

УДК 519.24, 519.63

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БАКЛИ–ЛЕВЕРЕТТА СО СЛУЧАЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОРИСТОСТИ

А. В. Исаева<sup>1</sup>, М. Л. Сердобольская<sup>1</sup>

Рассмотрено уравнение Бакли–Левретта со случайным коэффициентом пористости. Для анализа уравнения использована комбинация аналитического (метод характеристик) и численного (ориентированные против потока и гибридные разностные схемы) подходов. Получено явное выражение для стохастических характеристик уравнения, построены оценки ряда важных параметров задачи. Аналитические оценки сопоставлены с результатами численных расчетов.

**Ключевые слова:** уравнение Бакли–Левретта, геостатистика, гибридные разностные схемы.

**Введение.** Классическая модель течения в пористой среде двух несжимаемых жидкостей приводит к уравнению Бакли–Левретта [1, 2]. В одномерном случае это уравнение может быть записано в виде

$$\varphi \partial_t s = -U \partial_x F(s), \tag{1}$$

где  $\varphi$  — коэффициент пористости среды;  $s=s(t, x)$  — искомая насыщенность порового объема “более смачивающей” жидкостью;  $U$  — суммарный объемный поток двух жидкостей;  $F(\cdot)$  — функция Бакли–Левретта, значение  $F(s)$  которой равно объемной доле “более смачивающей” жидкости в суммарном потоке  $U$  [1, 2]. Заметим, что принято различать жидкости, “более смачивающие” и “менее смачивающие” скелет пористой среды; например, в системе вода/нефть “более смачивающей”, как правило, будет вода, а “менее смачивающей” — нефть.

Уравнение (1) дополняют начальным и граничным условиями

$$s(t, x)|_{t=\mathcal{T}_1} = s_0(x), \quad x \in [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2], \quad s(t, x)|_{x=\mathcal{A}_1} = \mathfrak{s}(t), \quad t \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]. \tag{2}$$

Решение  $s(\cdot)$  начально-краевой задачи (1), (2) ищут в прямоугольной области  $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \times [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]$ , при этом  $\varphi(\cdot)$  и  $U(\cdot)$  считают известными функциями координаты и времени соответственно.

Характеристики нелинейного гиперболического уравнения (1) могут пересекаться [1]. Это свидетельствует о наличии разрывных решений задачи (1), (2) [1, 3, 4]. На сегодняшний день хорошо изучены некоторые разрывные решения (демонстрирующие скачки насыщенности) задачи (1), (2), получено явное выражение характеристик уравнения (1) в случае постоянного коэффициента пористости [1, 2, 5]. В то же время интерес представляет влияние неоднородности и случайности свойств пористой среды на поведение решений задачи (1), (2). Известны численные подходы к изучению данной проблемы [6, 7]. В настоящей статье мы воспользуемся комбинацией аналитического и численного подходов для анализа уравнения (1) со стохастическим параметром — коэффициентом пористости  $\varphi$ .

**1. Характеристики уравнения Бакли–Левретта со случайным коэффициентом пористости.** Нас будет интересовать решение уравнения (1) в случае, когда коэффициент пористости является случайной функцией координаты:  $\varphi=\varphi(\cdot) : [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] \times \Omega \rightarrow [0, 1]$ , где  $\Omega$  — пространство элементарных событий, на  $\sigma$ -алгебре которого задана вероятностная мера. Далее мы будем считать, что все реализации случайной функции  $\varphi(\cdot)$  являются непрерывными функциями координаты.

Воспользуемся методом характеристик для исследования уравнения (1). Заметим, что традиционно характеристики уравнения (1) строят в виде функций  $\tilde{x}(\cdot)$ , заданных на  $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ , что для случая постоянного коэффициента пористости приводит к простому выражению для таких характеристик [1]. В нашей задаче мы будем искать  $\tilde{s}$ -параметрическое семейство функций  $\tilde{t}(\cdot)$ , заданных на отрезке  $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]$ , на которых насыщенность сохраняет постоянное значение:  $s(\tilde{t}(x), x) = \tilde{s}, x \in [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]$ . Запишем выражение

$$0 = ds = (\partial_t s dt + \partial_x s dx)|_{t=\tilde{t}(x)} = \left( \frac{d\tilde{t}}{dx} - \frac{\varphi}{UF'} \right) \partial_t s dx,$$

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, ГСП-2, 119991, Москва; А. В. Исаева, аспирант, e-mail: avisaeva@gmail.com; М. Л. Сердобольская, доцент, e-mail: serdobolskaya@physics.msu.ru

в котором мы воспользовались уравнением (1). Тогда в случае постоянного значения суммарного объемного потока  $U$  явное выражение для характеристики  $\tilde{t}(\cdot)$  получаем в виде

$$\tilde{t}(x; \tilde{s}) = t_0(\tilde{s}) + \frac{1}{UF'(\tilde{s})} \int_{\mathcal{A}_1}^x dy \varphi(y, \omega), \tag{3}$$

