УДК 519.6

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И. В. Колос[1], М. В. Колос[2]

В данной работе получены априорные неравенства с негативной нормой для дифференциальных уравнений гиперболического типа с граничными условиями Дирихле в случае, когда правая часть принадлежит пространству обобщенных функций. Доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи и сходимость приближенного метода решения.

Ключевые слова: задача Дирихле, численный анализ, численные методы, граничные условия Дирихле, гиперболические дифференциальные уравнения, обобщенное решение, сходимость.

Полученные в данной статье результаты основаны на подходе, разработанном в [1 – 4, 7] к решению задачи Дирихле для гиперболических уравнений с правыми частями, принадлежащими пространству обобщенных функций.

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задана замкнутая ограниченная область P с границей $\partial P = \Gamma$, в каждой точке которой существует единственная нормаль $\mathbf{n}_0$; $C^2(P)$ — множество дважды дифференцируемых в классическом смысле функций $u(x)$ на P; $C^2_1(P)$ — множество функций $u(x) \in C^2(P)$, для которых выполняется условие
$$u(x)|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{1}$$
Введем обозначения: $L_2(P)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций в смысле Лебега на P; $(.,.)_{0P}$, $\|\,.\,\|_{0P}$ — скалярное произведение и норма в $L_2(P)$; $W^1_2(P)$ — позитивное соболевское пространство;
$$(u,v)_{1P} = \int\limits_P \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + u(x)v(x)\Big)\,dP$$
— скалярное произведение в $W^1_2(P)$; $\|u\|_{1P} = \sqrt{(u,u)_{1P}}$ — норма в $W^1_2(P)$.

Справедливо неравенство $\|u\|_{0P} \leqslant k\|u\|_{1P}$ $\forall u \in W^1_2(P)$, $k = \text{const}$.

Рассмотрим на P линейное дифференциальное выражение второго порядка
$$Nu = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + a_0(x)u(x), \tag{2}$$
где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2(P)$, $i,j = 1,\dots,n$, $a_0(x) \in C(P)$, $C(P)$ — пространство непрерывных функций на P, $a_0(x) \geqslant c_0$ для всех $x \in P$, $c_0 = \inf\limits_x\{a_0(x) \mid x \in P\} > 0$.

Предполагаем, что справедливо также неравенство
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda\sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad x \in P, \tag{3}$$
где λ — положительная константа, ξ_i — произвольные вещественные числа ($i = 1,\dots,n$).

Соотношения (1) – (3) задают в пространстве $L_2(P)$ замкнутый линейный оператор $\mathcal{B}$, такой, что $\mathcal{B}u = Nu$ для всех $u \in C^2_1(P)$. Оператор $\mathcal{B}$ имеет плотную в $L_2(P)$ область определения $D(\mathcal{B})$, является симметрическим и положительно-определенным, т.е. справедливы соотношения
$$\begin{aligned}&(\mathcal{B}u,v)_{0P} = (u,\mathcal{B}v)_{0P} \quad \forall u,v \in D(\mathcal{B}),\\ &(\mathcal{B}u,u)_{0P} \geqslant c\,\|\,u\,\|^2_{0P} \quad \forall u \in D(\mathcal{B}), \quad c = \text{const} > 0.\end{aligned} \tag{4}$$

[1] Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, 58, 109180, Москва; e-mail: rektorat@urao.edu

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Введем обозначение $(u,v)_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}u, v)_{0P}$ для всех $u, v \in D(\mathcal{B})$. Пополним $D(\mathcal{B})$ по этому скалярному произведению. Полученное пространство обозначим через $H_{\mathcal{B}}$. Примем это пространство за позитивное $H_{\mathcal{B}} = H_{\mathcal{B}}^+$ и построим по $H_{\mathcal{B}}^+$ и $L_2(P)$ негативное пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Пусть $f(x) \in L_2(P)$. Тогда выражение $(f,u)_{0P}$, $u \in H_{\mathcal{B}}^+$ определяет непрерывный функционал $l_f(u)$ на $H_{\mathcal{B}}^+$ (непрерывность следует из (4)) и

$$|(f,u)_{0P}| = |l_f(u)| \leqslant \|f\|_{0P}\,\|u\|_{0P} \leqslant c\,\|f\|_{0P}\,\|u\|_{+}, \quad f \in L_2(P), \quad u \in H_{\mathcal{B}}^+ \quad (H_{\mathcal{B}}^+ \subset L_2(P)),$$

где $\|\,.\,\|_+$ — норма в $H_{\mathcal{B}}^+$. Пополним $L_2(P)$ по норме

$$\|f\|_- = \sup_u \Big(\frac{|(f,u)_{0P}|}{\|u\|_+},\ f \in L_2(P),\ u \in H_{\mathcal{B}}^+,\ \|u\|_+ \neq 0 \Big).$$

Полученное пополнение задает пространство $H_{\mathcal{B}}^-$. Оператор $\mathcal{B}$ непрерывно действует из $H_{\mathcal{B}}^+$ в $H_{\mathcal{B}}^-$.

Пусть $[0,t]$ — некоторый отрезок и переменная $\tau \in [0,t]$. Определим область $Q = P \times [0,t]$. Пусть $L_2(Q)$ — пространство функций $u(\tau,x)$ на Q, отображающих сегмент $[0,t]$ в пространство E_n и таких, что

$$\int_0^t \|u(\tau)\|_{0P}^2\, d\tau = \|\, u\,\|_{0Q}^2 < \infty,$$

где $\|\,.\,\|_{0Q}$ — норма в $L_2(Q)$.

