &\stackrel{\text{def}}{=} (\nabla_x \cdot) - (\Phi_\gamma \cdot), \quad (\nabla_x^0 \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla_x \cdot) - (\Phi_\gamma \cdot), \\ \forall \mathbf{x}_j \in \omega_x, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2, \quad \mathbf{U} \in \mathcal{H}_3 : \quad (\nabla_x^0 \cdot \mathbf{v})_j &= - \frac{1}{V_j} \int_{G_j} \mathbf{v}_n \cdot \nabla \varphi_j r \, dr \, dz; \end{aligned} \quad (21)$$

$$(\nabla_x^0 \cdot \mathbf{U})_j = \frac{1}{V_j} \left(- \int_{G_j} \nabla \varphi_j \cdot \mathbf{U}_n r \, dr \, dz + \int_{G_j} ((\mathbf{U}_n)_{\varphi r} \mathbf{u}_\varphi - (\mathbf{U}_n)_{\varphi \varphi} \mathbf{u}_r) \varphi_j \, dr \, dz \right).$$

По аналогии с (11) представим оператор $(\nabla_x^0 \cdot)$ в виде суммы операторов $(\bar{\nabla}_x^0 \cdot), (\Gamma_x^0 \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_2)$ в соответствии с формулой (21):

$$\begin{aligned} (\nabla_x^0 \cdot) &= (\bar{\nabla}_x^0 \cdot) + (\Gamma_x^0 \cdot) \quad \forall \mathbf{x}_j \in \omega_x, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{H}_3 : \\ (\bar{\nabla}_x^0 \cdot \mathbf{U})_j &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{V_j} \int_{G_j} \nabla \varphi_j \cdot \mathbf{U}_{\pi r} dr dz, \quad (\Gamma_x^0 \cdot \mathbf{U})_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V_j} \int_{G_j} ((\mathbf{U}_{\pi})_{\varphi r} \mathbf{u}_{\varphi} - (\mathbf{U}_{\pi})_{\varphi \varphi} \mathbf{u}_r) \varphi_j dr dz. \end{aligned} \quad (22)$$

По аналогии с (12) здесь удобно ввести формальную сеточную операцию $\bar{\nabla}_x^0(*)$, действующую на сеточный тензор A по правилу

$$\forall \mathbf{x}_j \in \omega_x : \bar{\nabla}_x^0(*)A_j = -\frac{1}{V_j} \int_{G_j} \nabla \varphi_j * A_{\pi r} dr dz. \quad (23)$$

Тогда сеточные операторы $(\nabla_x^0 \cdot), (\bar{\nabla}_x^0 \cdot)$ можно определять с помощью формальной сеточной операции $\bar{\nabla}_x^0(*)$, в частности,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2, \mathbf{U} \in \mathcal{H}_3 : \bar{\nabla}_x^0 \cdot \mathbf{U} = \bar{\nabla}_x^0(\cdot)\mathbf{U}, \quad \nabla_x^0 \cdot \mathbf{v} = \bar{\nabla}_x^0(\cdot)\mathbf{v}. \quad (24)$$

Аналогично (15) имеем представление оператора $(\Gamma_x^0 \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_2)$:

$$\forall \mathbf{U} \in \mathcal{H}_3 : \Gamma_x^0 \cdot \mathbf{U} = (\bar{\Gamma} \mathbf{U}_{\varphi r}) \mathbf{u}_{\varphi} - (\bar{\Gamma}_x \mathbf{U}_{\varphi \varphi}) \mathbf{u}_r. \quad (25)$$

3.5. Свойства “взаимосопряженности” сеточных операторов. Для введенных сеточных операторов (7), (20) справедливы “сумматорные” равенства:

$$(p, \nabla_x \cdot \mathbf{v})_1 + (\mathbf{v}, \nabla_x p)_2 = (p, \Phi_{\gamma} \cdot \mathbf{v})_1; \quad (\mathbf{v}, \nabla_x \cdot \mathbf{U})_2 + (\mathbf{U}, \nabla_x \mathbf{v})_3 = (\mathbf{v}, \Phi_{\gamma} \cdot \mathbf{U})_2, \quad (26)$$

где $\forall p \in \mathcal{H}_1, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2$ и $\mathbf{U} \in \mathcal{H}_3$. Эти тождества являются сеточными аналогами интегральных тождеств, получающихся при интегрировании по замкнутой области с достаточно гладкой границей следующих формул “дифференцирования произведения”, верных для достаточно гладких функций $p, \mathbf{v}, \mathbf{U}$:

$$\nabla \cdot (p\mathbf{v}) = p\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p, \quad \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{U}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{U} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{v}).$$

