

УДК 519.62

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ СХЕМ БОЛЬЦМАНА

Г. В. Кривовичев¹

Рассмотрена задача об исследовании устойчивости конечно-разностных решеточных схем Больцмана, построенных на основе специальной аппроксимации системы кинетических уравнений с помощью конечных разностей. Производные по пространственным переменным аппроксимируются не раздельно — осуществляется аппроксимация всего члена, содержащего эти производные. Рассмотрены три конечно-разностные схемы. Исследуется устойчивость в случае двух стационарных режимов течения в неограниченной области. Анализ устойчивости по начальным условиям производится с помощью метода Неймана на основе линейного приближения. Построены и исследованы области устойчивости в пространстве входных параметров. Показано, что все рассмотренные схемы являются условно устойчивыми. В широком диапазоне изменения параметров установлено, что площади областей устойчивости для рассмотренных в статье схем больше, чем для схем, основанных на раздельной аппроксимации производных по пространственным переменным.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, конечно-разностные решеточные схемы Больцмана, устойчивость по начальным условиям, метод Неймана, область устойчивости.

1. Введение. Метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, LBM) в настоящее время широко и эффективно используется при решении различных задач, возникающих в механике жидкости и газа [1, 2], физике плазмы [3–5] и других областях науки. Этот метод, в котором для расчетов течений используются системы дискретных кинетических уравнений специального вида, носящих название решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann equations, LBE), является альтернативой подходам, основанным на дискретизации уравнений, описывающих динамику сплошной среды.

Особыми преимуществами метод LBM обладает при решении задач со свободными поверхностями [6] и задач с фазовыми переходами [7–10]. Популярность метода и большое количество публикаций также во многом связаны с простотой его алгоритма и широкими возможностями для распараллеливания вычислений, особенно при реализации расчетов на многопроцессорных графических ускорителях [9–14].

Одним из недостатков метода LBM является постоянство значения числа Куранта для LBE-уравнений. Число Куранта равно единице (связано с физическими предпосылками), что задает жесткую связь значений шагов по времени и пространственным переменным и влияет на устойчивость метода [1]. Для исправления этой ситуации в литературе были предложены конечно-разностные решеточные схемы Больцмана (finite-difference-based lattice Boltzmann schemes) [15–17], которые позволяют варьировать значение шага по времени и таким образом влиять на устойчивость метода. Кроме того, конечно-разностные схемы позволяют использовать при расчетах неравномерные и адаптивные сетки.

В настоящей работе продолжаются исследования конечно-разностных решеточных схем, начатые в [18]. Рассматриваются разностные схемы первого и второго порядков аппроксимации, построенные посредством специальной аппроксимации скалярных произведений градиентов функций распределения на векторы возможных скоростей.

2. Конечно-разностные решеточные схемы Больцмана. В методе LBM течение среды рассматривается как динамика ансамбля псевдочастиц с заданными скоростями. Область, в которой происходит течение, разбивается сеткой с ячейками определенной формы, что задает в ней так называемую решетку (lattice). За шаг по времени δt псевдочастицы переходят между узлами решетки.

В дальнейшем будем рассматривать только плоский случай изотермического течения вязкой ньютоновской жидкости и только сетку с квадратными ячейками, построенную с шагом l по обоим декартовым координатам. В этом случае можно использовать набор скоростей модели $D2Q9$: $\mathbf{V}_i = V\mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, 9$,

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф; доцент, e-mail: gera1983k@bk.ru

где $V = \frac{l}{\delta t}$, а векторы \mathbf{v}_i задаются следующим образом: $\mathbf{v}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (-1, 0)$, $\mathbf{v}_5 = (0, -1)$, $\mathbf{v}_6 = (1, 1)$, $\mathbf{v}_7 = (-1, 1)$, $\mathbf{v}_8 = (-1, -1)$, $\mathbf{v}_9 = (1, -1)$.

Построение конечно-разностных решеточных схем осуществляется посредством аппроксимации производных, входящих в систему кинетических уравнений, описывающих динамику псевдочастиц в случае дискретного набора скоростей [16]. Эта система в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{(\text{eq})}). \quad (1)$$

Здесь t — безразмерное время (время, нормированное на δt), f_i — безразмерные функции распределения, $\nabla f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y} \right)$, x и y — безразмерные пространственные переменные (декартовы координаты, нормированные на l), $f_i^{(\text{eq})}$ — функции, аппроксимирующие безразмерные равновесные функции распределения, τ — безразмерное время релаксации.

