УДК 519.6

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННОЙ СЕТКЕ

А. В. Друца[1]

Рассматривается система уравнений динамики мелкой воды с нелинейными членами. Предлагается конечно-разностная аппроксимация этих уравнений на неструктурированной сетке, и строится смешанная разнесенная конечно-разностная схема. Проводится сравнение результатов решения нелинейной задачи с линейным случаем, а также исследуется влияние “плохих” элементов сетки на результаты расчетов. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11–01–00767-а).

Ключевые слова: уравнения динамики мелкой воды, нелинейные уравнения динамики приливов, конечно-разностная схема на неструктурированной сетке.

1. Введение. В настоящей статье рассматривается система уравнений динамики мелкой воды с нелинейными членами. Такая система уравнений позволяет моделировать динамику жидкости в случае, когда горизонтальный масштаб области много больше вертикального. Особый интерес представляет численное решение данной задачи на неструктурированной сетке, поскольку областями, на которых требуется решить поставленную задачу, являются акватории морей и океанов с большим количеством островов. Линеаризованная система уравнений рассматривалась в работах [1–4]. В данной работе рассматривается конечно-разностная аппроксимация указанных уравнений и строится смешанная разнесенная конечно-разностная схема. Проводится сравнение результатов решения нелинейной задачи с линейным случаем, а также исследуется влияние “плохих” элементов сетки на результаты расчетов.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать систему уравнений мелкой воды на плоскости с нелинейными членами [4–6]:

$$\boldsymbol{u}_t = g\nabla\zeta - R\boldsymbol{u} - l\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u},\nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \tag{2.1}$$

$$\zeta_t = \operatorname{div} H\boldsymbol{u}, \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{u} = (u, v)$ — вектор скоростей; ζ — высота приливной волны; $\boldsymbol{k}$ — единичный вектор вдоль оси Oz; R, l, g — константы; $H(x, y)$ — глубина, являющаяся функцией координат. Уравнения рассматриваются в ограниченной области Ω с границей $\partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2$. Граничные условия записываются в виде условий непротекания и фиксированной высоты волны:

$$\boldsymbol{u}\cdot n\big|_{\partial\Omega_1} \equiv un_1 + vn_2\big|_{\partial\Omega_1} = 0, \tag{2.3}$$

$$\zeta\big|_{\partial\Omega_2} = 0. \tag{2.4}$$

Начальные условия запишем в виде

$$\boldsymbol{u}(x, y, 0) = \boldsymbol{u}_0(x, y), \quad \zeta(x, y, 0) = \zeta_0(x, y), \tag{2.5}$$

где $\zeta_0(x, y)$ — некоторое начальное распределение уровня жидкости, а $\boldsymbol{u}_0(x, y)$ — начальное векторное поле скоростей жидкостей. Задача состоит в аппроксимации системы уравнений (2.1)–(2.5).

3. Сетка на области. Разобьем область Ω на остроугольные треугольники (ячейки). Полученную область обозначим Ω^h. Центром ячейки назовем центр описанной окружности треугольника. В остроугольном треугольнике центр ячейки находится внутри ячейки. При наличии тупоугольных и прямоугольных треугольников определение центра ячейки и аппроксимации будет обсуждаться ниже. Соединим центры соседних ячеек прямыми (если оба из смежных треугольников остроугольные, то прямая, соединяющая их центры, — срединный перпендикуляр к их общей стороне). Пересечение прямой, соединяющей центры,

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; ассистент, e-mail: dav-school@yandex.ru

с общей стороной двух ячеек назовем потоковым узлом. Если у треугольника отсутствует смежный треугольник, то в качестве потокового узла возьмем центр стороны. Таким образом, у каждой ячейки есть ровно три потоковых узла, а каждый потоковый узел граничит с одной или двумя ячейками.

