

УДК 53:51(075.8)

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. А. Морозов¹, В. Г. Лежнев², Н. М. Токарев²

Для краевой задачи бигармонического уравнения рассматривается проблема выбора гранично-го условия на части границы. Применяется проекционный алгоритм метода базисных потенциалов, использующего системы потенциалов, полные на границе области. Работа выполнена в рамках проекта № 2.1.1/12952 Минобрнауки РФ и при поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00297 и 11-01-96511).

Ключевые слова: бигармонические уравнения, краевые задачи, проекционный алгоритм, системы потенциалов, метод регуляризации.

1. Введение. В ограниченной односвязной области $D \subset R^2$ с гладкой границей $\partial D = S$, которая распадается на две дуги S_1 и S_2 , $S = S_1 \cup S_2$, рассматривается следующая задача для функции $u(x)$, $x = (x_1, x_2)$:

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in D,$$

$$u|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_2} = f_2(x).$$

На дуге S_1 требуется определить функцию

$$f_1(x) = \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_1},$$

такую, что

$$\|\Delta u(x)\|_D = \left(\iint_D (\Delta u(x))^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow \min.$$

Будем предполагать, что потенциал Робена $R(x)$ для контура S не равен нулю на S : $R(x) \equiv R_0 \neq 0$ при $x \in S$.

2. Вариационная задача V. Рассмотрим пространство $\dot{H}^2(D)$ функций $v(x)$ с обобщенными производными из $L_2(D)$ до второго порядка включительно, обращающихся в нуль на S . Норму в $\dot{H}^2(D)$ обозначим $||| \cdot |||$, будем полагать $|||v(x)||| = \|\Delta v(x)\|_D$. Рассмотрим в $\dot{H}^2(D)$ выпуклое множество

$$B = \left\{ v(x) : \Delta^2 v(x) = 0, \quad v|_S = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{S_2} = f_2(x) \right\}.$$

Множество B замкнуто в $\dot{H}^2(D)$. Действительно, пусть последовательность $v_k(x) \in B$ сходится в $\dot{H}^2(D)$ к $v_0(x)$ при $k \rightarrow \infty$. Из оценок [1]

$$\left\| \frac{\partial v_k}{\partial n} \right\|_S \leq c_1 \|\nabla v_k\|_D \leq c_2 \|\Delta v_k\|_D = c_2 |||v_k|||$$

следует сходимость последовательности $\frac{\partial v_k(x)}{\partial n}$ в $L_2(S_2)$ и в S_2 ; пределом этой последовательности является функция $f_2(x)$. Функция $\Delta v_0(x)$ является гармонической, как предел в $L_2(D)$ гармонических функций $\Delta v_k(x)$, при этом для $v_0(x)$ выполняются требуемые граничные условия [1]. Иными словами, $v_0(x) \in B$. Замкнутость доказана.

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1., стр. 4, 119991, Москва; главный науч. сотр., e-mail: morozov@srcc.msu.ru

² Кубанский государственный университет, факультет математики и компьютерных наук, ул. Ставропольская, д. 149, 350040, г. Краснодар; В. Г. Лежнев, профессор, e-mail: lzhnvv@mail.ru; Н. М. Токарев, преподаватель, e-mail: nikitatok@gmail.com

Рассмотрим вариационную задачу V : найти

$$\mu = \inf_B |||u(x)|||$$

и минимизирующую функцию $u_0(x) \in \dot{H}^2(D)$.

Решение $u_0(x)$ определяет расстояние от множества B до нуля и существует вследствие замкнутости B . Это решение единственно ввиду строгой выпуклости шара $\{|||v(x)||| \leq \mu\}$ в гильбертовом пространстве $\dot{H}^2(D)$.

Через $E(x) = -(2\pi)^{-1} \ln |x|$ обозначим фундаментальное решение уравнения Лапласа в R^2 . Для функции $u_0(x)$ справедливо равенство [1]

$$\alpha u_0(x) = \iint_D g_0(y)E(x-y)dy - \int_{S_1} q_0(y)E(x-y)dS_y - \int_{S_2} f_2(y)E(x-y)dS_y,$$

где $g_0 = \Delta u_0$, $q_0 = \frac{\partial u_0}{\partial n}$ на S_1 , $\alpha = 1$ при $x \in D$ и $\alpha = 0$ при $x \in S$.

3. Вариационная задача W. Рассмотрим функционал

$$\Phi(g, q) = \left\| \iint_D g(y)E(x-y)dy - \int_{S_1} q(y)E(x-y)dS_y - F_2(x) \right\|_S^2, \quad F_2(x) = \int_{S_2} f_2(y)E(x-y)dS_y$$

на подпространствах $G(D)$ и $L_2(S_1)$ гармонических функций $g(y)$:

$$g(y) \in G(D) \subset L_2(D), \quad g(y) \in L_2(S_1).$$

Задача W : найти

$$\gamma = \inf_{g, q} \Phi(g, q)$$

и минимизирующие функции $g_1 \in G(D)$ и $q_1 \in L_2(S_1)$.

Из предыдущего следует, что $\gamma = 0$ и инфимум достигается, в частности, при $g = g_0$ и $q = q_0$; решение задачи W существует.

Покажем, что функционал $\Phi(g, q)$ строго выпуклый и решение задачи W единственно.