Тождества (26) являются определяющими для рассматриваемого нами класса методов [4, 8, 9]. Из тождеств (26), с учетом определения (21) сеточных операторов $(\nabla_x^0 \cdot), (\bar{\nabla}_x^0 \cdot)$, следует свойство “взаимосопряженности” операторов:

$$(\nabla_x^0)^* = -(\bar{\nabla}_x^0 \cdot), \quad (\bar{\nabla}_x^0)^* = -(\nabla_x^0 \cdot). \quad (27)$$

Кроме того, нетрудно доказать справедливость свойств

$$(\bar{\nabla}_x^0)^* = -(\bar{\nabla}_x^0 \cdot), \quad (\Gamma_x^0)^* = -(\Gamma_x^0 \cdot), \quad (\Gamma_x^0 \cdot) \bar{\nabla}_x^0 = 0, \quad (\bar{\nabla}_x^0 \cdot) \Gamma_x^0 = 0. \quad (28)$$

Для примера приведем вывод последней из формул (26):

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \nabla_x \cdot \mathbf{U})_2 + (\mathbf{U}, \nabla_x \mathbf{v})_3 &= \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} V_j \mathbf{v}_j \cdot (\nabla_x \cdot \mathbf{U})_j + \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} V_j \mathbf{U}_j \cdot \cdot (\nabla_x \cdot \mathbf{v})_j = \\ &= \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} \mathbf{v}_j \cdot \int_{G_j} (\nabla \cdot \mathbf{U}_{\pi}) \varphi_j r dr dz + \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} \mathbf{U}_j \cdot \cdot \int_{G_j} (\nabla \mathbf{v}_{\pi}) \varphi_j r dr dz = \\ &= \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} \mathbf{v}_j \cdot \sum_{\Delta_l \in \Pi_j \Delta_l} \int (\nabla \cdot \mathbf{U}_{\pi}) \varphi_j r dr dz + \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} \mathbf{U}_j \cdot \cdot \sum_{\Delta_l \in \Pi_j \Delta_l} \int (\nabla \mathbf{v}_{\pi}) \varphi_j r dr dz = \\ &= \sum_{\Delta_l \in \omega_{\Delta} \Delta_l} \int (\nabla \cdot \mathbf{U}_{\pi}) \cdot \sum_{\mathbf{x}_k \in \Delta_l} (\mathbf{v}_k \varphi_k) r dr dz \mathbf{v}_j + \sum_{\Delta_l \in \omega_{\Delta} \Delta_l} \int (\nabla \mathbf{v}_{\pi}) \cdot \cdot \sum_{\mathbf{x}_k \in \Delta_l} (\mathbf{U}_k \varphi_k) r dr dz = \\ &= \int_{G_{\omega}} (\nabla \cdot \mathbf{U}_{\pi}) \cdot \mathbf{v}_{\pi} r dr dz + \int_{G_{\omega}} (\nabla \mathbf{v}_{\pi}) \cdot \cdot \mathbf{U}_{\pi} r dr dz = \int_{G_{\omega}} (\nabla \cdot (\mathbf{U}_{\pi} \cdot \mathbf{v}_{\pi})) r dr dz = \\ &= \int_{\partial G_{\omega}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_{\pi} \cdot \mathbf{v}_{\pi} r d\tau = \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} \mathbf{v}_j \cdot \int_{\partial G_j \cap \partial G_{\omega}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_{\pi} r \varphi_j d\tau = (\mathbf{v}, \Phi_{\gamma} \cdot \mathbf{U})_2, \end{aligned} \quad (29)$$

а также первой формулы из (28):

$$\begin{aligned} ((\bar{\nabla}_x^0 \cdot U), \mathbf{v})_2 &= - \sum_{\mathbf{x}_j \in \omega_x} \mathbf{v}_j \cdot \int_{G_j} \nabla \varphi_j \cdot \mathbf{U}_{\perp r} dr dz = - \sum_{\Delta_l \in \omega_{\Delta} \Delta_l} \int \mathbf{U}_{\perp} \cdot \cdot \sum_{\mathbf{x}_k \in \Delta_l} (\nabla \varphi_k \mathbf{v}_k) r dr dz = \\ &= - \sum_{\Delta_l \in \omega_{\Delta} \Delta_l} \int \mathbf{U}_{\perp} \cdot \cdot \sum_{\mathbf{x}_k \in \Delta_l} \bar{\nabla}(\varphi_k \mathbf{v}_k) r dr dz = - \int_{G_{\omega}} \mathbf{U}_{\perp} \cdot \cdot \bar{\nabla} \mathbf{v}_{\perp r} dr dz = - (\mathbf{U}, \bar{\nabla} \mathbf{v})_3. \end{aligned} \quad (30)$$

Операторная постановка сеточных краевых условий с использованием граничных операторов типа (20) позволяет формулировать операторные сеточные алгоритмы в терминах “взаимосопряженных” операторов типа (27), (28) [4, 8, 9].