В [18] рассматривались явные схемы, построенные на равномерных по безразмерному времени и по безразмерным пространственным переменным сетках с безразмерными шагами Δt и h соответственно. Производная по t аппроксимировалась с помощью правой разностной производной

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial t} \approx \frac{f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\Delta t}, \quad (2)$$

где t_j — узел сетки по времени, $\mathbf{r}_{kl} = (x_k, y_l)$ — узел пространственной сетки. Производные по пространственным переменным аппроксимировались с помощью центральных разностных производных:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})}{2h}, \quad \frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})}{2h},$$

с помощью направленных разностей первого порядка аппроксимации:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx R_{ix}^1 = \begin{cases} \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l})}{h}, & v_{ix} \geq 0, \\ \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{h}, & v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx R_{iy}^1 = \begin{cases} \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1})}{h}, & v_{iy} \geq 0, \\ \frac{f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{h}, & v_{iy} < 0, \end{cases}$$

и с помощью направленных разностей второго порядка аппроксимации:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial x} \approx R_{ix}^2 = \begin{cases} \frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-1l}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{k-2l})}{2h}, & v_{ix} \geq 0, \\ -\frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+1l}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{k+2l})}{2h}, & v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl})}{\partial y} \approx R_{iy}^2 = \begin{cases} \frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-1}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl-2})}{2h}, & v_{iy} \geq 0, \\ -\frac{3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+1}) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl+2})}{2h}, & v_{iy} < 0. \end{cases}$$

Эти схемы будем называть ЦР-схемой, НР1-схемой и НР2-схемой соответственно. Как можно видеть, в указанных схемах производные по пространственным переменным аппроксимируются отдельно друг от друга. В настоящей статье рассмотрим схемы, основанные на единой аппроксимации члена $\mathbf{v}_i \nabla f_i = v_{ix} \frac{\partial f_i}{\partial x} + v_{iy} \frac{\partial f_i}{\partial y}$, фигурирующего в (1). Будем полагать, что производная по времени аппроксимируется посредством (2). Будут исследованы три схемы, использующие аппроксимации вида

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{2h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i h) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h)), \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h)), \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_i \nabla f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \approx \frac{1}{2h} (3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h)). \quad (5)$$

Аппроксимируя (1) в узле (t_j, \mathbf{r}_{kl}) с использованием (2) и (3)–(5), получим разностные схемы

$$f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) - \frac{\Delta t}{2h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i h) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h)), \quad (6)$$

$$f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) - \frac{\Delta t}{h} (f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h)), \quad (7)$$

$$f_i(t_j + \Delta t, \mathbf{r}_{kl}) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{r}_{kl})) - \frac{\Delta t}{2h} (3f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - 4f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i h) + f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl} - 2\mathbf{v}_i h)). \quad (8)$$

Схему (6) можно считать аналогом ЦР-схемы, схемы (7) и (8) — аналогами НР1- и НР2-схем с учетом того, что член $\mathbf{v}_i \nabla f_i$ аппроксимируется единым образом.

В дальнейшем схемы (6)–(8) будем называть схемами 1, 2 и 3 соответственно. Не представляет особого труда показать, что схемы 1 и 3 аппроксимируют систему (1) со вторым порядком по пространственным переменным в сеточной норме C на классе трижды непрерывно-дифференцируемых функций, а схема 2 — только с первым порядком.

3. Постановка задачи об исследовании устойчивости. По аналогии с работами [18–20], будем исследовать устойчивость только по начальным условиям. Рассматриваются стационарные пространственно однородные режимы течения в неограниченной области, для которых безразмерные макровеличины плотность ρ и скорость $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ являются постоянными. Значения функций $f_i^{(\text{eq})}$ в этом случае тоже являются постоянными: $f_i^{(\text{eq})} = \bar{f}_i^{(\text{eq})} = C_i = \text{const}$ [21]. Их совокупность является невозмущенным решением каждой из разностных систем (6)–(8). Будем исследовать два режима течения: $u_x = U = \text{const}$, $u_y = 0$ (режим 1) и $u_x = u_y = U = \text{const}$ (режим 2), предполагая, что $\rho = 1$.