где  $t_0(\tilde{s})$  — момент времени, когда насыщенность примет значение  $\tilde{s}$  в точке  $\mathcal{A}_1$ ;  $F'(\cdot)$  — производная функции Бакли–Левретта;  $\omega \in \Omega$ . Из выражения (3) следует, что характеристики  $\tilde{t}(\cdot)$  являются случайными функциями, поскольку обусловлены значениями случайного коэффициента пористости. Кроме того, в зависимости от поведения  $F'(\cdot)$  возможно появление разрывных решений уравнения (1). Действительно, для заданных  $\tilde{s}_1 < \tilde{s}_2$  получим

$$\tilde{t}(x; \tilde{s}_1) - \tilde{t}(x; \tilde{s}_2) = t_0(\tilde{s}_1) - t_0(\tilde{s}_2) + \frac{F'(\tilde{s}_2) - F'(\tilde{s}_1)}{UF'(\tilde{s}_1)F'(\tilde{s}_2)} \int_{\mathcal{A}_1}^x dy \varphi(y, \omega).$$

Далее мы будем рассматривать процесс вытеснения “менее смачивающей” жидкости “более смачивающей”, поэтому в заданной точке  $x$  насыщенность последней со временем будет нарастать, откуда следует  $t_0(\tilde{s}_1) < t_0(\tilde{s}_2)$ . Тогда для  $F'(\tilde{s}_2) > F'(\tilde{s}_1)$  в некоторой точке характеристики  $\tilde{t}(\cdot; \tilde{s}_1)$  и  $\tilde{t}(\cdot; \tilde{s}_2)$  могут пересечься — здесь понятие классического решения задачи (1), (2) становится не пригодным и заменяется, например, понятием слабого решения для описания разрывных решений задачи [3, 5, 8].

Слабым решением задачи (1), (2) называют функцию  $s(\cdot) : [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \times [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] \rightarrow [0, 1]$ , гладкую в области определения за исключением, быть может, некоторой поверхности в пространстве  $(x, t)$ , на которой  $s(\cdot)$  имеет разрыв. При этом функция  $s(\cdot)$  удовлетворяет условиям (2), и для всякой непрерывной вместе со своими первыми производными, финитной на  $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \times [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]$  функции  $v(\cdot)$  справедливо

$$\int_{\mathcal{T}_1}^{\mathcal{T}_2} dt \int_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2} dx (\varphi s \partial_t v + UF(s) \partial_x v) + \int_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2} dx \varphi s(\mathcal{T}_1, x) v(\mathcal{T}_1, x) = 0.$$

В нашей задаче мы воспользуемся введенным понятием слабого решения и будем считать, что для любой реализации случайной функции  $\varphi(\cdot)$  нас интересует слабое решение задачи (1), (2). Таким образом, мы будем рассматривать как гладкие, так и разрывные решения.

Уравнение (1) выражает в дифференциальной форме закон сохранения объема текущей сквозь пористую среду “более смачивающей” жидкости [1]. В точке разрыва решения (скачка насыщенности) требование сохранения объема также должно выполняться. Из данного требования, в частности, можно получить условие, связывающее значения насыщенности  $s_+$  и  $s_-$  по разные стороны от скачка [1]. Это условие имеет вид

$$F'(s_+) = \frac{F(s_+) - F(s_-)}{s_+ - s_-}. \tag{4}$$

Условие (4) играет важную роль в построении решений уравнения Бакли–Левретта, к примеру, графическим методом [1], так как оно позволяет находить “амплитуду” изменения насыщенности в точке разрыва решения.

Неубывающая функция Бакли–Левретта и ее производная имеют типичный вид, показанный на рис. 1. Нетрудно заметить следующее.

1. В задаче вытеснения “менее смачивающей” жидкости “более смачивающей” скачки насыщенности будут образовываться в точках из, вообще говоря, непустого множества  $\{x \in [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] : s_0(x) < s^*\}$ , где  $s^*$  — точка максимума функции  $F'(\cdot)$  (рис. 1б).

2. Условие (4) имеет простой геометрический смысл: в точке  $(s_+, F(s_+))$  на плоскости переменных  $(s, F)$  прямая, выходящая из точки  $(s_-, F(s_-))$ , касается функции  $F(\cdot)$  (рис. 1а).

3. Для задачи, в которой начальное условие имеет вид  $s_0(\cdot) = s_- < s^*$ , соответствующая величина  $s_+$  будет лежать правее  $s^*$ . Действительно, условие (4) можно интерпретировать как требование равенства площадей криволинейной трапеции  $ABDE$  и прямоугольника  $ACDE$  на рис. 1б. Такое равенство, очевидно, может достигаться только для  $s_+ > s^*$ .