В конечном итоге, *структурные свойства сеточных аналогов рассматриваемых инвариантных дифференциальных операторов* сводятся к тому, что все сеточные операторы определяются через сеточный аналог (12) относительного набла-оператора (8) и скалярный оператор (14):

– в соответствии с (11), (13) сеточные операторы ∇_x , $\bar{\nabla}_x$ определяются через формальную сеточную операцию $\bar{\nabla}_x(*)$ относительного дифференцирования (12):

$$\nabla_x = \bar{\nabla}_x + \Gamma_x; \quad \forall p \in \mathcal{H}_1, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2 : \bar{\nabla}_x \mathbf{v} = \bar{\nabla}_x(\circ) \mathbf{v}, \quad \nabla_x p = \bar{\nabla}_x(\circ) p; \quad (31)$$

– в соответствии с (21), (28) сеточные операторы $(\nabla_x \cdot)$, $(\bar{\nabla}_x \cdot)$ определяются через операторы, сопряженные к операторам из (31):

$$\begin{aligned} (\nabla_x \cdot) &= (\nabla_x^0 \cdot) + (\Phi_{\gamma} \cdot), \quad (\bar{\nabla}_x \cdot) = (\bar{\nabla}_x^0 \cdot) + (\Gamma_x^0 \cdot), \\ (\nabla_x^0 \cdot) &= -(\nabla_x)^*, \quad (\bar{\nabla}_x^0 \cdot) = -(\bar{\nabla}_x)^*, \quad (\Gamma_x^0 \cdot) = -(\Gamma_x)^*; \end{aligned} \quad (32)$$

– в соответствии с (15), (25) операторы $(\Gamma_x^0 \cdot)$, $(\bar{\Gamma}_x)$ определяются через скалярный оператор $\bar{\Gamma}_x$ (14):

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2 : \Gamma_x \mathbf{v} = (\bar{\Gamma}_x v_r) \mathbf{u}_{\varphi} \mathbf{u}_{\varphi} - (\bar{\Gamma}_x v_{\varphi}) \mathbf{u}_{\varphi} \mathbf{u}_r, \quad \forall U \in \mathcal{H}_3 : \Gamma_x^0 \cdot U = (\bar{\Gamma}_x U_{\varphi r}) \mathbf{u}_{\varphi} - (\bar{\Gamma}_x U_{\varphi \varphi}) \mathbf{u}_r. \quad (33)$$

Указанный факт определения всех сеточных операторов через сеточный аналог (12) относительного набла-оператора (8) и скалярный оператор (14) непосредственно используется при построении объектно-ориентированных алгоритмов.

4. Оптимизация формул и алгоритмов применения операторов и вычисления их матриц.

В рассматриваемой нами модельной задаче (1) полагаем

$$A_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_x, \quad A_{12} \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla_x^0 \cdot), \quad A_{23} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\nabla}_x^0 \cdot), \quad A_{32} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\nabla}_x. \quad (34)$$

Такое определение операторов A_{12} и A_{23} в задаче (1) через операторы $(\nabla_x^0 \cdot)$, $(\bar{\nabla}_x^0 \cdot)$ означает, что сеточные краевые условия имеют вид $\Phi_{\gamma} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\Phi_{\gamma} \cdot \mathbf{U} = 0$ (см. определения (21)).

В рамках данной работы нет необходимости рассматривать другие краевые условия и соответствующее им операторное представление сеточной краевой задачи в виде, аналогичном (1) [8, 9], так как для рассматриваемого класса методов основная часть алгоритмов применения сеточных операторов и вычисления их матриц всегда сводится к применению сеточных операторов (34) и их суперпозиций.

Формулы (7), (17), (21), (22) дают математическое определение сеточных операторов в виде интегралов. Для рассмотрения алгоритма необходимо привести расчетные формулы в терминах параметров сетки. Требуемые расчетные формулы получаются путем взятия интегралов в формулах (7), (17) с использованием формул (5) для базисных функций.