Как и в работах [18–20], будет исследоваться устойчивость по линейному приближению с помощью метода Неймана. При его применении задачи об исследовании устойчивости невозмущенных решений систем (6)–(8) сведутся к задачам исследования устойчивости нулевых решений систем разностных уравнений вида

$$F_i(t_j + \Delta t) = \sum_{m=1}^9 G_{im} F_m(t_j), \quad (9)$$

где сеточные функции F_i используются в соотношениях $\delta f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) = F_i(t_j) \exp(i\Theta \mathbf{r}_{kl})$ [19], в которых $\delta f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j)$ — отклонения от невозмущенных решений систем (6)–(8), $i^2 = -1$, $\Theta = (\theta_x, \theta_y)$, $\theta_x \in [-\pi, \pi]$ и $\theta_y \in [-\pi, \pi]$.

Выражения для коэффициентов G_{im} в (9) для схемы 1 имеют вид

$$G_{im} = \begin{cases} 1 - \frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\Delta t}{2h} \left(\exp(ih(v_{ix}\theta_x + v_{iy}\theta_y)) - \exp(-ih(v_{ix}\theta_x + v_{iy}\theta_y)) \right) + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial f_m} \left(\bar{\mathbf{f}}^{(eq)} \right), & m = i, \\ \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} \left(\bar{\mathbf{f}}^{(eq)} \right), & m \neq i. \end{cases}$$

Для схемы 2:

$$G_{im} = \begin{cases} 1 - \frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\Delta t}{h} \left(1 - \exp(-ih(v_{ix}\theta_x + v_{iy}\theta_y)) \right) + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial f_m} \left(\bar{\mathbf{f}}^{(eq)} \right), & m = i, \\ \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} \left(\bar{\mathbf{f}}^{(eq)} \right), & m \neq i. \end{cases}$$

Для схемы 3:

$$G_{im} = \begin{cases} 1 - \frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\Delta t}{2h} \left(3 - 4 \exp(-ih(v_{ix}\theta_x + v_{iy}\theta_y)) + \exp(-2ih(v_{ix}\theta_x + v_{iy}\theta_y)) \right) + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial f_m} \left(\bar{\mathbf{f}}^{(eq)} \right), & m = i, \\ \frac{\Delta t}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} \left(\bar{\mathbf{f}}^{(eq)} \right), & m \neq i. \end{cases}$$

Нулевое решение системы (9) будет устойчиво, если все собственные значения комплексной матрицы $G = \{G_{im}\}_{i,m=1,9}$ по модулю не будут превосходить единицы [22, 23].

При всех принятых выше допущениях собственные значения матрицы G являются функциями переменных $\theta_x, \theta_y, U, \Delta t, h$ и τ , причем $U, \Delta t, h$ и τ являются входными параметрами. Для упрощения

проведения расчетов вместо Δt и h рассматривался параметр Куранта $\gamma = v \frac{\Delta t}{h}$, где $v = 1$ — модуль безразмерной скорости псевдочастиц по основным направлениям решетки (по направлениям осей декартовой прямоугольной системы координат).

Задачи на поиск собственных значений матрицы G численно решались с помощью QR-алгоритма, реализованного на языке FORTRAN 90 в пакете EISPACK [24]. Исследование устойчивости схем проводится посредством анализа областей устойчивости на плоскости параметров (τ, U) при различных значениях γ .