Введем две нумерации центров ячеек и потоковых узлов: $k = \overline{1, K}$ и $i = \overline{1, N}$, где K — общее количество ячеек, N — общее количество потоковых узлов. Пусть O^k — центр ячейки с номером k и X_i — потоковый узел с номером i. Рассмотрим ячейку k; пусть ее потоковые узлы имеют номера i_1, i_2 и i_3. Для удобства работы мы будем использовать двойной верхний индекс k, α для обозначения элементов, связанных с узлом X_{i_α}. Например, потоковый узел ячейки с номером k может быть обозначен как через $X^{k,\alpha}$, так и через X_i. Кроме того, верхний двойной индекс будем использовать для обозначения центра соседней ячейки. Таким образом, элементы, связанные с потоковым узлом, можно обозначать как индексом потокового узла, так и двойным верхним индексом. Аналогично введем нижние двойные индексы $O_{i,1}$ и $O_{i,2}$, которые будут обозначать центры соседних ячеек, содержащих узел X_i.

Теперь рассмотрим подробнее элементы ячейки с номером k. Площадь ячейки обозначим через S^k. Стороны треугольника обозначим буквой L, а их длины буквой l, т.е. $l^{k,\alpha}$ — длина стороны, содержащей потоковый узел $X^{k,\alpha}$, где $\alpha = 1, 2, 3$. Отрезок, соединяющий центры двух соседних ячеек O^k и $O^{k,\alpha}$, обозначим через $D^{k,\alpha}$, а его длину через $d^{k,\alpha}$. Площадь четырехугольника с диагоналями $L^{k,\alpha}$ и $D^{k,\alpha}$ обозначим через $S^{k,\alpha}$. Заметим, что введенные выше элементы также обозначаются одним нижним индексом потокового узла: L_i, D_i, l_i, d_i и S_i. Точка $X^{k,\alpha}$ делит отрезок $D^{k,\alpha}$ на две части; часть, которая содержит O^k, обозначим нижнем индексом $+$, а оставшуюся — нижним индексом $-$: $d_+^{k,\alpha}$ и $d_-^{k,\alpha}$. Площади треугольников со стороной $L^{k,\alpha}$ и вершинами O^k и $O^{k,\alpha}$ обозначим через $S_+^{k,\alpha}$ и $S_-^{k,\alpha}$. В граничных узлах выполнено $S_+^{k,\alpha} = S^{k,\alpha}$ и $S_-^{k,\alpha} = 0$.

Множество центров ячеек обозначим через $\mathbb{O}^h$, а множество потоковых узлов — $\mathbb{X}^h$.

4. Аппроксимация операторов. На рассмотренной неструктурированной сетке мы будем строить разнесенную конечно-разностную аппроксимацию Фрязинова [7]. Скорость потока $\boldsymbol{u}$ будем задавать в центрах ячеек, а высоту волны ζ — в потоковых узлах X_i.

Градиент высоты волны мы будем аппроксимировать в центрах ячеек O^k:

$$\nabla\zeta\big|_{O^k} \sim \nabla^h\zeta\big|_{O^k} = \frac{1}{S^k}\sum_{\alpha=1}^{3} l^{k,\alpha}\zeta^{k,\alpha}\boldsymbol{n}^{k,\alpha}, \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{n}^{k,\alpha}$ — внешняя нормаль треугольника O^k к стороне $L^{k,\alpha}$. Нелинейный член имеет вид

$$(\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u}\big|_{O^k} = N(\boldsymbol{u})\big|_{O^k} \sim N^h(\boldsymbol{u})\big|_{O^k} = \frac{1}{S^k}\sum_{\alpha=1}^{3} l^{k,\alpha}\big\langle \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}^{k,\alpha}\big\rangle^{k,\alpha}\,\frac{\boldsymbol{u}^{k,\alpha}+\boldsymbol{u}^k}{2}, \tag{4.2}$$