Рассмотрим на пространстве $L_2(Q)$ дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u, \quad u \in D(\mathcal{L}_1),$$

где $D(\mathcal{L}_1)$ — множество функций $u(\tau,x)$, заданных в области Q, дважды непрерывно дифференцируемых по $\tau \in [0,t]$. По переменной $x \in P$ функции $u(\tau,x) \in H_{\mathcal{B}}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau,x)|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad u(\tau,x)|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{5}$$

Введем обозначения: $W_{20}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1)$ по норме

$$\|u\|_{10Q} = \Big(\int_Q \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial \tau}\Big)^2 + u\mathcal{B}u \Big]\, dQ \Big)^{1/2}; \tag{6}$$

$\|\,.\,\|_{10Q}$, $(.,.)_{10Q}$ — норма и скалярное произведение в позитивном пространстве $W_{20}^1(Q)$; $W_{20}^{-1}(Q)$ — негативное пространство, полученное пополнением $L_2(Q)$ по норме

$$\|v\|_{-10Q} = \sup_u \Big[\frac{|(u,v)_{0Q}|}{\|u\|_{10Q}}, \quad v \in L_2(Q), \quad u \in W_{20}^1(Q), \quad \|u\|_{10Q} \neq 0 \Big].$$

Обозначим через $D(\mathcal{L}_1^*)$ множество функций $u(\tau,x)$, имеющих хотя бы две производных в классическом смысле по τ, а по x функции $u(\tau,x) \in H_{\mathcal{B}}^+$ и удовлетворяют условиям

$$u(\tau,x)|_{\tau=t} = 0, \quad \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t} = 0, \quad u(\tau,x)|_{x\in\Gamma} = 0. \tag{7}$$

Пусть $W_{2t}^1(Q)$ — пополнение множества $D(\mathcal{L}_1^*)$ по норме (6), а $W_{2t}^{-1}(Q)$ негативное пространство для $W_{2t}^1(Q)$; $\mathcal{L}_1^*$ — сопряженный оператор к $\mathcal{L}_1$;

$$\mathcal{L}_1^* u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u, \quad u \in D(\mathcal{L}_1^*).$$

Расширим операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_1^*$ на все пространство $W_{20}^1(Q)$ и $W_{2t}^1(Q)$ соответственно. Расширенные операторы будем обозначать $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$. Введем оператор

$$\mathcal{J}u \equiv \int_t^\tau b^{-1}(s)u(s,x)\, ds = v(\tau,x), \tag{8}$$

где $b(\tau)$ — неизвестная функция, которую надо выбирать так, чтобы скалярное произведение $(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q}$ было положительно определено, т.е. $(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} \geqslant \|u\|^2_{10Q}$. Отметим, что

$$v(t,x) = 0, \quad \frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau} = b^{-1}(\tau)u(\tau,x), \quad u(\tau,x) = b(\tau)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}. \tag{9}$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q}$. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u, v)_{0Q} = \int\limits_Q \frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, v(\tau,x)\, dQ + \int\limits_Q \mathcal{B}u(\tau,x)v(\tau,x)\, dQ = \\ = \int\limits_Q \frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, v(\tau,x)\, dQ + \int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ.\end{aligned} \tag{10}$$

Последнее равенство справедливо в силу симметричности оператора $\mathcal{B}$.

Преобразуем первое слагаемое в правой части (10) следующим образом. Перебросим операцию дифференцирования на функцию v и, применяя формулу Грина и используя граничные условия, находим

$$\int\limits_Q \frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, v(\tau,x)\, dQ = \int\limits_Q u(\tau,x)\frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, dQ - \int\limits_P u(t,x)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t} dP.$$

Таким образом,

$$(\mathcal{L}u, \mathcal{J}u)_{0Q} = \int\limits_Q u(\tau,x)\frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, dQ - \int\limits_P u(t,x)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t} dP + \int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ. \tag{11}$$

Преобразуем первое слагаемое в (11). Заменим $u(\tau,x)$ его представлением из (9); интегрируя по частям и применяя формулу Грина, имеем:

$$\begin{aligned}\int\limits_Q u(\tau,x)\frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, dQ = \int\limits_P b(t)\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}\Big]^2 dP - \int\limits_P b(0)\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}\Big]^2 dP - \\ - \int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big]^2 dQ - \int\limits_Q b(\tau)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, dQ.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}2\int\limits_Q b(\tau)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\frac{\partial^2 v(\tau,x)}{\partial \tau^2}\, dQ = \int\limits_P b(t)\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}\Big]^2 dP - \int\limits_P b(0)\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}\Big]^2 dP - \\ - \int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\Big]^2 dQ.\end{aligned} \tag{12}$$

Интегрируя по частям третье слагаемое в правой части (11), находим

$$\begin{aligned}\int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ = \int\limits_Q b(\tau)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\, \mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ = \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial \tau}\,[b(\tau)v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)]\, dQ - \\ - \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial \tau}\,[b(\tau)\mathcal{B}v(\tau,x)]v(\tau,x)\, dQ = \int\limits_S b(\tau)v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\cos(\tau,x)\, dS - \int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}v(\tau,x)\,\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ - \\ - \int\limits_Q b(\tau)v(\tau,x)\mathcal{B}\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\, dQ = \int\limits_P b(t)v(t,x)\mathcal{B}v(t,x)\, dP - \int\limits_P b(0)v(0,x)\mathcal{B}v(0,x)\, dP - \\ - \int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\, v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ - \int\limits_Q b(\tau)\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial \tau}\, \mathcal{B}v(\tau,x)\, dQ.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$2\int\limits_Q u(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ = -\int\limits_P b(0)v(0,x)\mathcal{B}v(0,x)\,dP - \int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\,v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ. \tag{13}$$