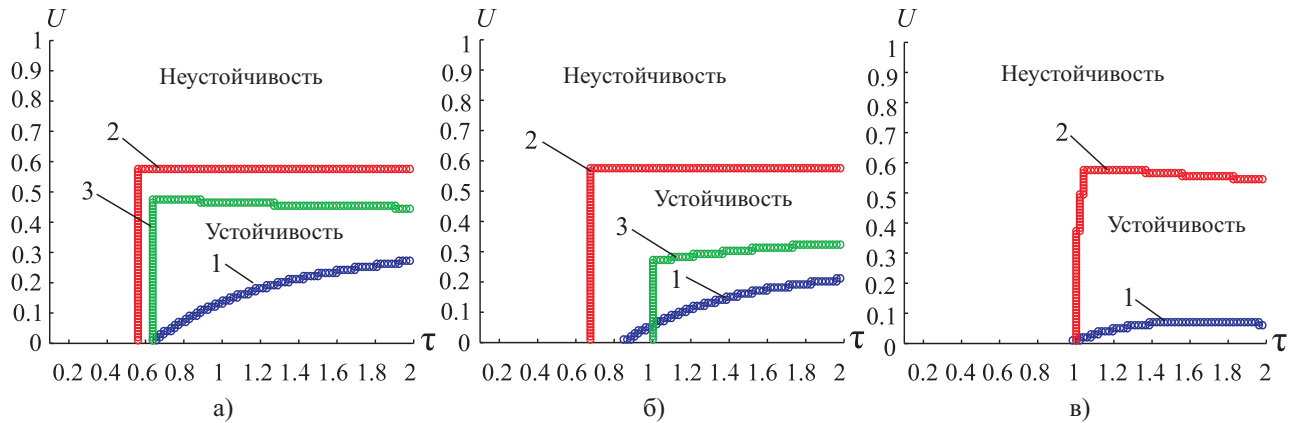


Рис. 1. Границы областей устойчивости на плоскости (τ, U) при $\tau \in (0, 2]$ в случае режима 1: а) $\gamma = 0.1$; б) $\gamma = 0.25$; в) $\gamma = 0.5$. Кривая 1 — схема 1, кривая 2 — схема 2, кривая 3 — схема 3

4. Области устойчивости. При исследовании устойчивости рассматривались следующие значения γ : 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1. Область изменения параметров (τ, U) разбивалась равномерной сеткой из 100×100 узлов. Точка считалась входящей в область устойчивости, если при фиксированных τ и U для всех значений (θ_x, θ_y) все собственные значения матрицы G по модулю не превосходили единицы. Область изменения параметров (θ_x, θ_y) разбивалась сеткой из 200×200 узлов (для контроля производился расчет и для сетки из 500×500 узлов). Параметр U изменялся от 0 до 1. Максимально возможное значение U , при котором имеет место устойчивость, обозначим через \bar{U} . Площадь области устойчивости вычислялась как мера Жордана плоского множества.

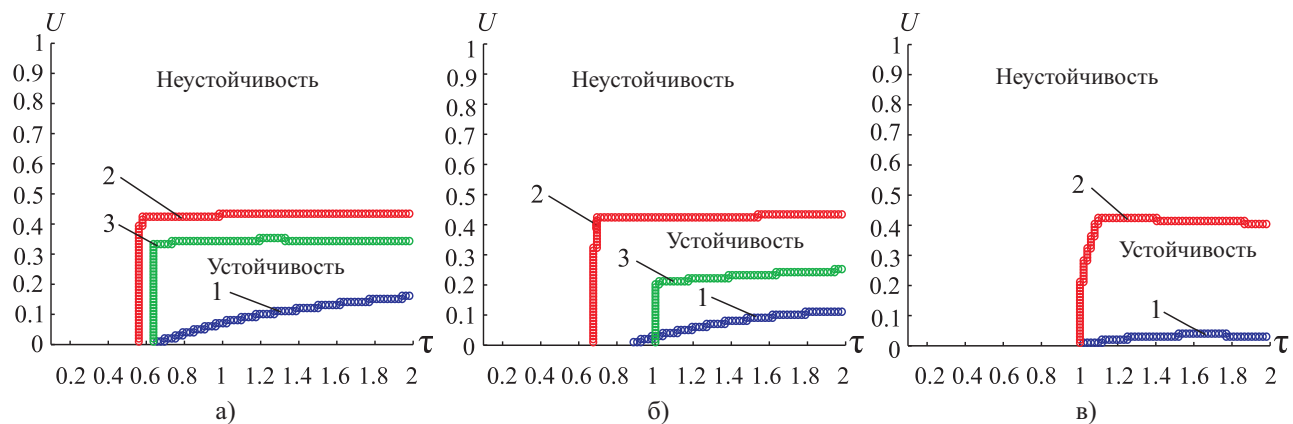


Рис. 2. Границы областей устойчивости на плоскости (τ, U) при $\tau \in (0, 2]$ в случае режима 2: а) $\gamma = 0.1$; б) $\gamma = 0.25$; в) $\gamma = 0.5$. Кривая 1 — схема 1, кривая 2 — схема 2, кривая 3 — схема 3

Сначала рассмотрим случай, когда значения параметра τ принадлежат промежутку $(0, 2]$, что часто имеет место при решении задач о течениях с большими и умеренными числами Рейнольдса [21]. Области устойчивости для схем 1–3 при $\gamma = 0.75$ и $\gamma = 1$ оказались пустыми, что имеет место и для схем, рассмотренных в [18]. Этот факт говорит о преимуществе ЛВЕ (для которого, как указывалось выше, справедлив только случай $\gamma = 1$) и над конечно-разностными схемами 1–3 в таком диапазоне изменения параметра τ . В случае режима 1 площади областей устойчивости оказались больше, чем в случае режима 2 при всех значениях γ .