где $\big\langle \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}^{k,\alpha}\big\rangle^{k,\alpha}$ — линейная интерполяция нормальных к $L^{k,\alpha}$ компонент скорости $\boldsymbol{u}$ в точку $X^{k,\alpha}$, т.е. $\big\langle \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}^{k,\alpha}\big\rangle^{k,\alpha} = \dfrac{\boldsymbol{u}^{k,\alpha}\boldsymbol{n}^{k,\alpha}d_+^{k,\alpha} + \boldsymbol{u}^k\boldsymbol{n}^{k,\alpha}d_-^{k,\alpha}}{d^{k,\alpha}}$. Дивергенцию скорости в уравнении неразрывности (2.2) аппроксимируем в потоковых узлах X_i, $i = \overline{1, N}$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}\big|_{X_i} \sim \operatorname{div}^h\boldsymbol{u}\big|_{X_i} = \frac{l_i}{S_i}\left(-\boldsymbol{u}_{i,1}\boldsymbol{n}_{i,1} - \boldsymbol{u}_{i,2}\boldsymbol{n}_{i,2}\right), \tag{4.3}$$

где $\boldsymbol{u}_{i,j}\boldsymbol{n}_{i,j}$, $j = 1, 2,$ — нормальные компоненты скоростей, заданные в двух ячейках, имеющих общий потоковый узел X_i. Если потоковый узел X_i находится на границе области, то соответствующая компонента в операторе отсутствует. Введенные выше операторы градиента и дивергенции сопряжены [7], т.е. $\big(\boldsymbol{u}_h, \nabla^h\zeta_h\big)_1 = -\big(\operatorname{div}^h\boldsymbol{u}_h, \zeta_h\big)_2$, где скалярные произведения определены по формулам

$$(f, g)_1 = \sum_{k=1}^{K} f\big(O^k\big)\cdot g\big(O^k\big)\cdot S^k, \quad (f, g)_2 = \sum_{i=1}^{N} f(X_i)\cdot g(X_i)\cdot S_i.$$

5. Сеточная задача. Для задачи (2.1)—(2.5) введем дискретизацию по времени с шагом τ, $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Скорости и высоту волны на верхнем слое будем обозначать крышкой: $\widehat{\boldsymbol{u}}$, $\widehat{\zeta}$. Запишем неявную, за исключением нелинейного слагаемого, разностную схему для задачи (2.1)–(2.5), используя (4.1)–(4.3). В нелинейном слагаемом (4.2) на верхнем слое будем брать первый множитель, а на нижнем

слое — последний множитель, который является средним арифметическим значений компонент скорости. Итак,

$$\frac{\widehat{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u}}{\tau} = l\boldsymbol{k}\times\widehat{\boldsymbol{u}}^{\,k} - R\widehat{\boldsymbol{u}}^{\,k} + f^k + \frac{g}{S^k}\sum_{\alpha=1}^{3} l^{k,\alpha}\widehat{\zeta}^{\,k,\alpha}\boldsymbol{n}^{k,\alpha} - \\ - \frac{1}{S^k}\sum_{\alpha=1}^{3} l^{k,\alpha}\,\frac{\widehat{\boldsymbol{u}}^{\,k,\alpha}\boldsymbol{n}^{k,\alpha}d_+^{k,\alpha} + \widehat{\boldsymbol{u}}^{\,k}\boldsymbol{n}^{k,\alpha}d_-^{k,\alpha}}{d^{k,\alpha}}\,\frac{\boldsymbol{u}^{k,\alpha}+\boldsymbol{u}^k}{2}\,, \tag{5.1}$$

$$\frac{\widehat{\zeta}_i-\zeta_i}{\tau} = \frac{l_i}{S_i}\left(-\widehat{\boldsymbol{u}}_{i,1}\boldsymbol{n}_{i,1} - \widehat{\boldsymbol{u}}_{i,2}\boldsymbol{n}_{i,2}\right). \tag{5.2}$$

Уравнения (5.1) и (5.2) являются системой линейных алгебраических уравнений размерности $2K+N$ относительно неизвестных $\widehat{\boldsymbol{u}}$ и $\widehat{\zeta}$. При достаточно малом τ система имеет диагональное преобладание. Для решения полученной системы мы будем использовать метод бисопряженных градиентов (BiCGStab).