Подставляя выражения (12) и (13) в (11), получим

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u,\mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u,v)_{0Q} = &-\frac{1}{2}\int\limits_P b(t)\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t}\Big]^2 dP - \frac{1}{2}\int\limits_P b(0)\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\Big]^2 dP - \\ &-\frac{1}{2}\int\limits_P b(0)v(0,x)\mathcal{B}v(0,x)\,dP - \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]^2 dQ - \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{db(\tau)}{d\tau}\,v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ.\end{aligned} \tag{14}$$

Выберем функцию $b(\tau) = -2(t+\tau)$. Тогда $b(0) = -2t$, $b(t) = -4t$, $\dfrac{db(\tau)}{d\tau} = -2$, $b^{-1}(\tau) = -\dfrac{1}{2(t+\tau)}$ и

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u,\mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u,v)_{0Q} = 2t\int\limits_P \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t}\Big]^2 dP + t\int\limits_P \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\Big]^2 dP + \\ + t\int\limits_P b(0)v(0,x)\mathcal{B}v(0,x)\,dP + \int\limits_Q \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]^2 dQ + \int\limits_Q v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\displaystyle\int\limits_P \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\Big]^2 dP = 0$ (так как $\dfrac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau} = -\dfrac{1}{2(t+\tau)}\,u(\tau,x)$, а $u(0,x) = 0$), $t > 0$, $\displaystyle\int\limits_P \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t}\Big]^2 dP \geqslant 0$ и $\displaystyle\int\limits_P b(0)v(0,x)\mathcal{B}v(0,x)\,dP \geqslant c\|v(0,x)\|^2_{0P} \geqslant 0$, получаем

$$(\mathcal{L}u,\mathcal{J}u)_{0Q} = (\mathcal{L}u,v)_{0Q} \geqslant \int\limits_Q \Big[\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]^2 dQ + \int\limits_Q v(\tau,x)\mathcal{B}v(\tau,x)\,dQ \geqslant c\|v\|^2_{1tQ} = c\|\mathcal{J}u\|^2_{1tQ},$$

откуда

$$(\mathcal{L}u,\mathcal{J}u)_{0Q} \geqslant c\,\|\mathcal{J}u\|^2_{1tQ}. \tag{15}$$

Используя определение негативной нормы, из (15) имеем:

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} = \sup_{\mathcal{J}u\neq 0}\frac{|(\mathcal{L}u,\mathcal{J}u)_{0Q}|}{\|\mathcal{J}u\|_{1tQ}} \geqslant c\,\|\mathcal{J}u\|_{1tQ}. \tag{16}$$

Оценим $\|\mathcal{J}u\|^2_{1tQ}$:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{J}u\|^2_{1tQ} &= \int\limits_Q \Big(\sum_{i=1}^n \Big[\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_t^\tau \frac{u(s,x)}{-2(t+s)}\,ds\Big]^2 + \Big[\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_t^\tau \frac{u(s,x)}{-2(t+s)}\,ds\Big]^2\Big)\,dQ + \int\limits_Q \mathcal{J}u\mathcal{B}(\mathcal{J}u)\,dQ \geqslant \\ &\geqslant \int\limits_Q \sum_{i=1}^n \Big[\int\limits_t^\tau \frac{1}{-2(t+s)}\frac{\partial u(s,x)}{\partial x_i}\,ds\Big]^2 dQ + \int\limits_Q \Big[\frac{1}{-2(t+\tau)}\,u(t,\tau)\Big]^2 dQ \geqslant \\ &\geqslant \int\limits_Q \frac{1}{4(t+\tau)^2}\,u^2(t,\tau)\,dQ \geqslant c_1\,\|u\|^2_{0Q},\end{aligned}$$

где c_1 — некоторая положительная константа, независящая от u. Этим доказано неравенство

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \geqslant c\,\|u\|_{0Q}.$$

Покажем справедливость неравенства

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \leqslant c\,\|u\|_{10Q}.$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathcal{L}u, v)_{0Q}$ на элементах $u \in D(\mathcal{L})$ и $v \in W^1_{2t}(Q)$. Интегрируя по частям, находим

$$(\mathcal{L}u, v)_{0Q} = \int\limits_Q \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial \tau^2} v(\tau, x)\, dQ + \int\limits_Q v(\tau, x)\mathcal{B}u(\tau, x)\, dQ =$$

$$= \int\limits_Q \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau}\, dQ + \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j}\Big) v(\tau, x)\, dQ =$$

$$= \int\limits_Q \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau}\, dQ + \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial x_i}\, dQ.$$

При интегрировании учтено, что

$$\int\limits_Q \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j}\, v(\tau, x)\Big)\, dQ = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j}\, v(\tau, x)\Big) \cos(x_i, x_j)\, dS = 0,$$

так как $v(\tau, x)|_{x\in\Gamma} = 0$, $v(t, x) = 0$ и $\left.\dfrac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0$.