На рис. 1 и 2 представлены формы областей устойчивости для схем 1–3 в случаях режимов 1 и 2 при различных значениях γ , а в табл. 1 и 2 приведены значения \bar{U} и соответствующие им интервалы изменения τ . Прочерки в ячейках таблиц означают, что при таком значении γ область устойчивости является пустой. В табл. 3 и 4 приведены значения площади области устойчивости схем 1–3 и схем из [18] в зависимости от γ .

Таблица 1

Связь значений параметров γ , \bar{U} и τ для случая режима 1

γ	Схема 1		Схема 2		Схема 3	
0.1	$\bar{U} = 0.27$	$\tau \in [1.96, 2]$	$\bar{U} = 0.59$	$\tau \in [0.57, 2]$	$\bar{U} = 0.48$	$\tau \in [0.62, 0.63]$
0.25	$\bar{U} = 0.2$	$\tau \in [1.96, 2]$	$\bar{U} = 0.58$	$\tau \in [0.68, 2]$	$\bar{U} = 0.32$	$\tau \in [1.75, 2]$
0.5	$\bar{U} = 0.06$	$\tau \in [1.39, 1.97]$	$\bar{U} = 0.58$	$\tau \in [1.05, 1.39]$	—	—

Таблица 2

Связь значений параметров γ , \bar{U} и τ для случая режима 2

γ	Схема 1		Схема 2		Схема 3	
0.1	$\bar{U} = 0.15$	$\tau \in [1.97, 2]$	$\bar{U} = 0.44$	$\tau \in [0.98, 2]$	$\bar{U} = 0.35$	$\tau \in [1.2, 1.35]$
0.25	$\bar{U} = 0.1$	$\tau \in [1.8, 2]$	$\bar{U} = 0.43$	$\tau \in [1.54, 2]$	$\bar{U} = 0.25$	$\tau \in [1.97, 2]$
0.5	$\bar{U} = 0.04$	$\tau \in [1.51, 1.76]$	$\bar{U} = 0.43$	$\tau \in [1.05, 1.4]$	—	—

Таблица 3

Площади областей устойчивости на плоскости (τ, U) при $\tau \in (0, 2]$ в случае режима 1

γ	Схема 1	ЦР	Схема 2	НР1	Схема 3	НР2
0.1	0.261	0.341	0.872	0.825	0.661	0.554
0.25	0.167	0.266	0.802	0.602	0.319	0
0.5	0.0631	0.0826	0.586	0	0	0

Таблица 4

Площади областей устойчивости на плоскости (τ, U) при $\tau \in (0, 2]$ в случае режима 2

γ	Схема 1	ЦР	Схема 2	НР1	Схема 3	НР2
0.1	0.144	0.227	0.853	0.801	0.493	0.323
0.25	0.0886	0.197	0.594	0.469	0.242	0
0.5	0.0306	0.0496	0.427	0	0	0

Сравнивая схемы 1–3 со схемами из [18], отметим, что площади областей устойчивости для случая ЦР-схемы больше, чем для схемы 1 в случае обоих режимов. При обоих режимах площади областей устойчивости для схемы 2 больше, чем для НР1-схемы, причем использование направленных конечных разностей для аппроксимации члена $\mathbf{v}_i \nabla f_i$ лучше влияет на устойчивость: в случае НР1-схемы области устойчивости для случая $\gamma \geq 0.5$ являются пустыми [18], тогда как для схемы 2 это не так в случае обоих режимов (табл. 1–4). Особо отметим случай сравнения схемы 3 и НР2-схемы: как показано в [18], для последней при $\gamma = 0.25$ область устойчивости является пустой, в случае же схемы 3 она становится пустой лишь при $\gamma = 0.5$, т.е. повышение порядка в случае использования направленных конечных разностей при замене члена $\mathbf{v}_i \nabla f_i$ лучше влияет на устойчивость, чем при раздельной аппроксимации производных f_i .

После проведения расчетов при рассмотрении более широкого промежутка изменения значений τ от 0 до 100 при сравнении схем 1–3 и схем из [18] было установлено, что использование аппроксимаций (3)–(5) для всех трех случаев позволяет улучшить устойчивость. В табл. 5–6 приведены площади областей