С учетом структурных свойств (31)–(33) используемых сеточных операторов, достаточно привести формулы для сеточного аналога $\bar{\nabla}_x(*)$ (12) относительного набла-оператора (8):

$$\forall \mathbf{x}_j \in \omega_x : (\bar{\nabla}_x(*) A)_j = \frac{1}{6V_j} \sum_{\Delta_l \in \Pi_j} \sum_{\mathbf{x}_k \subset \Delta_l} \tilde{r}_{j,l} \mathbf{N}_{k-1,k+1} * A_k \quad (35)$$

и для оператора $\bar{\Gamma}_x$:

$$\forall u \in \mathcal{H}_1 : (\bar{\Gamma}_x u)_j = \frac{1}{3V_j} \sum_{\Delta_l \in \Pi_j} s_l \tilde{u}_{j,l}, \quad (36)$$

через которые определяются все остальные операторы. В (35), (36) для сеточных величин используется обозначение $\tilde{f}_{j,l} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4}(2f_j + f_l + f_{l+1})$. Здесь же приведем расчетную формулу, определяющую формальную сеточную операцию $\bar{\nabla}_x^0(*)$ (23):

$$\forall \mathbf{x}_j \in \omega_x : (\bar{\nabla}_x^0(*)A)_j = \frac{1}{6V_j} \sum_{\Delta_l \in \Pi_j} \sum_{\mathbf{x}_k \subset \Delta_l} \tilde{r}_k \mathbf{N}_{l,l+1} * A_k, \quad \tilde{r}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4}(2r_k + r_{k-1} + r_{k+1}), \quad (37)$$

через которую определяются сеточные операторы $(\bar{\nabla}_x^0 \cdot)$, $(\bar{\nabla}_x^0 \cdot)$ в (24) и сопряженные операторы (32) к сеточным операторам $-\bar{\nabla}_x$, $-\bar{\nabla}_x$, определяемым (13) через сеточный аналог $\bar{\nabla}_x(*)$ (35) относительноного набла-оператора (8). Формальную сеточную операцию $\bar{\nabla}_x^0(*)$ (37) можно назвать “сопряженной” к формальной сеточной операции $\bar{\nabla}_x^0(*)$ (35) — сеточному аналогу относительного набла-оператора.

При алгоритмизации итерационного метода решения сеточной операторной задачи (1) можно использовать формулы (35)–(37) непосредственно, при этом вычисления по этим формулам выполняются многократно. С точки зрения вычислительной эффективности целесообразно преобразовать эти формулы, приведя подобные и вычисляя заранее коэффициенты при значениях сеточных функций в узлах шаблона сеточного оператора.

Приводя подобные в формулах (35), (36), можно их представить в следующем виде:

$$\forall \mathbf{x}_j \in \omega_x : (\bar{\nabla}_x(*)A)_j = \mathbf{b}_{jj} * A_j + \sum_{\mathbf{x}_k \in \Pi_j} \mathbf{b}_{jk} * A_k, \quad (\bar{\Gamma}_x u)_j = c_{jj} u_j + \sum_{\mathbf{x}_k \in \Pi_j} c_{jk} u_k. \quad (38)$$

Здесь не приводятся формулы для вычисления коэффициентов \mathbf{b} и c , так как реально их удобно вычислять в программе, реализуя формулы (35), (36) при обходе ячеек сетки ω_Δ . Эти формулы однородны по всем узлам сетки, в то время как аналитические формулы для коэффициентов \mathbf{b} и c различны во внутренних и граничных узлах сетки ω_x , их программная реализация является логически более сложной. Вводя матрицы

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_{ij}\}, \quad C = \{c_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x, \quad (39)$$

формулы (38) можно записать в матричной форме

$$\bar{\nabla}_x(*)A = \mathbf{B} * A, \quad \bar{\Gamma}_x u = Cu. \quad (40)$$

Элементы матрицы \mathbf{B} являются векторами ($\alpha = r, \varphi, z, \mathbf{b}_{ij} = b_{\alpha,ij} \mathbf{u}_\alpha, b_{\varphi,ij} = 0$), элементы матрицы C — скаляры.

Как следует из структурных свойств (31)–(33) сеточных операторов, результаты применения всех используемых сеточных операторов выражаются через матрицы \mathbf{B}, C (39). Приведем матричную запись соответствующих формул, аналогичную (40):