Далее, по определению негативной нормы

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} = \sup_{v\neq 0} \frac{|(\mathcal{L}u, v)_{0Q}|}{\|v\|_{1tQ}} =$$

$$= \sup_{v\neq 0} \frac{\Big|\int\limits_Q \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau}\, dQ + \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial x_i}\, dQ\Big|}{\|v\|_{1tQ}} \leqslant$$

$$\leqslant c \sup_{v\neq 0} \frac{|(u, v)_{1Q}|}{\|v\|_{1tQ}} \leqslant c \sup_{v\neq 0} \frac{\|u\|_{10Q}\|v\|_{1tQ}}{\|v\|_{1tQ}} \leqslant c\, \|u\|_{10Q}.$$

Таким образом, доказаны неравенства

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \geqslant c\, \|u\|_{0Q}, \tag{17}$$

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \leqslant c\, \|u\|_{10Q}. \tag{18}$$

Аналогично можно получить неравенства для сопряженного оператора

$$\|\mathcal{L}^* v\|_{-10Q} \geqslant c\, \|v\|_{0Q}, \tag{19}$$

$$\|\mathcal{L}^* v\|_{-10Q} \leqslant c\, \|v\|_{1tQ}. \tag{20}$$

Теперь рассмотрим вопрос о разрешимости пары задач

$$\mathcal{L}u = f, \quad f \in L_2, \quad u \in W^1_{20}(Q), \tag{21}$$

$$\mathcal{L}^* v = g, \quad g \in L_2, \quad v \in W^1_{2t}(Q), \tag{22}$$

где u, v — искомые, а f, g — заданные элементы.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (21) называется функция $u \in W^1_{20}(Q)$, такая, что интегральное тождество

$$\int\limits_Q \Big[\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \sum_{i,j=1}^n \Big\{\frac{\partial (v a_{ij})}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big\} + v a_0 u\Big]\, dQ = \int\limits_Q v f\, dQ$$

выполняется для любой функции $v \in W^1_{2t}(Q)$.

Очевидно, что если обобщенное решение из $W^1_{20}(Q)$ имеет обобщенные производные до второго порядка включительно, то оно является решением уравнения (21) почти всюду в Q.

Определение 2. Обобщенным решением задачи (21) называется функция $u \in W^1_{20}(Q)$, такая, что существует последовательность гладких функций $\{u_i(\tau, x)\}$, $i \to \infty$, удовлетворяющих граничным условиям (5), и имеет место соотношение

$$\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \to 0, \quad \|u_i - u\|_{10Q} \to 0, \quad i \to \infty.$$

Теорема 1. *Для систем вида* (21), (22) *определения* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

Доказательство. Действительно, если существует обобщенное решение в смысле определения 2, то, полагая $\mathcal{L}u_i \equiv f_i$, имеем

$$\lim_{i\to\infty} [(v, \mathcal{L}u_i) - (v, f_i)] = (v, \mathcal{L}u)_0 - (v, f) = 0,$$

причем если $\alpha \in W^1_{20}(Q)$ и $\beta \in W^{-1}_{20}(Q)$, то выражение $(\alpha, \beta)_0$ означает билинейную форму, совпадающую при $\beta \in L_2$ со скалярным произведением в L_2.

Интегрируя по частям и применяя формулу Грина в левой части равенства $(v, \mathcal{L}u)_0 = (v, f)$, “перебросим” одно дифференцирование на v и получим, что обобщенное решение в смысле определения 2 есть обобщенное решение в смысле определения 1.

Прежде чем доказать обратное утверждение, сделаем следующие замечания.

1. Пусть функция $u \in L_2$; тогда в качестве производной u'_τ от u можно понимать элемент пространства $W^{-1}_2(Q)$, где $W^{-1}_2(Q)$ — негативное пространство, построенное по $W^1_2(Q)$ и L_2, а $W^1_2(Q)$ — замыкание гладких в Q функций по норме (6).

Действительно, рассмотрим последовательность гладких финитных в Q функций u_k, сходящихся в L_2 к u. По определению негативной нормы имеем

$$\Big\|\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\Big\|_{-1} = \sup_{v\neq 0} \frac{\Big|\Big(\dfrac{\partial u_k}{\partial y_j}, v\Big)\Big|}{\|v\|_1} = \sup_{v\neq 0} \frac{\Big|\Big(u_k, \dfrac{\partial v}{\partial y_j}\Big)\Big|}{\|v\|_1} \leqslant \|u_k\|, \quad y_j \in \{\tau, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, n+1,$$

или

$$\Big\|\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\Big\|_{-1} \leqslant \|u_k\|.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, при $k \to \infty$ получим

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial y_j}\Big\|_{-1} \leqslant \|u\|.$$

2. Рассмотрим выражение $\mathcal{L}$ из (21) на гладких функциях $u \in W^1_{20}(Q)$. Очевидно, имеем

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} = \sup_{v\neq 0} \frac{|(v, \mathcal{L}u)|}{\|v\|_{1tQ}} = \sup_{v\neq 0} \frac{\displaystyle\int\limits_Q \Big[-u_\tau v_\tau - \sum_{i,j=1}^n (va_{ij})_{x_i} u_{x_j} + va_0 u\Big] dQ}{\|v\|_{1tQ}} \leqslant c\,\|u\|_{10Q},$$

где c — положительная постоянная, независящая от u. Применяя процесс замыкания, получим, что неравенство

$$\|\mathcal{L}u\|_{-1tQ} \leqslant c\,\|u\|_{10Q} \tag{23}$$

справедливо для всех $u \in W^1_{20}(Q)$. Аналогично устанавливается неравенство

$$\|\mathcal{L}^* v\|_{-10Q} \leqslant c\,\|v\|_{1tQ}. \tag{24}$$

Докажем теперь, что обобщенное решение в смысле определения 1 есть обобщенное решение в смысле определения 2. Действительно, “перебрасывая” одно дифференцирование на v в равенстве из определения 1, получим

$$(v, f) = (u, \mathcal{L}^* v). \tag{25}$$

Множество гладких в Q функций, удовлетворяющих условию (5), плотно в пространстве $W^1_{20}(Q)$; поэтому найдется последовательность гладких функций $\{u_i\}$, удовлетворяющих условию (5) в обычном смысле, такая, что $\|u_i - u\|_{10Q} \to 0$, $i \to \infty$. В силу неравенства (23) получаем, что $\mathcal{L}u_i \equiv f_i$ сходится при $i \to \infty$ по норме $W^{-1}_{2t}(Q)$ к некоторому элементу $\hat{f} \in W^{-1}_{2t}(Q)$. Для последовательности $\{u_i\}$, такой, что $\|u_i - u\|_{10Q} \to 0$, $i \to \infty$, справедливо равенство $(v, f_i) = (u_i, \mathcal{L}^* v)$; вычитая его из (25) получим