Явное выражение для характеристик (3) в сочетании с условием (4) позволяет строить сколь угодно

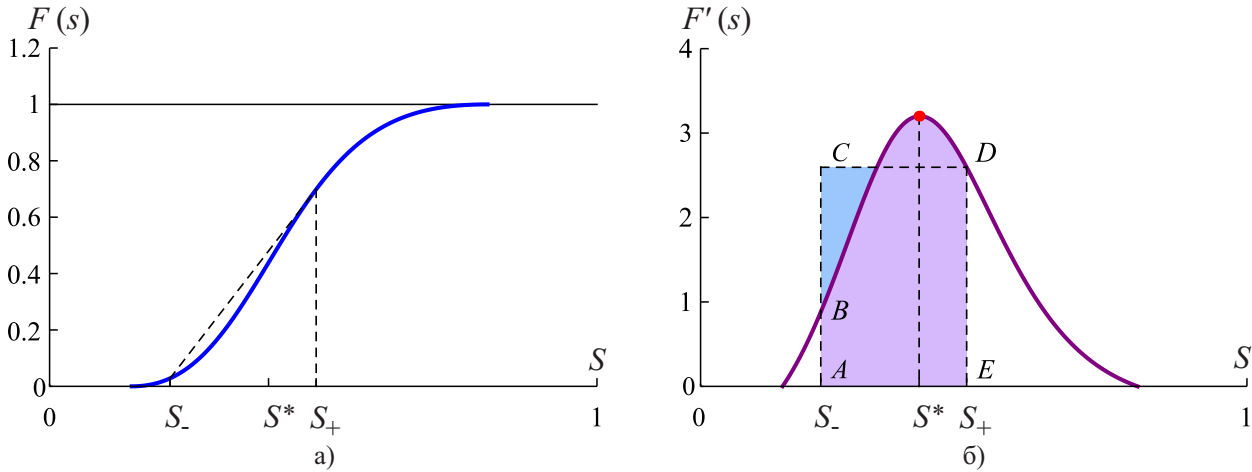


Рис. 1. Типичный вид функции Бакли–Леверетта и ее производной, геометрическая интерпретация условий на скачке насыщенности

точные решения задач (1), (2) со специальными начальными и граничными условиями

$$s_0(x) = s_-, \quad x \in [A_1, A_2], \quad s(t) = \begin{cases} s_+, & t = T_1, \\ s_+ + r(t), & t \in (T_1, T_2], \end{cases} \quad (5)$$

где  $r(\cdot)$  — некоторая неубывающая функция (обычно полагают, что  $r(\cdot)$  нарастает с течением времени до тех пор, пока насыщенность в точке  $x=A_1$  не увеличится до максимально допустимой) и  $r(T_1)=0$ . Последовательность действий при построении решения в этом случае включает в себя:

- 1) определение из условия (4) величины  $s_+$  по известному значению  $s_-$ ;
- 2) построение по формуле (3) характеристик  $\tilde{t}(x; \tilde{s}_i)$ ,  $x \in [A_1, A_2]$  для заданного набора значений  $\{\tilde{s}_i\}$ ,  $\tilde{s}_i > \tilde{s}_{i-1} \geq \tilde{s}_0 = s_+$ ,  $i=1, N_s$ ;
- 3) для фиксированного  $\tilde{t}$  нахождение точек  $x_i$ , таких, что  $\tilde{t}(x_i, \tilde{s}_i) = \tilde{t}$ .

Тогда, выбрав некоторое правило интерполяции между точками  $(x_i, \tilde{s}_i)$ , мы можем рассматривать получившийся интерполянт  $\hat{s}(\cdot)$  как приближенное решение задачи (1), (5), причем

$$\|s(\cdot; \tilde{t}) - \hat{s}(\cdot; \tilde{t})\| = \max_{x \in [A_1, A_2]} |s(x, \tilde{t}) - \hat{s}(x, \tilde{t})| = \max_{i=1, N_s} \max_{x \in [x_i, x_{i-1}]} |s(x, \tilde{t}) - \hat{s}(x, \tilde{t})| \leq \max_{i=1, N_s} |\tilde{s}_i - \tilde{s}_{i-1}|,$$

если интерполяция удовлетворяет условию  $\tilde{s}_i \geq \hat{s}(x) \geq \tilde{s}_{i-1}$  для  $x \in [x_i, x_{i-1}]$  (мы воспользовались соотношением  $x_i < x_{i-1}$  для  $\tilde{s}_i > \tilde{s}_{i-1}$ , которое справедливо, поскольку в рассматриваемых нами задачах вытеснения (1), (5) насыщенность является невозрастающей функцией координаты). Таким образом, точность приближения в равномерной метрике зависит только от выбора способа интерполяции и набора значений  $\{s_i\}$ .