$$\begin{aligned} A_{21}p &= \nabla_x p = \bar{\nabla}_x(\circ)p = \mathbf{B} \circ p = \{\mathbf{b}_{ij} p_j, i = 1, \dots, N_x\}, \\ A_{12}\mathbf{v} &= \nabla_x^0 \cdot \mathbf{v} = -(\nabla_x)^* \mathbf{v} = -\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{v} = \{-\mathbf{b}_{ij}^* \cdot \mathbf{v}_j, i = 1, \dots, N_x\}, \\ A_{32}\mathbf{v} &= \nabla_x \mathbf{v} = \bar{\nabla}_x \mathbf{v} + \Gamma_x \mathbf{v} = \bar{\nabla}_x(\circ)\mathbf{v} + (\bar{\Gamma}_x v_r) \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi - (\bar{\Gamma}_x v_\varphi) \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_r = \\ &= \mathbf{B} \circ \mathbf{v} + (C v_r) \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi - (C v_\varphi) \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_r = \\ &= \{\mathbf{b}_{ij} \mathbf{v}_j + c_{ij} v_{r,j} (\mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi) + c_{ij} v_{\varphi,j} (\mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_r), i = 1, \dots, N_x\}, \\ A_{23}\mathbf{U} &= \nabla_x^0 \cdot \mathbf{U} = \bar{\nabla}_x^0 \cdot \mathbf{U} + \Gamma_x^0 \cdot \mathbf{U} = -(\bar{\nabla}_x)^* \mathbf{U} - (\Gamma_x)^* \mathbf{U} = \\ &= -\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{U} + (\bar{\Gamma}_x \mathbf{U}_{\varphi r}) \mathbf{u}_\varphi - (\bar{\Gamma}_x \mathbf{U}_{\varphi \varphi}) \mathbf{u}_r = \\ &= \{-\mathbf{b}_{ij}^* \cdot \mathbf{U}_j + c_{ij} \mathbf{U}_{\varphi r,j} \mathbf{u}_\varphi - c_{ij} \mathbf{U}_{\varphi \varphi,j} \mathbf{u}_r, i = 1, \dots, N_x\}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $p \in \mathcal{H}_1, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2$ и $\mathbf{U} \in \mathcal{H}_3$. Здесь суммирование проводится по повторяющимся индексам, нумерующим узлы сетки и значения сеточных функций в них. Так как скалярное произведение (6) определяется через объемы узлов, в формулах (41) элементы \mathbf{b}^* матрицы \mathbf{B}^* определяются по формуле

$$\mathbf{B}^* = \{\mathbf{b}_{ij}^*, i, j = 1, \dots, N_x\}, \quad \mathbf{b}_{ij}^* = \frac{V_j}{V_i} \mathbf{b}_{ji}. \quad (42)$$

Как видно из (41), используется два способа применения “векторных” матриц \mathbf{B} и \mathbf{B}^* , задаваемых знаком произведения (\cdot) или (\circ) : в первом случае выполняется внутреннее произведение вектора \mathbf{b} (элемента матрицы \mathbf{B}) на значение в узле сеточного вектора или тензора, во втором — внешнее.

При предварительно вычисленных на сетке коэффициентах \mathbf{b} и \mathbf{c} использование формул (41) более чем в три раза вычислительно эффективнее непосредственного использования формул (35)–(37), что весьма существенно при численном решении реальных прикладных задач. Это особенно актуально при использовании современных ПК для численного решения задач газовой динамики на сетке от нескольких тысяч до нескольких десятков тысяч узлов, когда типичная прикладная задача решается от десятка минут до часов.

Как отмечено выше, в итерационном алгоритме решения модельной сеточной операторной задачи (1) основную вычислительную нагрузку несет итерационный метод обращения оператора “верхнего слоя”

$$E_{\nu} = I + \tau(A_{\bar{\nu}} + A_{\xi}) = E_{\nu}^* > 0, \quad A_{\bar{\nu}} \stackrel{\text{def}}{=} -A_{21}\tilde{\nu}A_{12}, \quad A_{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} -A_{23}\xi A_{32}. \quad (43)$$

При реализации такого метода необходимо многократно вычислять результат применения оператора (43), при этом основную вычислительную нагрузку несет применение операторов $A_{\bar{\nu}}$ и A_{ξ} . В целях последующего рассмотрения вопроса оптимизации вычислений приведем формулы для операторов $A_{\bar{\nu}}$ и A_{ξ} в матричном виде, используя свойства (31)–(33) сеточных операторов и формулы (41). Для оператора $A_{\bar{\nu}}$:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2 : A_{\bar{\nu}}\mathbf{v} = -A_{21}\tilde{\nu}A_{12}\mathbf{v} = \nabla_x \tilde{\nu}(\nabla_x)^* \mathbf{v} = \mathbf{B} \circ (\tilde{\nu}\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{B} \circ \tilde{\nu}\mathbf{B}^*) \cdot \mathbf{v}, \quad (44)$$