$(v, f - f_i) = (u - u_i, \mathcal{L}^* v)$. Переходя здесь к пределу при $i \to \infty$, имеем $(v, f - \hat{f}) = 0$ для всех гладких $v \in W^1_{2t}(Q)$; это означает, что $\|f - \hat{f}\|_{-1tQ} = 0$. Эквивалентность определений 1 и 2 доказана.

Из неравенств (17) – (20) следует обобщенная разрешимость двух задач.

Задача 1: найти непрерывную в замкнутой области $Q = P \times [0, t]$ функцию $u(\tau, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}u = f, \quad f \in W^{-1}_{2t}(Q)$$

и условиям

$$u(\tau, x)|_{x\in\Gamma} = 0, \quad u(0, x) = \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0.$$

Задача 2: найти непрерывную в замкнутой области $Q = P \times [0, t]$ функцию $v(\tau, x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \mathcal{B}v = g, \quad f \in W^{-1}_{20}(Q)$$

и условиям

$$v(\tau, x)|_{x\in\Gamma} = 0, \quad v(t, x) = \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t} = 0.$$

Теорема 2. *Для любых функций $f \in L_2(Q)$ и $g \in L_2(Q)$ существуют единственные обобщенные решения задач* (21) *и* (22) *соответственно в пространствах $W^1_{20}(Q)$ и $W^1_{2t}(Q)$.*

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$l_f(v) = (v, f)_{0Q}, \quad v \in D(\mathcal{L}^*_1) \subset W^1_{2t}(Q).$$

Используя неравенство (19), находим

$$|l_f(v)| = |(v, f)_{0Q}| \leqslant \|v\|_{0Q}\, \|f\|_{0Q} \leqslant c\, \|\mathcal{L}^* v\|_{-10Q},$$

т.е. $l_f(v)$ — ограниченный функционал на множестве $\{\mathcal{L}^*_1 v\} \subset W^{-1}_{20}(Q)$, $v \in D(\mathcal{L}^*_1)$, и, следовательно, является непрерывным линейным функционалом на $\{\mathcal{L}^*_1 v\}$.

Расширим по теореме Хана–Банаха этот функционал на все $W^{-1}_{20}(Q)$. Расширенный функционал обозначим через $l_u(\rho)$, $\rho \in W^{-1}_{20}(Q)$. По обобщенной теореме Рисса [5, 6] для линейного непрерывного функционала, определенного на пространстве $W^{-1}_{20}(Q)$, существует функция $u \in W^1_{20}(Q)$, такая, что $l(\rho) = \langle u, \rho\rangle_{0Q}$ для всех $\rho \in W^{-1}_{20}(Q)$, где $\langle u, \rho\rangle_{0Q}$ — билинейная форма в пространствах $W^1_{20}(Q)$ и $W^{-1}_{20}(Q)$. Пусть $\rho = \mathcal{L}^* v$, а v — гладкая функция, удовлетворяющая условиям (7). Тогда

$$l_u(\rho) \equiv \langle u, \rho\rangle_{0Q} = \langle u, \mathcal{L}^* v\rangle = (u, \mathcal{L}^* v)_{0Q} = l_f(v) = (f, v)_{0Q}.$$

Так как множество гладких функций, удовлетворяющих условиям (5), плотно в $W^1_{20}(Q)$, то для $u(\tau, x)$ существует последовательность гладких функций $\{u_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$, такая, что $u_i(0, x) = \dfrac{du(\tau, x)}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0$ и $\|u_i - u\|_{10Q} \to 0$, $i \to \infty$. Таким образом, имеем:

$$(u, \mathcal{L}^* v)_{0Q} = \lim_{i\to\infty} (u_i, \mathcal{L}^* v)_{0Q} = \lim_{i\to\infty} (\mathcal{L}u_i, v)_{0Q} = (f, v)_{0Q}.$$

Далее, используя неравенство (18), находим, что $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $i \to \infty$. Существование решения доказано. Единственность решения следует из неравенства (17). Действительно, предположим, что существуют два решения задачи (21): u_1 и u_2, причем $u_1 \neq u_2$. Используя неравенство (17), находим

$$\|u_1 - u_2\|_{0Q} \leqslant \|\mathcal{L}u_1 - \mathcal{L}u_2\|_{-1tQ} = \|f - f\|_{-1tQ} = 0,$$

что противоречит предположению.

Существование и единственность решения задачи (22) доказываются аналогично.

Определение 3. Обобщенным решением задачи (21) с правой частью $f(\tau, x) \in W^{-1}_{2t}(Q)$ называют функцию $u(\tau, x) \in L_2(Q)$, такую, что для нее существует последовательность гладких функций $\{u_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$, $u \in W^1_{20}(Q)$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $\|u_i - u\|_{0Q} \to 0$, $i \to \infty$.