6. Особенности сетки. Рассмотрим случай, когда в сетке присутствует некоторое количество тупоугольных или прямоугольных треугольников. Центр описанной окружности тупоугольного треугольника лежит вне ячейки, следовательно, аппроксимация потока и скорости будет некорректна. Для решения данной проблемы рассмотрим два подхода. Первый подход заключается в том, что мы формально записываем аппроксимации операторов для тупоугольных и прямоугольных треугольников в центрах описанных окружностей несмотря на тот факт, что центры лежат вне или на границе ячейки. Если центры соседних ячеек совпали (например, два прямоугольных треугольника, граничащие через гипотенузы), то выражения (4.2) и (4.3) не корректны, поскольку в них мы будем делить на ноль. Чтобы этого не происходило, можно немного модифицировать сетку. Были проведены эксперименты, которые показали, что данный подход применим в том случае, если “плохих” треугольников примерно 1–2% от общего числа треугольников.

Второй подход состоит в том, что мы в качестве центра ячейки для “плохих” треугольников возьмем центр пересечения медиан, который всегда находится внутри ячейки. Тогда для таких ячеек отрезок $D^{k,\alpha}$ не будет срединным перпендикуляром к стороне. Аппроксимацию потока мы будем выполнять вдоль перпендикуляра к стороне $L^{k,\alpha}$, т.е. проецировать компоненты скоростей в (4.2) и (4.3) мы будем на нормали, а не на отрезок, соединяющий центры. Поведение ошибки при расчетах в данном случае обсуждалось в работе [7].

Были проведены эксперименты (см. следующий раздел), в которых использовался смешанных подход: для прямоугольных треугольников, у которых “сосед” по гипотенузе являлся остроугольным, в качестве центра был взят центр описанной окружности, в остальных “плохих” случаях — центр масс. Эксперименты показали, что результаты расчетов не меняются при наличии до 10–15% тупоугольных треугольников в сетке.

7. Результаты численных экспериментов.

7.1. Влияние нелинейности. Проведена серия экспериментов на области $\Omega = [-10,10]\times[-10,10]$. Начальные значения скорости и высоты волны выбраны следующим образом: $u_0(x,y)=0,\ v_0(x,y)=0,$ $\zeta_0(x,y) = 1.5e^{-0.1(x^2+y^2)}$.

На границе ставилось условие неразрывности. Неструктурированная сетка построена генератором `gmsh` (авторы Christophe Geuzaine и Jean-François Remacle, http://geuz.org/gmsh/). Количество треугольников — 2440, количество потоковых узлов — 3716. Параметры и шаг по времени были взяты следующим образом: $R = \dfrac{1}{100}$, $l=1,\ T=10.0,\ \tau=0.01,\ H\equiv 1$. Количество шагов по времени — 1000.

Перед нелинейным слагаемым в (5.1) допишем коэффициент γ. При $\gamma=0$ мы имеем линейную задачу, при $\gamma=1$ — задачу (2.1)–(2.2). Объем жидкости в момент времени t вычисляем по формуле

$$F(t) = \int\limits_{\Omega}\zeta(x,y,t)\,dx = \sum_{i=1}^{N} S_i\zeta_i(t). \tag{7.1}$$

Поскольку количество жидкости с течением времени не должно меняться из-за условия непротекания на границе, то в качестве критерия проверки правильности расчетов был взят критерий $F(\tau j) = F(0)$, $j = 1,2,3,\ldots,$. Для всех расчетов в данном эксперименте отклонение $F(t)$ не превосходило 10^{-7}.

На рис. 1 показаны графики поверхности высоты волны $\zeta(x,y,t)$ в моменты времени $t=0$, $t=5$, $t=7.5$, $t=10$. На рис. 2 показаны профили высоты волны вдоль оси $y=0$ в момент $t=8.2$ на отрезке $[-5,5]$: $\zeta(x,0,t)$, $x\in[-5,5]$ при $\gamma=0$ и $\gamma=1$.