С помощью явного вида стохастических характеристик (3) можно получить оценку ряда статистических параметров решений уравнения Бакли–Леверетта. Например, в задаче интерпретации результатов фильтрационных экспериментов на кернах важным показателем является время прорыва фронта вытеснения [1, 9], т.е. значение  $\tilde{t}(A_2, s_+)$ . Ввиду уникальности свойств всякого образца геологической породы серия экспериментов даст расхождение в оценке этой величины. Обусловленное такой “случайностью” свойств пористых образцов расхождение можно оценить с помощью (3) — нетрудно выразить математическое ожидание и дисперсию значения  $\tilde{t}(A_2, s_+)$ :

$$E \tilde{t}(A_2, s_+) = t_0(s_+) + \frac{1}{UF'(s_+)} \int_{A_1}^{A_2} dy E \varphi(y), \quad D \tilde{t}(A_2, s_+) = \frac{1}{U^2 F'(s_+)^2} \int_{A_1}^{A_2} dy \int_{A_1}^{A_2} dy' \text{cov}(\varphi(y), \varphi(y')). \quad (6)$$

Итак, нам удалось получить стохастические характеристики уравнения Бакли–Леверетта в явном виде, а также указать способ построения сколь угодно точных решений начально-краевой задачи (1), (5). Это позволяет дать оценку некоторых статистических параметров решений уравнения (1) со случайным коэффициентом пористости. Такой успех в построении аналитических оценок весьма редко достижим при решении более сложных задач, обобщающих модель Бакли–Леверетта. При этом вопрос влияния

“случайности” пористой среды на получаемые результаты остается актуальным. В этом случае наиболее универсальным средством следует считать комбинацию метода Монте-Карло, примененного для имитационного моделирования (для изучения “статистического разброса” результатов), и численных методов решения уравнений типа (1). Поэтому далее мы рассмотрим некоторые численные подходы к решению нелинейных гиперболических уравнений, в вычислительном эксперименте применим их к решению задачи (1), (5) и проведем сопоставление численных результатов с решениями, полученными по методу характеристик.

**2. Численные методы построения решений уравнения Бакли–Левретта.** Для численного решения уравнения Бакли–Левретта используют многие приемы построения численных решений нелинейных гиперболических уравнений [2–5]. Однако наибольшую популярность завоевали сеточные методы, основанные на применении *ориентированных против потока* разностных схем [2].

Далее нам будет удобна дивергентная форма записи уравнения (1):

$$\partial_t \sigma = -\partial_x U F \left( \frac{\sigma}{\varphi} \right), \quad (7)$$

в которой вводится новая искомая функция  $\sigma = \varphi s$ . Тогда ориентированной против потока разностной схемой для уравнения (7) мы будем называть схему

$$\frac{\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n}{\tau} + \frac{G_i^n - G_{i-1}^n}{h} = 0, \quad (8)$$

значения функций  $\sigma_i^n = \sigma(t_n, x_i)$ ,  $G_i^n = U(t_n) F \left( \frac{\sigma_i^n}{\varphi_i} \right)$ ,  $\varphi_i = \varphi(x_i)$  заданы на сетке  $\{t_n\} \subset [T_1, T_2]$ ,  $\{x_i\} \subset [A_1, A_2]$  с шагом по времени  $\tau$  и шагом по координате  $h$ . Схема (8) выписана для внутренних узлов  $n = \overline{1, N_t}$ ,  $i = \overline{1, N_x}$ . В крайних узлах сетки мы используем численную аппроксимацию начального и граничного условий:

$$\sigma_i^0 = \varphi_i s_0(x_i), \quad i = \overline{1, N_x}, \quad \sigma_0^n = \varphi(A_1) s(t_n), \quad n = \overline{0, N_t}. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что явная схема (8), (9) имеет первый порядок аппроксимации  $O(\tau + h)$  и является устойчивой при соблюдении условия Куранта–Фридрихса–Леви  $\tau \leq \frac{h \varphi_*}{U^* F'(s^*)}$ , где

$$\varphi_* = \min_{x \in [A_1, A_2]} \varphi(x), \quad U^* = \max_{t \in [T_1, T_2]} U(t), \quad s^* = \arg \left\{ \max_{s \in [0, 1]} F'(s) \right\}.$$

Популярность подхода ориентированных против потока разностных схем обусловлена их простотой (схемы являются однородными в том смысле, что не требуют специального рассмотрения областей, в которых решение терпит разрыв) и отсутствием осциллирующих погрешностей, порождаемых схемами более высокого порядка. Однако “регуляризующее” свойство схем первого порядка имеет и негативный эффект: численные решения выглядят сглаженными по сравнению с точным решением [3, 4]. Кроме того, невысокий порядок аппроксимации подразумевает использование весьма подробных сеток.