Определение 4. Обобщенным решением задачи (22) с правой частью из $W^{-1}_{20}(Q)$ называют функцию $v(\tau, x) \in L_2(Q)$, такую, что для нее существует последовательность функций $\{v_i(\tau, x)\}_{i=1}^\infty$, $v_i \in W^1_{2t}(Q)$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{L}^* v_i - g\|_{-10Q} \to 0$, $\|v_i - v\|_{0Q} \to 0$, $i \to \infty$.

Теорема 3. *Для любых функций $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи* (21) *в смысле определения* 3*; для любых $g \in W_{20}^{-1}(Q)$ существует единственное обобщенное решение задачи* (22) *в смысле определения* 4.

Доказательство. Пространство $L_2(Q)$ плотно в $W_{2t}^{-1}(Q)$, поэтому для любой $f \in W_{2t}^{-1}(Q)$ в $L_2(Q)$ существует последовательность $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющая соотношению $\|f_i - f\|_{-1tQ} \to 0$, $i \to \infty$. По теореме 2 для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное решение $u(\tau, x)$ задачи (21) в смысле определения 2.

Используя неравенство (17), находим

$$\|\mathcal{L}u_i - f\|_{-1tQ} = \|f_i - f\|_{-1tQ} \geqslant c\|u_i - u\|_{0Q}, \quad c > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $i \to \infty$, устанавливаем существование обобщенного решения задачи (21) с правой частью из $W_{2t}^{-1}(Q)$ в смысле определения 3. Единственность решения следует из неравенства (17). Доказательство второй части теоремы аналогично.

Обратимся теперь к приближенному решению краевой задачи. Рассмотрим вначале задачу (21), когда правая часть $f \in L_2(Q)$. Ее приближенное решение будем искать в виде

$$u_k \equiv u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^{k} y_i(\tau)\rho_i(x), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{26}$$

где $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система гладких (имеющих по крайней мере две непрерывные производные) функций в $L_2(P)$, удовлетворяющая условию (5), а выражение для $y_i(\tau)$ находится из соотношений

$$\begin{gathered}\Big(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2}, \rho_j\Big)_{0P} + (\mathcal{B}u, \rho_j)_{0P} = (f, \rho_j)_{0P}, \quad (u_k(0,x), \rho_j)_{0P} = y_j(0), \\ \Big(\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}, \rho_j\Big)_{0P} = \frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=0}, \quad j = 1, 2, \dots, k.\end{gathered} \tag{27}$$

Используя (26), получаем, что

$$\begin{gathered}\mathcal{S}y_j \equiv \frac{d^2 y_j(\tau)}{d\tau^2} + \sum_{i=1}^{k} y_i(\tau)(\mathcal{B}\rho_i, \rho_j)_{0P} = (f, \rho_j)_{0P}, \\ y_j(0) = 0, \quad \frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t.\end{gathered} \tag{28}$$

Эти уравнения можно записать в матричной форме

$$\frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} = B_k y(\tau) + F_k(\tau), \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \tag{29}$$

где $y(\tau)$ и $F_k(\tau)$ — векторы-столбцы

$$y(\tau) = \{y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_k(\tau)\}, \quad F_k(\tau) = \{(f, \rho_1)_{0P}, (f, \rho_2)_{0P}, \dots, (f, \rho_k)_{0P}\},$$

а B_k — матрица вида

$$B_k = \begin{pmatrix} (\mathcal{B}\rho_1, \rho_1)_{0P} & \cdots & (\mathcal{B}\rho_1, \rho_k)_{0P} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathcal{B}\rho_k, \rho_1)_{0P} & \cdots & (\mathcal{B}\rho_k, \rho_k)_{0P} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что решение (29) понимается в обобщенном смысле в соответствии с определением 5.

Определение 5. Обобщенным решением задачи (29) с правой частью из $W_{2t}^{-1}[0, t]$ называют функцию $y(\tau) \in L_2[0, t]$, такую, что для нее существует последовательность функций $\{y_i(\tau)\}_{i=1}^{\infty}$, $y_i \in W_{20}^{1}[0, t]$, удовлетворяющих соотношениям $\|\mathcal{S}y_i - G_k\|_{-1t} \to 0$, $\|y_i - y\|_0 \to 0$, $i \to \infty$.

Легко показать (см. [6]), что обобщенное решение (29) существует и единственно.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in L_2(Q)$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_{0Q} \geqslant c\,\|u_k\|_{10Q}.$$

Доказательство. Умножим обе части соотношения (26) на $(2t-\tau)\dfrac{dy_j(\tau)}{d\tau}$. Суммируя по j от 1 до k и интегрируя по τ от 0 до t, находим

$$\int\limits_0^t \Big(\frac{\partial^2 u_k(\tau)}{\partial\tau^2}, \sum_{j=1}^k (2t-\tau)\frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\rho_j\Big)_{0P}\,d\tau + \int\limits_0^t \Big(\mathcal{B}u_k, \sum_{j=1}^k (2t-\tau)\frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\rho_j\Big)_{0P}\,d\tau =$$
$$= \int\limits_0^t \Big(f(\tau,x), \sum_{j=1}^k (2t-\tau)\frac{dy_j(\tau)}{d\tau}\rho_j\Big)_{0P}\,d\tau.$$

Отсюда, используя соотношение (26), получаем

$$\Big(\frac{\partial^2 u_k}{\partial\tau^2}, (2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q} + \Big(\mathcal{B}u_k, (2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q} \equiv \Big(\mathcal{L}u_k, (2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q} = \Big(f, (2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q}.$$