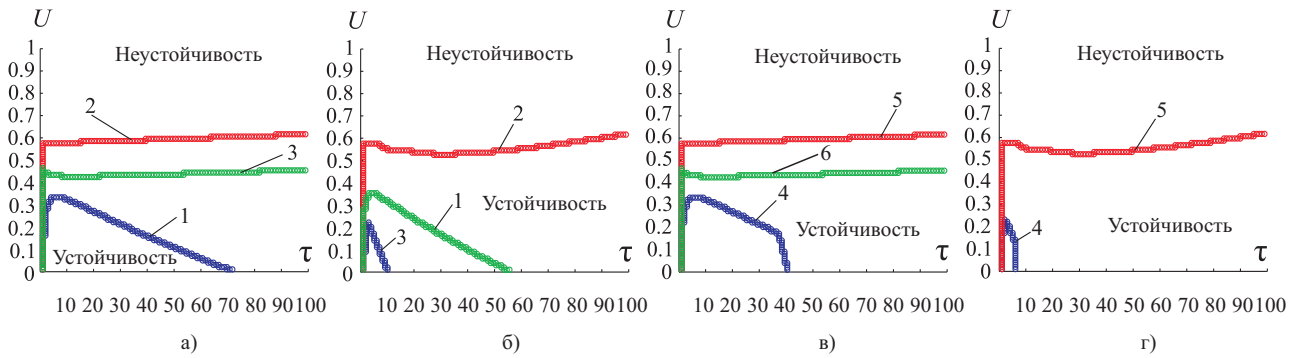


Рис. 3. Границы областей устойчивости на плоскости (τ, U) при $\tau \in (0, 100]$ в случае режима 1

устойчивости, их границы представлены на рис. 3 и 4, где приняты следующие обозначения: а) схемы 1–3 при $\gamma = 0.1$; б) схемы 1–3 при $\gamma = 0.25$; в) схемы из [18] при $\gamma = 0.1$; г) схемы из [18] при $\gamma = 0.25$. Кривая 1 соответствует схеме 1, кривая 2 – схеме 2, кривая 3 – схеме 3, кривая 4 – ЦР-схеме, кривая 5 – НР1-схеме, кривая 6 – НР2-схеме.

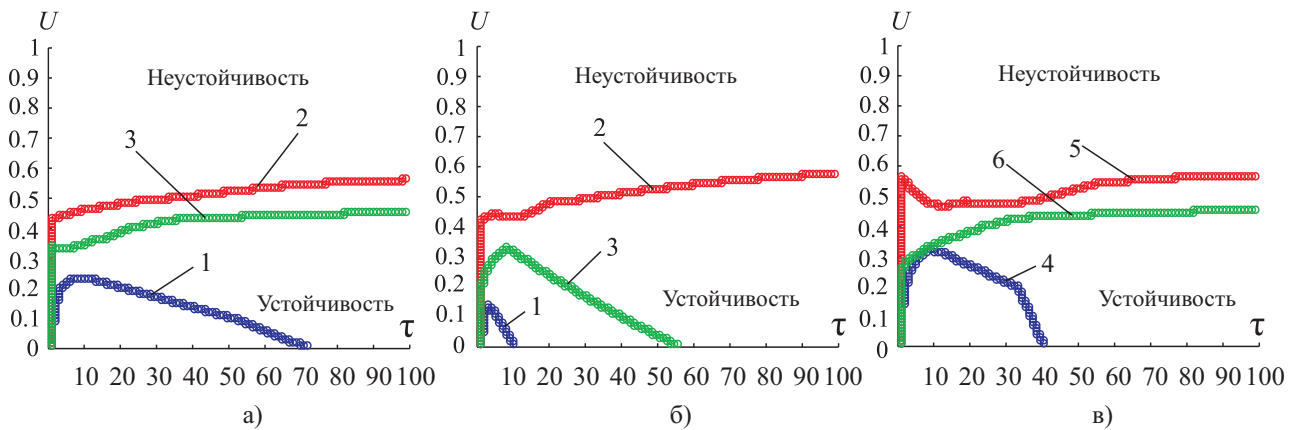


Рис. 4. Границы областей устойчивости на плоскости (τ, U) при $\tau \in (0, 100]$ в случае режима 2

Площади областей устойчивости для схемы 1 оказались больше площадей для ЦР-схемы при всех значениях γ в обоих режимах, хотя они и сужаются при увеличении τ .

В случае режима 1 значение τ , ограничивающее сверху возможные значения этого параметра для точек областей устойчивости при $\gamma = 0.1$, равно 72, при $\gamma = 0.25$ равно 10.5, а при $\gamma = 0.5$ равно 2.7. Аналогичные значения τ для случая ЦР-схемы при указанных γ равны 41, 7 и 1.4 соответственно. В случае режима 2 эти значения τ соотносятся таким образом: $\tau = 73, 11, 2.5$ для случая схемы 1 и $\tau = 41, 6.5, 1.42$ для случая ЦР-схемы.