Преодолеть указанные недостатки ориентированных против потока разностных схем в некоторых случаях удается за счет перехода к так называемым гибридным схемам. Для построения гибридной схемы вводят разностный анализатор гладкости численного решения [4], который в нашей задаче мы зададим в виде

$$\gamma = \begin{cases} 0, & |G_{i+1}^n - 2G_i^n + G_{i-1}^n| \geq |G_i^n - G_{i-1}^n|, \\ 1, & |G_{i+1}^n - 2G_i^n + G_{i-1}^n| < |G_i^n - G_{i-1}^n|. \end{cases}$$

Тогда для уравнения (7) запишем разностную схему

$$\frac{\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n}{\tau} + \frac{G_{i+1}^n - G_{i-1}^n - \gamma(G_{i+1}^n - 2G_i^n + G_{i-1}^n)}{2h} = 0, \quad (10)$$

аппроксимирующую (7) во внутренних узлах  $n = \overline{1, N_t}$ ,  $i = \overline{1, N_x - 1}$ .

Для крайних узлов вновь будем пользоваться формулами (9), а для узлов  $i = N_x$  используем следующее выражение первого порядка аппроксимации:

$$\sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n + \frac{\tau}{h} (G_i^n - G_{i-1}^n).$$

Схема (10) будет иметь второй порядок аппроксимации, если  $\gamma=0$ , и первый порядок, если  $\gamma=1$ . Случай  $\gamma=1$  соответствует области резкого скачка насыщенности — здесь мы пользуемся разностной схемой первого порядка, чтобы избежать паразитных осцилляций в решении. В области гладкого решения схема (10) имеет второй порядок аппроксимации, тем самым оказываясь предпочтительней схемы (8). Схемы “с переключением”, подобные (10), называют гибридными схемами (схемами Федоренко) [4]. Основное преимущество гибридных схем заключается в их адаптивной подстройке к локальным свойствам решения, что позволяет применить наиболее эффективные в данной ситуации численные приемы.

**3. Вычислительный эксперимент.** В вычислительном эксперименте изучалось влияние “случайности” свойств пористой среды на поведение решений уравнения Бакли–Левверетта. Для построения численных решений задачи (1), (2) были программно реализованы ориентированная против потока разностная схема и гибридный метод Федоренко.

Для задачи (1), (5) численные решения сопоставлялись с решениями, полученными с помощью характеристик (3). Такое сопоставление проиллюстрировано на рис. 2, где в фиксированный момент времени как функции координаты одновременно показаны численные решения (результат расчета с помощью “ориентированной против потока” схемы показан красным цветом (УМ), результат расчета с помощью гибридной схемы — зеленым цветом (НМ)) и решение по методу характеристик (изображено фиолетовым цветом (СМ)). Для наглядности в данном случае мы считали, что коэффициент пористости не зависит от координаты. Видно, что ориентированная против потока разностная схема сглаживает решение — это происходит за счет так называемой аппроксимационной вязкости схем первого порядка [3, 4]. При этом гибридная схема дает численное решение, более близкое к решению, полученному с помощью метода характеристик (рис. 2). Сглаженный участок здесь заметно уже, поскольку вне области разрыва решения гибридная схема имеет второй порядок аппроксимации; таким образом, “численная диссипация” присутствует только в узкой области скачка решения. Далее мы используем гибридную схему для построения численных решений уравнения Бакли–Левверетта со случайным коэффициентом пористости.

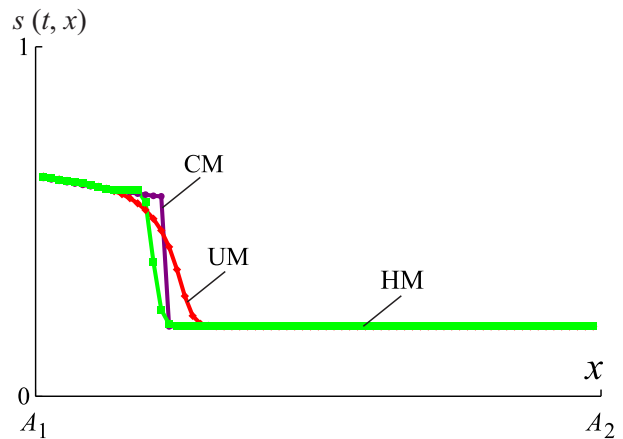


Рис. 2. Численные решения начально-краевой задачи для уравнения Бакли–Левверетта и решение, полученное методом характеристик

Моделирование случайной пористости осуществлялось с помощью известных приемов геостатистического моделирования [10]. Для получения случайного вектора  $\phi$  значений коэффициента пористости в узлах сетки  $x_i$  с заданными статистическими параметрами (вектором математических ожиданий  $m$  и ковариационной матрицей  $\Sigma$ ) мы применили следующий алгоритм.