для оператора A_{ξ} :

$$\begin{aligned} A_{\xi} &= -A_{23}A_{32} = -\left((\bar{\nabla}_x^0 \cdot) + (\Gamma_x^0 \cdot)\right)\xi(\bar{\nabla}_x + \Gamma_x) = \\ &= -(\bar{\nabla}_x^0 \cdot)\xi\bar{\nabla}_x - (\Gamma_x^0 \cdot)\xi\Gamma_x = (\bar{\nabla}_x)^* \xi\bar{\nabla}_x + (\Gamma_x)^* \xi\Gamma_x, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_2 : \quad A_{\xi}\mathbf{v} &= (\bar{\nabla}_x)^* \xi\bar{\nabla}_x \mathbf{v} + (\Gamma_x)^* \xi\Gamma_x \mathbf{v}, \\ (\bar{\nabla}_x)^* \xi\bar{\nabla}_x \mathbf{v} &= \mathbf{B}^* \cdot (\xi\mathbf{B} \circ \mathbf{v}) = (\mathbf{B}^* \cdot \xi\mathbf{B}) \circ \mathbf{v}, \\ (\Gamma_x)^* \xi\Gamma_x \mathbf{v} &= (\bar{\Gamma}_x \bar{\Gamma}_x v_{\varphi}) \mathbf{u}_{\varphi} - (\bar{\Gamma}_x \bar{\Gamma}_x v_r) \mathbf{u}_r = \\ &= [C(Cv_{\varphi})] \mathbf{u}_{\varphi} - [C(Cv_r)] \mathbf{u}_r = [C^2 v_{\varphi}] \mathbf{u}_{\varphi} - [C^2 v_r] \mathbf{u}_r. \end{aligned} \quad (45)$$

В случае применения оператора $A_{\bar{\nu}}$ с использованием формул (44) скобками отмечены два варианта алгоритмизации:

1) при реализации формулы $\mathbf{B} \circ (\tilde{\nu}\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{v})$ выполняется последовательное применение матриц \mathbf{B}^* и \mathbf{B} к сеточному вектору и скаляру соответственно;

2) при реализации формулы $(\mathbf{B} \circ \tilde{\nu}\mathbf{B}^*) \cdot \mathbf{v}$ предварительно вычисленная матрица $\mathbf{B} \circ \tilde{\nu}\mathbf{B}^*$, элементами которой являются диадики, применяется к сеточному вектору.

Базовой операцией при реализации указанных формул является произведение $\mathbf{b} \circ \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{v}$ трех векторов. Здесь векторы \mathbf{b} , \mathbf{b}^* — двумерные ($b_{\varphi} = 0$), вектор \mathbf{v} трехкомпонентный в общем случае задач, учитывающих вращение. Очевидно, что вычисление по формулам $\mathbf{b} \circ (\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{v})$ требует четыре операции умножения, как и вычисление по формуле $(\mathbf{b} \circ \mathbf{b}^*) \cdot \mathbf{v}$ с предварительно вычисленной величиной $(\mathbf{b} \circ \mathbf{b}^*)$. Вычислительная эффективность больше в первом из приведенных выше вариантов алгоритмизации из-за увеличения примерно в три раза заполненности матрицы суперпозиции $\mathbf{B} \circ \tilde{\nu}\mathbf{B}^*$ по сравнению с каждой из матриц \mathbf{B} и \mathbf{B}^* . Суммарный выигрыш по вычислительной эффективности в первом варианте по сравнению со вторым примерно полуторакартный. Подчеркнем, что в этом случае выгоднее последовательное применение операторов “первого порядка” с предварительно вычисленной матрицей \mathbf{B} , чем применение предварительно вычисленной полной матрицы оператора “второго порядка”. Это свойство имеет место, когда элементами матрицы оператора “второго порядка” являются диадики. В случае применения оператора A_{ξ} с использованием формул (45) скобками отмечены два варианта алгоритмизации:

1) при реализации формулы $\mathbf{B} \cdot (\xi\mathbf{B}^* \circ \mathbf{v})$ выполняется последовательное применение матриц \mathbf{B}^* и \mathbf{B} к сеточному вектору и диадику соответственно;

2) при реализации формулы $(\mathbf{B} \cdot \xi\mathbf{B}^*) \circ \mathbf{v}$ предварительно вычисленная матрица $\mathbf{B} \cdot \xi\mathbf{B}^*$, элементами которой являются скаляры, применяется к сеточному вектору.

Базовой операцией при реализации указанных формул является произведение $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^* \circ \mathbf{v}$ трех векторов. Очевидно, что вычисление по формулам $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b}^* \circ \mathbf{v})$ требует 12 операций умножения, а вычисление по формуле $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^*) \circ \mathbf{v}$ с предварительно вычисленной величиной $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^*)$ — три операции умножения. Поэтому вычислительная эффективность при применении формулы $(\mathbf{B} \cdot \xi\mathbf{B}^*) \circ \mathbf{v}$ в несколько раз выше.

При применении оператора A_{ξ} с использованием формул (45) вычисляются также величины CCv_{α} , $\alpha = r, \varphi$, для которых вычислительно более эффективной является формула $C(Cv_{\alpha})$, $\alpha = r, \varphi$, последовательного применения матрицы C , чем формула $(CC)v_{\alpha}$, $\alpha = r, \varphi$, — из-за большей заполненности матрицы CC .