Оценим скалярное произведение $\left(\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial\tau^2}, (2t-\tau)\dfrac{\partial u_k}{\partial\tau}\right)_{0Q}$. Интегрируя это выражение по частям, находим, что

$$\int\limits_Q \frac{\partial^2 u_k(\tau,x)}{\partial\tau^2}(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial\tau}\Big[\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\Big]\cos(n_0,\tau)\,dS -$$
$$- \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial\tau}\Big[\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}(2t-\tau)\Big]\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ = \int\limits_P \frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t} t\,\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t}\,dP -$$
$$- \int\limits_P \frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} 2t\,\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\,dP + \int\limits_Q \frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ - \int\limits_Q \frac{\partial^2 u_k(\tau,x)}{\partial\tau^2}(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_Q \frac{\partial^2 u_k(\tau,x)}{\partial\tau^2}(2t-\tau)\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ = \frac{1}{2}\Big(\int\limits_P \frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t} t\,\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t}\,dP +$$
$$+ \int\limits_Q \frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ\Big) \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\frac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\,dQ, \qquad (30)$$

так как $\dfrac{\partial u_k(\tau,x)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0} = 0$.

Далее, справедливо равенство

$$\Big(\mathcal{B}u_k, (2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\{[2t-\tau]\mathcal{B}u_k, u_k\}\Big)_{0Q} + \frac{1}{2}\,(\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q}.$$

Применяя формулу Остроградского, имеем:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\{[2t-\tau]\mathcal{B}u_k, u_k\}\Big)_{0Q} = \int\limits_S (2t-\tau)(\mathcal{B}u_k)u_k\cos(\bar n_0,\tau)\,dS =$$
$$= -\int\limits_P 2t(\mathcal{B}u_k(0,x))u_k(0,x)\,dP + \int\limits_P t\,(\mathcal{B}u_k(t,x))u_k(t,x)\,dP.$$

Так как $u_k(0,x) = 0$, то

$$\Big(\mathcal{B}u_k, (2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q} = \frac{1}{2}\,(\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q} + \frac{1}{2}\,t(\mathcal{B}u_k, u_k(t,x))_{0P} \geqslant \frac{1}{2}\,(\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q}.$$

Таким образом, из этого неравенства и (30) следует, что

$$\Big(f, (2t-\tau))\frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q} \geqslant \frac{1}{2}\,(\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial\tau}, \frac{\partial u_k}{\partial\tau}\Big)_{0Q} \geqslant c\,\|u_k\|^2_{10Q}, \quad c>0.$$

Применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского к левой части, находим, что

$$c\,\|u_k\|^2_{10Q} \leqslant \|f\|_{0Q}\,\left\|(2t-\tau)\frac{\partial u_k}{\partial \tau}\right\|_{0Q} \leqslant \|f\|_{0Q}\,\left\|\frac{\partial u_k}{\partial \tau}\right\|_{0Q}.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\|f\|^2_{0Q} \geqslant \left(c\,\frac{\|u_k\|^2_{10Q}}{\left\|\dfrac{\partial u_k}{\partial \tau}\right\|_{0Q}} \right)^2 \geqslant \frac{c_2\,\|u_k\|^4_{10Q}}{\left\|\dfrac{\partial u_k}{\partial \tau}\right\|^2_{0Q} + (\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q}} = c^2\|u_k\|^2_{10Q}.$$

Последнее неравенство верно, так как скалярное произведение $(\mathcal{B}u_k, u_k)_{0Q} \geqslant 0$. Таким образом, $\|f\|_{0Q} \geqslant c\,\|u_k\|_{10Q}$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Пусть* $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ *— полная ортонормированная система гладких функций в* $L_2(P)$, *такая, что* $\rho_i(x)|_{x\in\partial P} = 0$, *а* $y_i(\tau)$ *— решение задачи* (29). *Тогда*

$$u_k(\tau, x) = \sum_{i=1}^{k} y_i(\tau)\rho_i(x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

задает в смысле определения 3 *приближенное решение задачи* (21), *а именно, выполняются соотношения:*

$$\|u_k - u\|_{10Q} \to 0, \quad \|\mathcal{L}u_k - f\|_{-1tQ} \to 0, \quad k \to \infty,$$

где u *— точное решение задачи* (21).

Доказательство. Согласно лемме 1 множество функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничено в $W^1_{20}(Q)$, а значит, слабо компактно в $W^1_{20}(Q)$; в нем можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ в $W^1_{20}(Q)$. Тогда в силу полноты $W^1_{20}(Q)$ подпоследовательность $\{u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ слабо сходится к некоторому пределу $\bar{u} \in W^1_{20}(Q)$. Покажем, что $\bar{u}$ — решение задачи (21). Для произвольной функции $\varphi(\tau) \in W^1_{20}[0,t]$ справедливо равенство

$$(\mathcal{L}u_{k_n}, \varphi(\tau)\rho_j(x))_{0Q} = (f, \varphi(\tau)\rho_j(x))_{0Q}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{31}$$