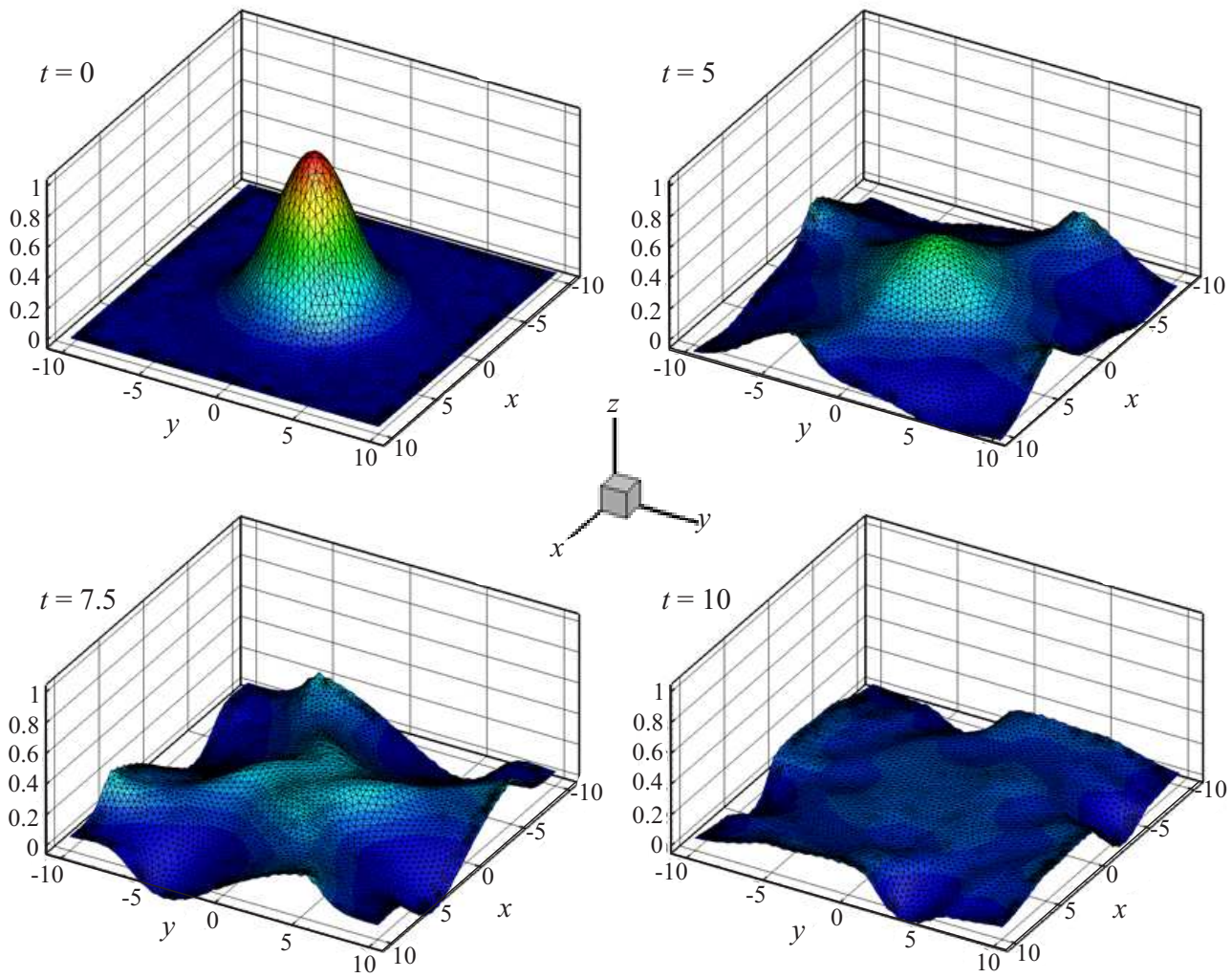

Рис. 1. График $\zeta(x, y, t)$ решения нелинейного уравнения ($\gamma = 1$) в моменты времени $t = 0, 5, 7.5, 10$