В итоге выпишем формулы применения сеточных операторов $A_{\tilde{\nu}}$ и A_{ξ} , обеспечивающие максимальную вычислительную эффективность:

$$\forall v \in \mathcal{H}_2 : A_{\tilde{\nu}} v = B \circ (\tilde{\nu} B^* \cdot v), \quad A_{\xi} v = (B^* \cdot \xi B) \circ v + [C(Cv_{\varphi})] u_{\varphi} - [C(Cv_r)] u_r. \quad (46)$$

При применении оператора “верхнего слоя” E_{ν} (43) на основе оптимальных формул (46) в процессе реализации итерационного метода решения задачи (1) используются три предварительно вычисленные матрицы B , C , $(B^* \cdot \xi B) = \{\xi_k b_{ik}^* \cdot b_{kj}, i, j, k = 1, \dots, N_x\}$. Отметим, что в ряде случаев при численной реализации двумерных неявных операторных разностных схем газовой динамики вычислительно более эффективно обращение оператора “верхнего слоя” прямым методом. В этом случае необходимо вычислять полную матрицу оператора E_{ν} , состоящую из диадиков. Подчеркнем, что во всех алгоритмах вычислительно наиболее затратная часть сводится к работе с вектор-матрицей B , представляющей формальную сеточную операцию (12) относительного дифференцирования. Повышение вычислительной эффективности без использования выявленной структуры операторов, сводящей применение всех используемых сеточных операторов к работе с двумя матрицами B и C , потребовало бы программирования вычисления матрицы для каждого из используемых операторов отдельно, что существенно усложняет алгоритм, требует больше оперативной памяти и является неоптимальным в части, связанной с вычислением матрицы оператора “второго порядка”, элементами которой являются диадики.

5. Классы и действия, необходимые для работы с матрицами сеточных операторов. Для программной реализации вычисления значений применения сеточных операторов через матрицы B и C по формулам (41)–(45) достаточно дополнить имеющийся в системе классов [6] набор классов, изначально предназначенный для программирования сеточных операторов по формулам (35)–(37), только классами для хранения специальных матриц.

Все матрицы, использующиеся в программе, квадратные порядка N_x и разреженные. В дальнейшем рассмотрении произвольную матрицу будем обозначать символом D , ее элементы — символом d с индексами; элементы d матрицы D однотипны: могут быть скалярами, векторами либо диадиками.

Матрицы в программе хранятся построчно в виде наборов ненулевых элементов строк:

$$D = \{\bar{d}_i, i = \overline{1, N_x}\}, \quad \bar{d}_i = \{d_{ij} : d_{ij} \neq 0, j \in \overline{1, N_x}\}.$$

Для этого в систему [6] вводятся шаблонные классы для элемента d_{ij} и для строки \bar{d}_i матрицы D . В качестве параметра этих шаблонов выступает тип элемента матрицы.

Для элемента d_{ij} матрицы D предназначен шаблон структуры `Верх_component`:

```
template<class type_component> struct Верх_component {
    type_component val;
    size_t j; // the number in JN
    bool int_sign; // true if on the border
    iterator_border q; // use if int_sign == true only
    Верх_component(): val(), j(0), int_sign(false), q() {}
    Верх_component(const double& a): val(a), j(0), int_sign(false), q() {}
    Верх_component() {}
    Верх_component& operator= (const double& a);
    Верх_component& operator= (const type_component& a);
    Верх_component& operator= (const Верх_component& a);
};
```

Параметр `type_component` шаблона — тип элемента матрицы. В программе этот тип может принимать значения `double` для числовых матриц, `vector_component` для векторных матриц или `tensor_component` для матриц, состоящих из диадиков. Кроме значения элемента `val` вместе с ним в структуре хранятся его уникальный номер j соответствующего ему узла x_j в глобальной нумерации элементов сетки (для матрицы — это номер столбца) и признак `int_sign`, определяющий, не граничный ли это узел (если да, то хранится соответствующее значение q граничного итератора [6]).

Кроме того, определены конструктор по умолчанию, копирующий конструктор, деструктор и операторы присваивания [5].