Обычно в задачах геостатистики рассматривают случайные функции  $\varphi(\cdot)$ , ковариационная функция которых является однородной:  $\text{cov}(\varphi(x), \varphi(x')) = K(x - x')$  для любых  $x, x' \in [A_1, A_2]$ . В нашей задаче мы считали  $K(\cdot)$  входным параметром алгоритма получения случайного вектора значений коэффициента пористости, при этом вектор  $\phi$  определялся по формуле

$$\phi = \Sigma^{1/2} \xi + m.$$

Здесь  $\Sigma_{ij} = K(x_i - x_j)$ ,  $\xi$  — случайный вектор, компоненты которого являются симметричными ( $\xi_i \in [-a, a]$ , где  $a > 0$ ) центрированными ( $E \xi_i = 0$ ) случайными величинами и не коррелируют:  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \delta_{i,j}$ , где  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера. Заметим, что в этом случае математическое ожидание случайного вектора  $\phi$  равно  $m$ , ковариационная матрица совпадает с  $\Sigma$ , а компоненты  $\varphi_i$  вектора  $\phi$  будут лежать в диапазоне

$$\varphi_i \in \left[ m - a \sum_{j=0}^{N_x} |\Sigma_{ij}^{1/2}|, m + a \sum_{j=0}^{N_x} |\Sigma_{ij}^{1/2}| \right].$$

Коэффициент пористости по физическому смыслу не может выходить за пределы отрезка  $[0, 1]$ , поэтому необходимо следить, чтобы получаемый диапазон содержался в этом отрезке. В качестве реализации вектора  $\xi$ , к примеру, можно использовать последовательность чисел, полученную с помощью некоторого алгоритма генерации псевдослучайных чисел, который моделирует случайную величину, равномерно распределенную на отрезке  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ .

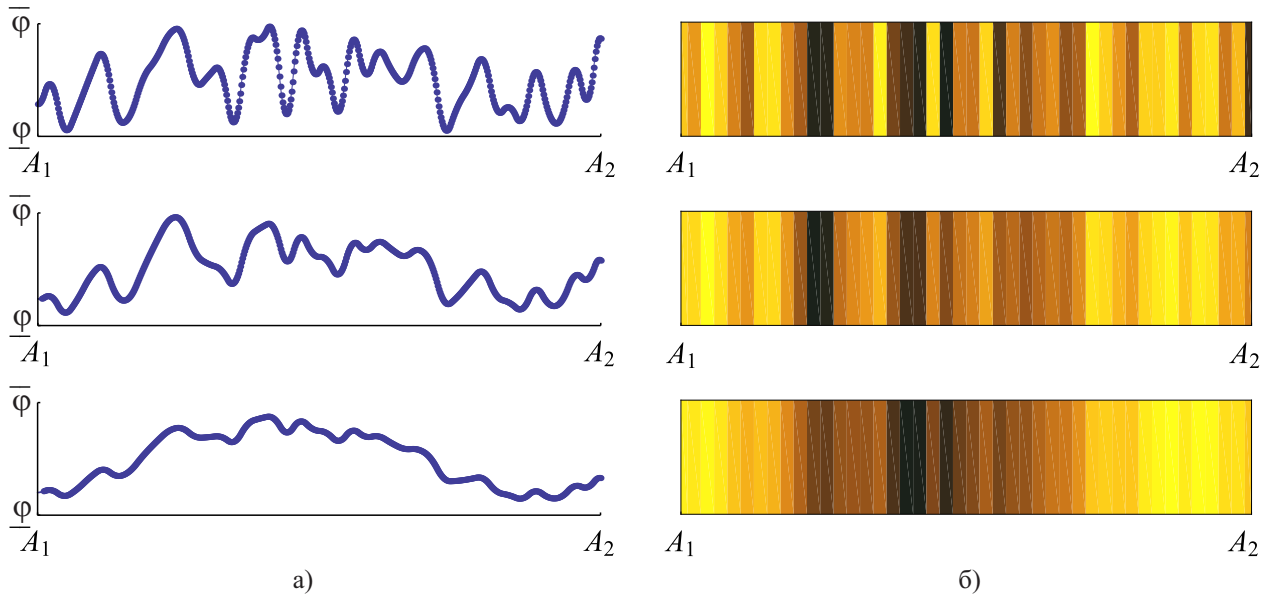


Рис. 3. Численное моделирование коэффициента пористости как случайной функции координаты