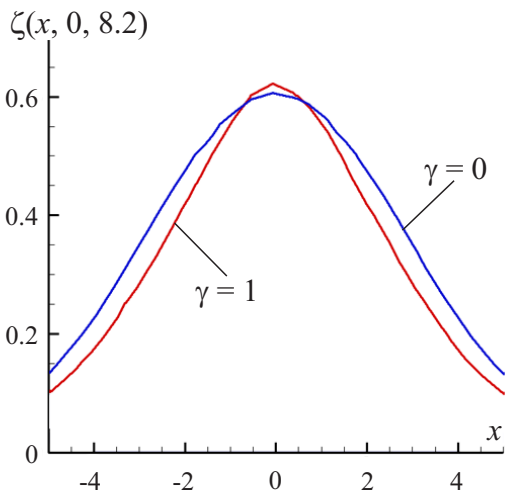

Рис. 2. График $\zeta(x, 0, 8.2)$ на отрезке $x \in [-5, 5]$. Синим обозначен контур поверхности высоты волны для линейного уравнения ($\gamma = 0$), а красным — для нелинейного ($\gamma = 1$)

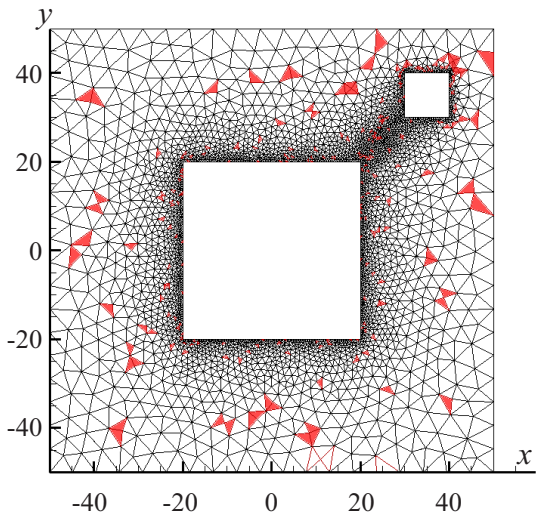

Рис. 3. Сетка для области. Красным отмечены тупоугольные треугольники

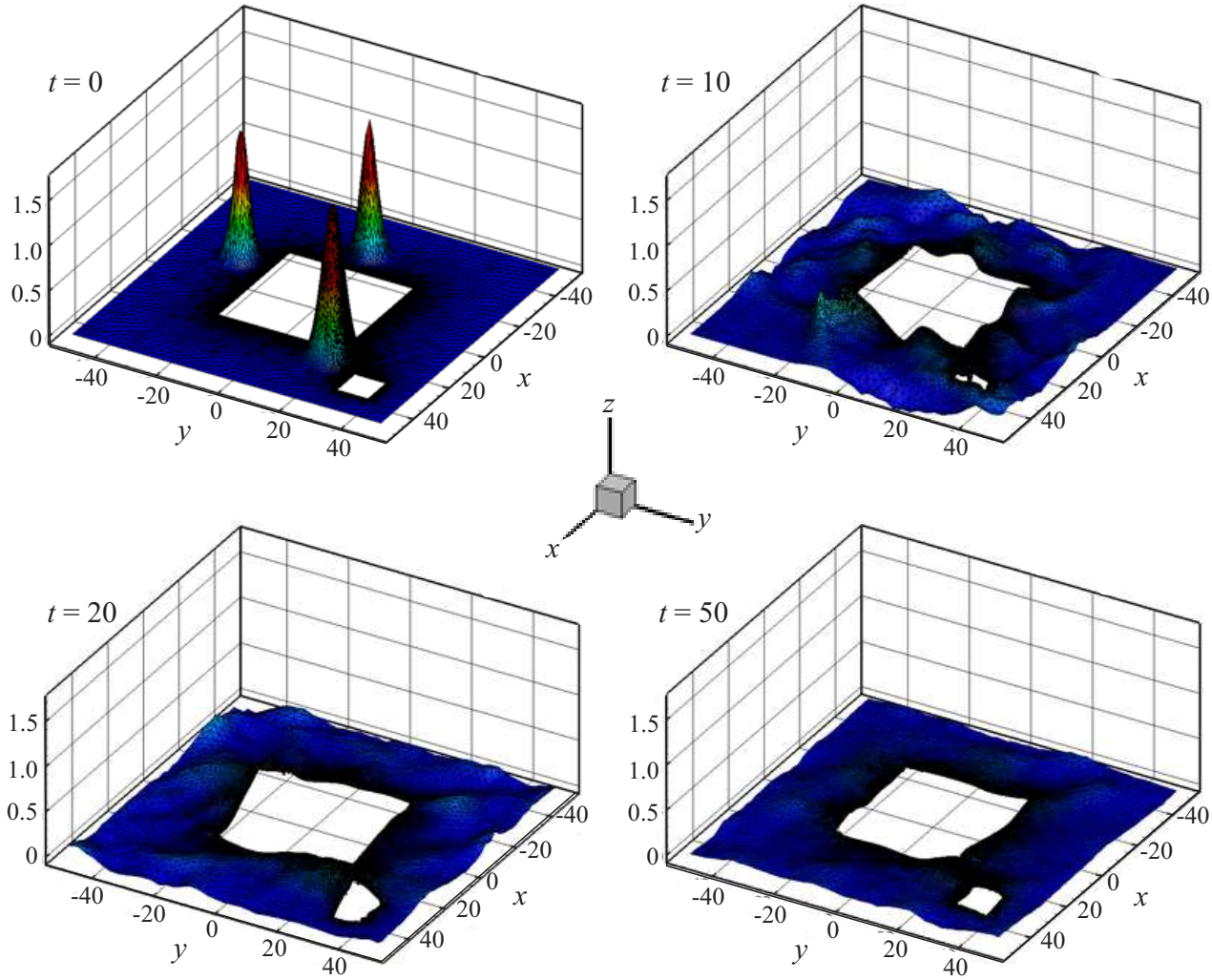

Рис. 4. График $\zeta(x, y, t)$ решения нелинейного уравнения в моменты времени $t = 0, 10, 20, 50$

7.2. Тупоугольные треугольники. На области $\Omega = [-10, 10] \times [-10, 10]$ были построены две сетки:

— сетка 1: количество треугольников — 3506, количество потоковых узлов — 5337, количество тупоугольных и прямоугольных треугольников — 79, процент "плохих" треугольников — 2,3%;

— сетка 2: количество треугольников — 2440, количество потоковых узлов — 3716, количество тупоугольных и прямоугольных треугольников — 336, процент "плохих" треугольников — 13,8%.

Для расчетов выбраны начальные условия $u_0(x, y) = 0,\ v_0(x, y) = 0,\ \zeta_0(x, y) = 10e^{-0.1(x^2+y^2)}$. Параметры и шаг по времени взяты следующим образом: $R = \dfrac{1}{100}$, $l = 1,\ T = 20.0,\ \tau = 0.01,\ H \equiv 1$.

Были реализованы оба подхода преодоления трудностей, связанных с проблемой "плохих" треугольников и описанных в разделе 6. Для оценки качества полученных результатов использовалась функция (7.1) — количество жидкости в системе. Для "хорошей" сетки 1 оба подхода показали одинаковые результаты, т.е. $\left|F(t) - F(0)\right| < 10^{-6}$, $t = 0, \ldots, 20$.