Достаточно доказать строгую выпуклость функционала

$$\Psi(g) = \left\| \iint_D g(y)E(x-y)dy \right\|_S^2, \quad g \in G(D).$$

Пусть $g_1 \neq g_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{g_1 + g_2}{2}\right) &\leq \frac{1}{4} \left(\left\| \iint_D g_1(y)E(x-y)dy \right\|_S + \left\| \iint_D g_2(y)E(x-y)dy \right\|_S \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left(\Psi(g_1) + \Psi(g_2) + 2 \left\| \iint_D g_1(y)E(x-y)dy \right\|_S \left\| \iint_D g_2(y)E(x-y)dy \right\|_S \right). \end{aligned}$$

Так как $g_1 \neq g_2$, то

$$\iint_D g_1(y)E(x-y)dy \neq \iint_D g_2(y)E(x-y)dy, \quad x \in S,$$

поскольку иначе получили бы следующее противоречие: $g_1 - g_2 \perp G(D)$. Следовательно, приходим к неравенству

$$2 \left\| \iint_D g_1(y)E(x-y)dy \right\|_S \left\| \iint_D g_2(y)E(x-y)dy \right\|_S < \Psi(g_1) + \Psi(g_2),$$

как это имеет место для числовых неравенств $2|ab| < a^2 + b^2$, если $a \neq b$.

Иными словами, функционалы Ψ и Φ строго выпуклые; решение задачи W единственно и совпадает с g_0 и q_0 .

Покажем теперь, что бигармоническая функция

$$u_1(x) = \iint_D g_1(y)E(x-y)dy - \int_{S_1} q_1(y)E(x-y)dS_y - F_2(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (1)$$

принадлежит множеству B .

Так как $\Delta u_1 = g_1$, $u_1(x)|_S = 0$, как решение задачи W, то, используя вновь общее интегральное представление функции [1], получим

$$u_1(x) = \iint_D g_1(y)E(x-y)dy - \int_S \frac{\partial u_1(x)}{\partial n(y)} E(x-y)dS_y, \quad x \in D. \quad (2)$$

Вычитая (1) и (2), имеем

$$\int_S \frac{\partial u_1(x)}{\partial n(y)} E(x-y)dS_y - \int_{S_1} q_1(y)E(x-y)dS_y - \int_{S_2} f_2(y)E(x-y)dS_y = 0, \quad x \in S.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial n(y)} = \begin{cases} q_1(x), & x \in S_1, \\ f_2(x), & x \in S_2, \end{cases}$$

иначе функция, равная разности функций, стоящих слева и справа в последнем равенстве, была бы плотностью потенциала Робена, равного нулю на S , что противоречит предположению. Иными словами, $u_1 \in B$, а задачи V и W эквивалентны, если потенциал Робена на S не равен нулю.

4. Алгоритм решения задачи. Рассмотрим алгоритм решения задачи W, используя полные линейно независимые системы функций в подпространствах $G(D)$ и $L_2(S_1)$.

Пусть последовательность точек $z^m \in D^+ = R^2 \setminus \bar{D}$, $m = 1, 2, \dots$, ограничена, отдалена от границы и удовлетворяет условию единственности гармонических функций [2].

Последовательности функций

$$\gamma_m(x) = E(z^m - x), \quad x \in D, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_m(x) = E(z^m - x), \quad x \in S_1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

линейно независимы и полны в $G(D)$ и $L_2(S_1)$ [2].

Через $\{\gamma_m\}_1^N$ и $\{\alpha_m\}_1^N$ обозначим N -мерные подпространства, порожденные указанными функциями. Пусть g^N и q^N — проекции g и q на эти подпространства:

$$g^N = \sum_1^N c_m \gamma_m(x), \quad q^N = \sum_1^N b_m \alpha_m(x).$$

Рассмотрим аппроксимирующий функционал

$$\Phi_N(g^N, q^N) = \int_S \left[\iint_D g^N(y)E(x-y)dy - \int_{S_1} q^N(y)E(x-y)dS_y - F_2(x) \right]^2 dS_x,$$

строго выпуклый на $\{\gamma_m\}_1^N \cap \{\alpha_m\}_1^N$.

Функционал Φ_N — это квадратичная функция $2N$ переменных $c = (c_1, \dots, c_N)$ и $b = (b_1, \dots, b_N)$. Необходимые условия экстремума приводят к линейной системе $2N$ уравнений относительно коэффициентов $c_1, \dots, c_N, b_1, \dots, b_N$, невырожденной вследствие единственности ее решения.

Для сложных границ с внутренними лакунами могут потребоваться методы регуляризации [3]. Отметим, что для стандартной краевой задачи бигармонического уравнения в работе [4] излагается проекционный метод базисных потенциалов, удобный для областей со сложными границами в R^2 и R^3 .

Замечание 1. Рассмотренная задача может быть использована в проблеме обтекания профиля для построения отрывного течения с вихревой зоной и минимальной завихренностью.

Замечание 2. Задача может быть рассмотрена в трехмерном случае $D \subset R^3$ (все построения полностью переносятся) как вариационная задача теории упругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
2. Лежнев А.В., Лежнев В.Г. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2009.
3. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: МГУ, 1987.
4. Лежнев В.Г., Марковский А.Н. Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вестник Самарского гос. ун-та. Самара: СамГУ. 2008. 127–139.

Поступила в редакцию
27.08.2012