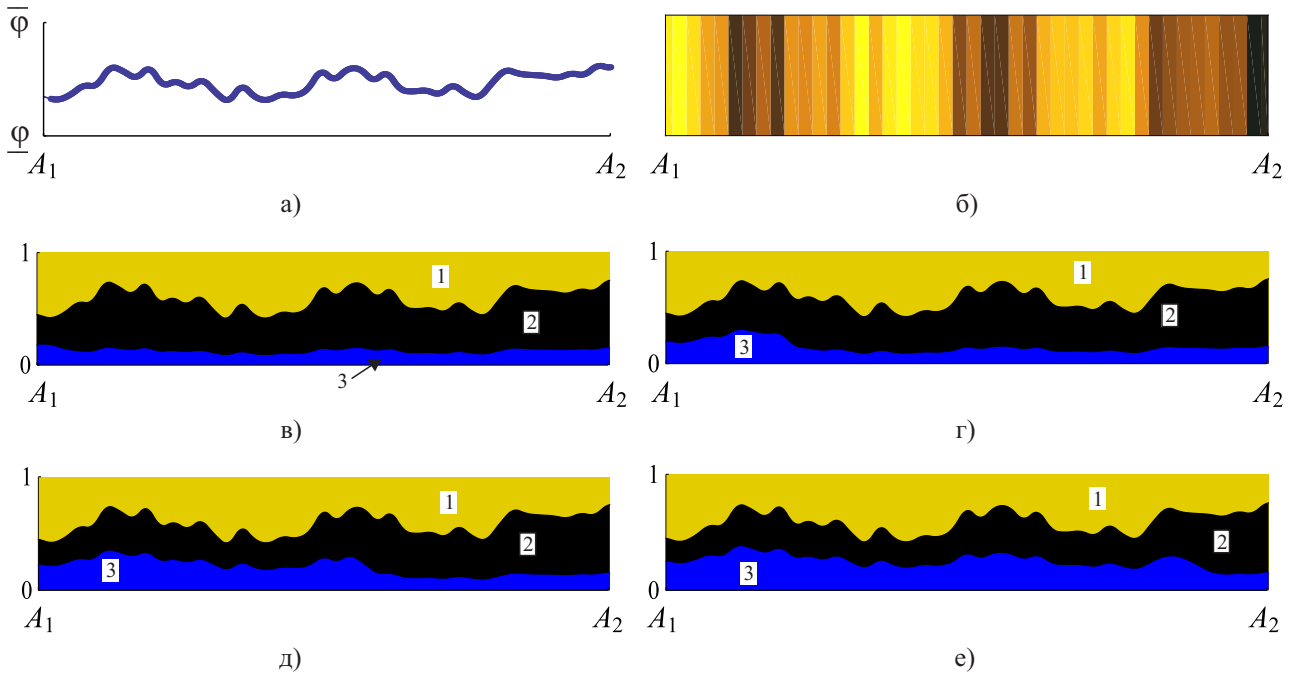


Рис. 4. Численные решения начально-краевой задачи для уравнения Бакли–Левретта в различные моменты времени

На рис. 3а и рис. 3б показаны результаты работы геостатистического алгоритма: одна под другой изображены три реализации профиля пористости, различающиеся величиной радиуса корреляции функции  $K(\cdot)$  (наименьший радиус корреляции имеют данные в верхней строке, наибольшим радиусом корреляции обладают данные в нижней строке). Рис. 3а показывает полученные профили пористости в виде графиков; на рис. 3б те же профили для наглядности приведены в виде цветовой диаграммы (более темные цвета соответствуют большим значениям пористости).

На рис. 4а, 4б показана одна из реализаций модели случайного вектора значений коэффициента пористости. Для этой реализации были проведены расчеты численного решения задачи (1), (5) в различные моменты времени. Полученные результаты продемонстрированы на рис. 4в–4е, на которых желтым цветом (область 1) изображена доля объема пористой среды, занятая твердым скелетом, черным цветом (область 2) показана доля объема, занятая “менее смачивающей” жидкостью, синим цветом (область 3) — занятая “более смачивающей” жидкостью. Изображенные на рис. 4в–4е численные решения были полу-

чены с помощью гибридной разностной схемы (на рис. 4в показано решение на 10-м шаге по времени, на рис. 4г — на 50-м шаге по времени, на рис. 4д — на 150-м шаге по времени и на рис. 4е — на 200-м шаге по времени). Из рис. 4в–4е видно, что со временем насыщенность “более смачивающей” жидкостью растет, что отражает физический смысл задачи (1), (5), описывающей вытеснение “менее смачивающей” жидкости посредством нагнетания “более смачивающей”.

В вычислительном эксперименте также были получены выборочные оценки математического ожидания  $\hat{m}$  и дисперсии  $\hat{D}$  времени прорыва фронта вытеснения по множественным реализациям профиля пористости. Выборочные оценки  $\hat{m}$  и  $\hat{D}$  были сопоставлены с аналитическими оценками математического ожидания  $m = E\tilde{t}(\mathcal{A}_2, s_+)$  и дисперсии  $D = D\tilde{t}(\mathcal{A}_2, s_+)$ , вычисленными по формулам (6). Рис. 5а демонстрирует зависимость от объема выборки отношения выборочной оценки математического ожидания и аналитической оценки:  $\hat{m}/m$ . Рис. 5б показывает аналогичную зависимость для отношения дисперсий  $\hat{D}/D$ . Понятно, что чем ближе  $\hat{m}/m$  и  $\hat{D}/D$  к единице, тем ближе выборочные оценки к своим теоретически рассчитанным значениям. Из рис. 5а и рис. 5б видно, что с ростом объема выборки совпадение выборочных и аналитических оценок растет.