Для второй сетки, у которой соотношение тупоугольных и остроугольных треугольников превышает 10 процентов, результаты, полученные с помощью двух подходов, оказались разными. В случае когда центр описанной окружности для тупоугольного треугольника заменялся центром масс, решение ведет себя точно так же, как и для сетки 1, т.е. $\left|F(t) - F(0)\right| < 10^{-6}$, $t = 0, \ldots, 20$. Однако результаты первого подхода, в котором мы формально записывали аппроксимацию для всех ячеек одинаково, оказались непригодными: уже после 60 шагов ($t \approx 0.6$) мы получили $\left|F(0.6) - F(0)\right| > 10^8$.

7.3. Многосвязная область. Область

$$\Omega = \big([-50, 50] \times [-50, 50]\big) \backslash \big([-20, 20] \times [-20, 20]\big) \backslash \big([30, 40] \times [30, 40]\big)$$

является квадратом с двумя дырками. Начальные значения скорости и высоты волны были выбраны следующим образом: $u_0(x,y) = 0,\ v_0(x,y) = 0,\ \zeta_0(x,y) = 1.5e^{-0.1((x+30)^2+y^2)} + 1.5e^{-0.1((x+10)^2+(y+30)^2)} + 1.7e^{-0.05((x-25)^2+(y-20)^2)}$.

На границе ставилось условие неразрывности. Неструктурированная сетка построена генератором `gmsh`. Количество треугольников — 6533, количество потоковых узлов — 10035, количество "плохих" треугольников — 267 (4%). Сетка с отмеченными тупоугольными треугольниками изображена на рис. 3. Параметры и шаг по времени были взяты следующим образом: $R = \dfrac{1}{100}$, $l = 0.4$, $T = 50.0$, $\tau = 0.04$, $H \equiv 1$.

Время решения задачи — 688 секунд на процессоре Intel Core i7 930, 2.80 GHz. На рис. 4 показаны графики поверхности высоты волны $\zeta(x,y,t)$ в моменты времени $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$, $t = 50$.

Выводы. В настоящей статье получены следующие результаты:

— построена разностная схема для нелинейной задачи динамики мелкой воды на неструктурированной сетке;

— проведены численные эксперименты, в которых сравнивалось поведение поверхности жидкости в линейном и нелинейном случаях, а также произведен расчет на сложной неструктурированной сетке, в которой размеры ячеек отличаются в несколько раз;

— предложены два подхода к решению проблемы, связанной с наличием тупоугольных треугольников в сетке; проведенные численные эксперименты показали, что при использовании этих подходов наличие небольшого количества тупоугольных треугольников в сетке не влияет на конечный результат.

Автор глубоко признателен В. Б. Залесному за постановку задачи, а также Г. М. Кобелькову, И. В. Попову и И. В. Фрязинову за консультации и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogachev K.Yu., Kobelkov G.M.* Numerical solution of a tidal wave problem // Parallel Computational Fluid Dynamics. 2004. **2**. 163–173.
2. *Арушанян И.О., Друца А.В., Кобельков Г.М.* Метод конечных разностей для решения системы уравнений динамики приливов // Дифференциальные уравнения. 2009. **45**, № 7. 965–972.
3. *Kobelkov G.M., Drutsa A.V.* Finite difference approximation of tidal wave equations on unstructured grid in spherical coordinates // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2010. **25**, N 6. 535–544.
4. *Agoshkov V.I., Botvinovsky E.A.* Numerical solution of a hyperbolic-parabolic system by splitting methods and optimal control approaches // Comp. Methods in Appl. Mathematics. 2007. **7**, N 3. 193–207.
5. *Zalesny V.B.* Mathematical model of sea dynamics in a σ-coordinate system // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2005. **20**, N 1. 97–113.
6. *Марчук Г.И., Каган Б.А.* Океанские приливы. Л.: Гидрометеоиздат, 1977.
7. *Popov I.V., Fryazinov I.V., Stanichenko M.Yu., Taimanov A.V.* Construction of a difference scheme for Navier–Stokes equations on unstructured grids // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. **23**, N 5. 487–503.

Поступила в редакцию
15.09.2012