Таблица 5
Площади областей устойчивости на плоскости (τ, U)
при $\tau \in (0, 100]$ в случае режима 1

γ	Схема 1	ЦР	Схема 2	НР1	Схема 3	НР2
0.1	12.85	10.24	58.95	58.93	43.56	43.55
0.25	1.316	1.152	55.47	55.42	10.30	0
0.5	0.1218	0.09224	53.17	0	0	0
0.75	0	0	81.52	0	0	0

В случае НР1-схемы и схемы 2 площади областей устойчивости близки по величине при всех γ (отличаются только во втором знаке после запятой). Однако в случае НР1-схемы площади областей устойчивости становятся пустыми уже при $\gamma = 0.5$, тогда как для схемы 2 – только после $\gamma = 0.75$ для обоих

Таблица 6
Площади областей устойчивости на плоскости (τ, U)
при $\tau \in (0, 100]$ в случае режима 2

γ	Схема 1	ЦР	Схема 2	НР1	Схема 3	НР2
0.1	10.08	9.509	51.12	51.10	41.76	41.35
0.25	1.187	1.023	51.03	0	9.896	0
0.5	0.0511	0.0314	51.68	0	0	0
0.75	0	0	52.39	0	0	0

режимов. Похожая ситуация наблюдается и при сравнении НР2-схемы и схемы 3 — величины площадей тоже близки, но для схемы 3 область устойчивости становится пустой только после $\gamma = 0.25$, тогда как у НР2-схемы — уже после $\gamma = 0.1$. Отметим, что площади областей устойчивости для схемы 2 при возрастании значений γ меняются немонотонным образом, а у схем 1 и 3 при возрастании γ области сужаются.

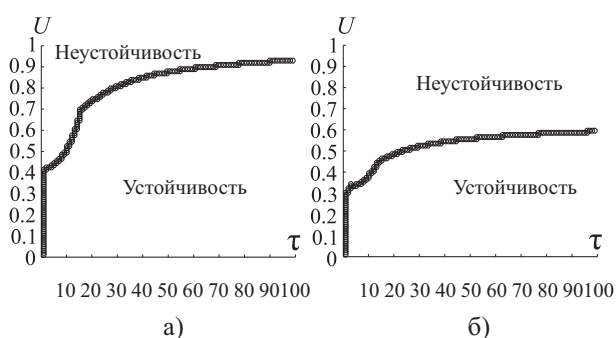


Рис. 5. Границы областей устойчивости на плоскости (τ, U) при $\tau \in (0, 100]$ для решеточного уравнения Больцмана: а) режим 1; б) режим 2

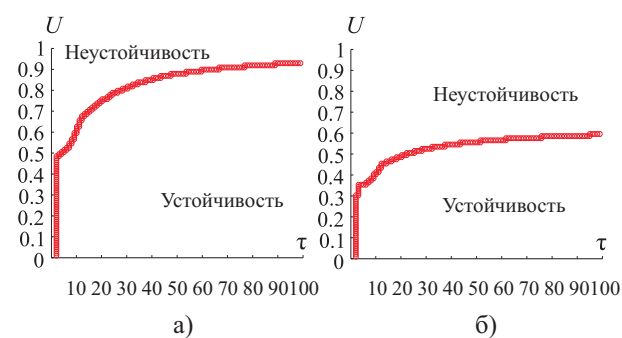


Рис. 6. Границы областей устойчивости на плоскости (τ, U) при $\tau \in (0, 100]$ для случая схемы 2 при $\gamma = 0.75$: а) режим 1; б) режим 2

Если сравнивать все схемы, то наибольшие площади областей устойчивости при всех значениях γ были установлены для случая схемы 2. Поскольку для конечно-разностных схем области устойчивости при $\gamma = 1$ являются пустыми, то и схемы (6)–(8) в этом плане не могут конкурировать с ЛВЕ, границы областей устойчивости для которого представлены на рис. 5, площади областей устойчивости равны 80.60 и 52.35 для случаев режимов 1 и 2 соответственно. Хотя при меньших значениях γ площади областей устойчивости у схемы 2 оказываются больше (например, при $\gamma = 0.75$ (рис. 6)), площади областей устойчивости равны 81.52 и 52.39 для случаев режима 1 и 2 соответственно.