Для строки матрицы \bar{d} оператора D предназначен шаблон структуры `Верх_Row`:

```
template<class type_component> struct Верх_Row {
```

```

typedef Bepx_component<type_component> Bepx_Raw_component;
valarray<Bepx_Raw_component> val;
size_t size_max;
Bepx_Raw(const valarray<Bepx_Raw_component>& p, const size_t& mx = 0): val(p), size_max(mx) {}
Bepx_Raw(const Bepx_Raw& p): val(p.val), size_max(p.size_max) {}
Bepx_Raw(const size_t& sz): val(sz), size_max(0) { val = 0.0;}
Bepx_Raw(): val(), size_max(0) {}
Bepx_Raw() {}
Bepx_Raw& operator= (const Bepx_Raw& a);
};

```

Параметр `type_component` шаблона `Bepx_Raw` совпадает с параметром шаблона `Bepx_component`, определяющим структуру для элементов матрицы. Как и в остальных объектах [6], использующих массивы, внутри структуры `Bepx_Raw` строка матрицы оператора хранится в виде объекта массива `val` типа `valarray< type_component >`, так как шаблонный класс `template<class T> class valarray` из стандартной библиотеки языка C++ предназначен для хранения и управления последовательностями элементов типа `T` переменной длины и оптимизирован с точки зрения эффективности вычислений. Для хранения ненулевых элементов строки матрицы оператора в шаблоне структуры `Bepx_Raw` предназначен массив `val`, а количество ненулевых элементов в строке хранится в специально предназначенной для этого числовой переменной `size_max`. Кроме того, в структуре определены (согласно [5]) набор конструкторов, деструктор и оператор присваивания.

Для заполнения массивов с матрицами B и C по формулам (35) и (36) в программе используются соответствующие классы и операции с ними из [6], а также средства для описания сетки и работы с сеточными функциями, предназначенные для программирования формул сеточных аналогов дифференциальных операторов первого порядка. После того как матрицы B и C заполнены, в процедурах для вычисления результатов применения сеточных аналогов инвариантных дифференциальных операторов используются только действия с ними по формулам матричной алгебры общего вида.

В качестве примера работы с определенными структурами приведем фрагмент кода, в котором для ранее вычисленной матрицы B по формуле (42) находится матрица B^* :

```

//...
valarray< Bepx_Raw<vector_component>> B;
// вычисление матрицы B
//...
iterator_knot i;
valarray< Bepx_Raw<vector_component>> B_transpose;
//...
for(i.reset(); i.end(); i++){ // цикл по всем узлам расчетной сетки
    size_t raw_max = B[i.current()].size_max;
    // B[i.current()] - текущая строка матрицы B
    // raw_max - число ненулевых элементов в текущей строке
    double Vx = Vi(i); // сеточный объем узла, соответствующего текущей строке
    for(size_t raw_index = 0; raw_index < raw_max; raw_index++){
        Bepx_component<vector_component> B_cur = Vx *B[i.current()].val[raw_index]; // текущий элемент
        // далее элемент j строки i из B заносится в элемент i строки j из B_transpose:
        B_transpose [B_cur.j].val[res1[B_cur.j].size_max].val = B_cur.val;
        B_transpose [B_cur.j].val[res1[B_cur.j].size_max].j = i.current();
        B_transpose [B_cur.j].size_max += 1;
    }
}
for(i.reset(); i.end(); i++){ // цикл по всем узлам расчетной сетки
    size_t raw_max = B_transpose [i.current()].size_max;
    double Vx = Vi(i); // сеточный объем узла, соответствующего текущей строке
    for(size_t raw_index = 0; raw_index < raw_max; raw_index++)
        B_transpose [raw_index].val /= Vx;
}
//...

```

Таким образом, применение предложенного в настоящей статье способа вычислений результатов применения операторов позволяет оставить на низшем иерархическом уровне программы только процедуры заполнения матриц B и C , а процедуры для вычисления результатов применения сеточных операторов

реализовывать на высшем иерархическом уровне с помощью обобщенных алгоритмов, не зависящих от особенностей конкретной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. Арделян Н.В., Космачевский К.В., Черниговский С.В. Вопросы построения и исследования полностью консервативных разностных схем магнитной газодинамики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
5. Страуструп Б. Язык программирования C++. СПб., М.: Невский Диалект, Изд-во "БИНОМ", 1999.
6. Саблин М.Н. Программная реализация численного решения операторно-разностных сеточных задач двумерной газовой динамики с использованием системы классов C++ // Вычислительные методы и программирование. 2006. 7, № 1. 144–154.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
8. Саблин М.Н., Арделян Н.В. Двумерная операторно-разностная схема газовой динамики в лагранжевых координатах на нерегулярной треугольной сетке, обладающая свойством локальной аппроксимации вблизи оси симметрии // Прикл. матем. и информатика, № 10. М.: Диалог-МГУ, 2002. 15–33.
9. Саблин М.Н., Арделян Н.В. Операторная сеточная аппроксимация задач двумерной газовой динамики в подвижных координатах на нерегулярной сетке // Прикл. матем. и информатика, № 11. М.: Диалог-МГУ, 2002. 5–37.
10. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
11. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
03.04.2012