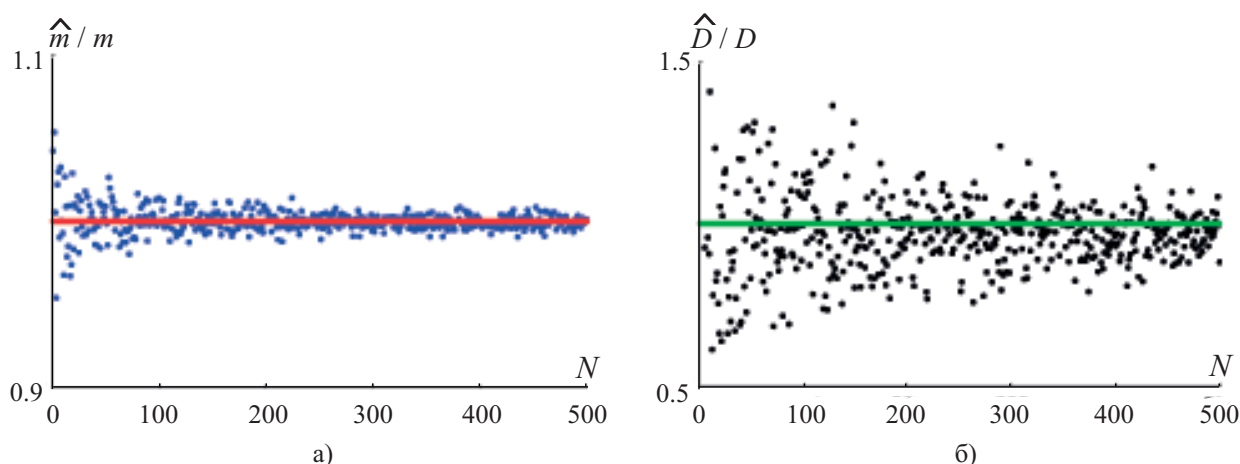


Рис. 5. Сопоставление выборочных и аналитических оценок математического ожидания и дисперсии времени прорыва фронта вытеснения

**Заключение.** В настоящей статье рассмотрено уравнение Бакли–Леверетта со случайным параметром — коэффициентом пористости. Цель работы состояла в изучении влияния неоднородности и случайности свойств пористой среды на поведение решений данного уравнения. Для этого была использована комбинация аналитического (метод характеристик) и численного (ориентированные против потока и гибридные разностные схемы) подходов. В результате удалось получить явное выражение для стохастических характеристик уравнения Бакли–Леверетта, сформулировать алгоритм построения сколь угодно точных решений семейства начально-краевых задач (1), (5) и дать оценки моментов первого и второго порядка такого параметра задачи (1), (5), как время прорыва фронта вытеснения.

В вычислительном эксперименте аналитические результаты были сопоставлены с численными. Определенное преимущество в построении численных решений уравнения (1) продемонстрировали гибридные разностные схемы.

Полученные в настоящей статье результаты могут быть полезны в задачах следующего типа.

1. При создании численных методов решения нелинейных уравнений типа (1) — особенно в случае, когда исследуемый метод планируется применять для имитационного моделирования поведения системы методом Монте-Карло, в частности в задачах моделирования многофазных фильтрационных течений в пористых средах. Следует отметить, что уравнение Бакли–Леверетта можно рассматривать как удобный “объект тестирования” различных методов изучения стохастических систем, поскольку свойства пористой среды в этом уравнении описывает единственная случайная функция — коэффициент пористости и, как показано выше, в этом случае можно предложить алгоритм получения сколь угодно точных решений уравнения Бакли–Леверетта.

2. В задачах интерпретации фильтрационных экспериментов на кернах для оценки влияния “разброса” свойств геологических образцов на соответствующий “разброс” результатов эксперимента.

3. При выборе эффективных способов построения численных решений начально-краевых задач для уравнения Бакли–Леверетта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И., Енттов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
2. *Trangenstein J.A.* Numerical solution of hyperbolic partial differential equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.
3. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990.
4. *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике. М.: БИНОМ, 2006.
5. *LeVeque R.J.* Finite-volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
6. *Zhang D., Tchelepi H.* Stochastic analysis of immiscible two-phase flow in heterogeneous media // SPE Journal. 1999. **4**, N 4. 380–388.
7. *Li H., Zhang D.* Efficient and accurate quantification of uncertainty for multiphase flow with the probabilistic collocation method // SPE Journal. 2009. **14**, N 4. 665–679.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
9. *Атыр А., Басс Д., Уитинг Р.* Petroleum reservoir engineering. New York: McGraw-Hill, 1960.
10. *Deutsch C.V.* Geostatistical reservoir modeling. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002.

Поступила в редакцию  
17.09.2012

---