5. Заключение. Представленные результаты позволяют судить о том, что устойчивость явных конечно-разностных решеточных схем Больцмана может быть улучшена за счет использования специальных аппроксимаций производных по пространственным переменным, хотя схемы все равно остаются условно устойчивыми. Интересно отметить, что ЛВЕ обладает преимуществами по сравнению с рассмотренными в данной статье и в [18] конечно-разностными схемами в широком диапазоне изменения параметров τ и U .

Полученные в работе результаты можно рассматривать как решения тестовых задач, которые могут оказаться полезными при проведении исследований и сравнении друг с другом различных решеточных схем Больцмана. Отметим, что в работе не учитывалось влияние граничных условий для функций распределения, различные варианты которых по-разному влияют на свойство устойчивости [25–27].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen S., Doolen G.D.* Lattice Boltzmann method for fluid flows // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1998. **30**. 329–364.
2. *Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D.* The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // *International Journal of Multiphase Flow*. 2003. **29**. 117–169.
3. *Dellar P.G.* Lattice kinetic schemes for magnetohydrodynamics // *Journal of Computational Physics*. 2002. **179**. 95–126.
4. *Li H., Ki H.* Lattice Boltzmann simulation of weakly ionized plasmas and fluid flows using physical properties of fluids // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2009. **42**. 155501–155513.

5. Zhang X., Deguchi Y., Liu J. Numerical simulation of laser induced weakly ionized helium plasma process by lattice Boltzmann method // Japanese Journal of Applied Physics. 2012. **51**. 01AA04–01AA06.
6. Thuerey N. Physically based animation of free surface flows with the lattice Boltzmann method. Thesis of PhD dissertation. University of Erlangen. Nürnberg, 2007.
7. Куперштох А.Л. Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана // Вестник НГУ. Сер. “Математика, механика, информатика”. 2005. **5**, вып. 3. 29–42.
8. Куперштох А.Л. Метод решеточных уравнений Больцмана для моделирования двухфазных систем типа жидкость–пар // Современная наука. 2010. **2**, № 4. 56–63.
9. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 130–138.
10. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование методом LBE на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 384–390.
11. Грачев Н.Е., Дмитриев А.В., Сенин Д.С. Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 227–231.
12. Бижулов Д.А., Сенин Д.С., Демин Д.С., Дмитриев А.В., Грачев Н.Е. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**, № 1. 13–19.
13. Kuznik F., Obrecht C., Rusaouen G., Roux J.-J. LBM based flow simulation using GPU computing processor // Computers and Mathematics with Applications. 2010. **59**. 2380–2392.
14. Obrecht C., Kuznik F., Tourancheau B., Roux J.-J. A new approach to the lattice Boltzmann method for graphics processing units // Computers and Mathematics with Applications. 2011. **61**. 3628–3638.
15. Seta T., Takahashi R. Numerical stability analysis of FDLBM // Journal of Statistical Physics. 2002. **7**, N 1/2. 557–572.
16. Sofonea V., Sekerka R.F. Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // Journal of Computational Physics. 2003. **184**. 422–434.
17. Tsutahara M. The finite-difference lattice Boltzmann method and its application in computational aero-acoustics // Fluid Dynamics Research. 2012. **44**. 045507–045525.
18. Кривовичев Г.В. Исследование устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 332–340.
19. Sterling J.D., Chen S. Stability analysis of lattice Boltzmann methods // Journal of Computational Physics. 1996. **123**. 196–206.
20. Kupershtokh A.L. Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations // Computers and Mathematics with Applications. 2010. **59**. 2236–2245.
21. Wolf-Gladrow D.A. Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
22. Рухтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
23. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. Долгопрудный: Изд. Дом “Интеллект”, 2008.
24. Smith B., Boyle J., Dongarra J., Garbow B., Ikebe Y., Klema V., Moler C. Matrix eigensystem routines. EISPACK guide. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 6. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
25. Latt J., Chopard B., Malaspina O., Deville M., Michler A. Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method // Physical Review E. 2008. **77**. 056703-1–056703-16.
26. Verschaeve J.C.G. Analysis of the lattice Boltzmann Bhatnagar–Gross–Krook no-slip boundary condition: ways to improve accuracy and stability // Physical Review E. 2009. **80**. 036703-1–056703-23.
27. Семенов С.А., Кривовичев Г.В. Численное исследование подходов к реализации граничных условий в методе решеточных уравнений Больцмана // Процессы управления и устойчивость. Труды 43-й Международной научной конференции студентов и аспирантов. СПб.: Издат. Дом С.-Петербург. ун-та, 2012. 196–201.

Поступила в редакцию
22.09.2012