Так как $\|u_{k_n} - \bar{u}\|_{10Q} \to 0$, $k \to \infty$, то согласно неравенству (17) имеем

$$\|\mathcal{L}u_{k_n} - \mathcal{L}u_{k_m}\|_{-1tQ} \leqslant \|u_{k_n} - \bar{u}\|_{10Q} \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Итак, последовательность $\{\mathcal{L}u_{k_n}\}_{k_n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $W^{-1}_{2t}(Q)$ и имеет предел в $W^{-1}_{2t}(Q)$. Обозначим этот предел $\mathcal{L}\bar{u}$. Функция $\varphi(\tau)\rho_j(x)$ принадлежит $W^{-1}_{2t}(Q)$ и равенство (31) можно понимать в смысле билинейной формы, т.е. оно справедливо, если $\mathcal{L}u_{k_n} \in W^{-1}_{2t}(Q)$. Перейдем к пределу по $k \to \infty$ в (31). С учетом непрерывности скалярного произведения в $L_2(Q)$, получим $\langle \mathcal{L}\bar{u}, \varphi(\tau)\rho_j(x)\rangle_{tQ} = \langle f, \varphi(\tau)\rho_j(x)\rangle_{0Q}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Это выражение можно записать в виде

$$\langle \mathcal{L}\bar{u} - f, \varphi(\tau)\rho_j(x)\rangle_{tQ} = 0. \tag{32}$$

Так как значение j произвольно, $\{\rho_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — базис и функция $\varphi(\tau)$ из $W^1_{20}[0,t]$ также произвольна, то $\mathcal{L}\bar{u} - f = 0$, т.е. $\bar{u}$ — решение уравнения (21), что и требовалось доказать.

Следует отметить, что (32) справедливо и в случае, если $f \in W^{-1}_{2t}(Q)$.

Теорема 5. *Пусть* $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ *— полная ортонормированная система гладких функций в* $L_2(P)$, *причем* $\rho_i(x) \in W^1_2(P)$ *и* $\rho_i(x)|_{x\in\partial P} = 0$, *вектор-функция* $f(\tau, x)$ *принадлежит пространству* $W^{-1}_{2t}(Q)$, $\{f_\varepsilon(\tau, x)\}_{\varepsilon>0}$ *— последовательность осреднений функции* $f(\tau, x)$ *и функция* $y_{i\varepsilon}(\tau)$ *— решение задачи*

$$\frac{d^2 y_{i\varepsilon}(\tau)}{d\tau^2} + \sum_{j=1}^{k} y_{j\varepsilon}(\tau)(\mathcal{B}\rho_j, \rho_i)_{0P} = (f_\varepsilon, \rho_i)_{0P}, \quad y_{i\varepsilon}(0) = 0, \quad \left.\frac{dy_{i\varepsilon}}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|u_{k\varepsilon} - u\|_{0Q} \to 0, \quad \|\mathcal{L}u_{k\varepsilon} - f\|_{-1tQ} \to 0, \quad k \to \infty, \quad \varepsilon \to 0,$$

где $u_{k\varepsilon}(\tau, x) = \sum\limits_{i=1}^{k} y_{i\varepsilon}(\tau)\rho_i(x)$, $\|f_\varepsilon - f\|_{-1tQ} \to 0$, $\varepsilon \to 0$ *и* $u(\tau, x)$ *— решение задачи* (21).

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon(\tau, x)$ — решение задачи (21) с осредненной правой частью $f_\varepsilon(\tau, x)$ (это означает, что $\|f - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \to 0$, $\varepsilon \to 0$). Тогда по теореме 4 имеем

$$\|u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{10Q} \to 0, \quad \|\mathcal{L}u_{k\varepsilon} - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \to 0, \quad k \to \infty$$

и, согласно (17), получаем

$$c_0\,\|u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{0Q} \leqslant \|\mathcal{L}(u_{k\varepsilon} - u_\varepsilon)\|_{-1tQ}, \quad c_0 = \text{const}. \tag{33}$$

Так как $\|f - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то последовательность $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ фундаментальна. Действительно, $\|f_{\varepsilon_1} - f_\varepsilon\|_{-1tQ} \to 0$ при ε_1, $\varepsilon \to 0$, а из теоремы 2 и неравенства (17) вытекает, что $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_1}\|_{0Q} \to 0$, ε_1, $\varepsilon \to 0$. Обозначим $\bar{u} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$. Покажем, что $\bar{u} = u$. Неравенство (17) справедливо для всех $u \in L_2(Q)$, т.е. $\|\mathcal{L}u_\varepsilon\|_{-1tQ} \geqslant c\,\|u_\varepsilon\|_{0Q}$; следовательно,

$$\|\mathcal{L}(u_\varepsilon - u)\|_{-1tQ} = \|f_\varepsilon - f\|_{-1tQ} \geqslant c\,\|u_\varepsilon - u\|_{0Q}. \tag{34}$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, находим $0 \geqslant c\,\|\bar{u} - u\|_{0Q}$, т.е. $\bar{u} = u$.

Оценим норму $\|u - u_{k\varepsilon}\|_{0Q}$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$\|u - u_{k\varepsilon}\|_{0Q} \leqslant \|u - u_\varepsilon\|_{0Q} + \|u_\varepsilon - u_{k\varepsilon}\|_{0Q}.$$

Используя соотношение (34) и теорему 4, для любого фиксированного $\delta > 0$ можно подобрать величины k и ε так, чтобы $\|u - u_\varepsilon\|_{0Q} \leqslant \delta/2$ и $\|u_\varepsilon - u_{k\varepsilon}\|_{0Q} \leqslant \delta/2$. Тогда

$$\|u - u_{k\varepsilon}\|_{0Q} < \delta \to 0, \quad k \to \infty, \quad \varepsilon \to 0.$$

Теорема 5 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01–01–00398).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
2. *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: ИЛ, 1961.
3. *Диденко В.П.* О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением // ДАН СССР. 1972. **205**, № 4. 352–355.
4. *Диденко В.П.* О некоторых краевых задачах для многомерного уравнения смешанного типа // Дифференц. уравн. 1973. **9**, № 1. 43–51.
5. *Колос М.В., Колос И.В.* Методы оптимальной линейной фильтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
7. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
27.06.2002