

УДК 519.632.4

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ В СЛУЧАЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ПРОВОДИМОСТИ И НЕСКОЛЬКИХ ИЗМЕРЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ

С. В. Гаврилов¹

Рассматривается задача электроимпедансной томографии в ограниченной трехмерной области с кусочно-постоянным коэффициентом электрической проводимости. Граница неоднородности предполагается неизвестной. Обратная задача состоит в определении поверхности, являющейся границей неоднородности, по нескольким измерениям потенциала и его нормальной производной на внешней границе области. Предлагается итерационный метод решения обратной задачи, приводятся результаты вычислительных экспериментов. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00259).

Ключевые слова: электроимпедансная томография, кусочно-постоянная проводимость, неизвестная граница, обратная задача, итерационный метод.

1. Введение. Под задачей электроимпедансной томографии обычно подразумевают задачу определения коэффициента электропроводности неоднородного ограниченного тела по измерениям характеристик электрического поля на его поверхности [1]. В настоящей статье рассматривается задача электроимпедансной томографии в ограниченной трехмерной области с кусочно-постоянной электрической проводимостью $\sigma(M)$, значения которой считаются известными. Обратная задача сводится к поиску поверхности, представляющей собой границу, разделяющую области с разной электропроводностью. Исходной информацией являются несколько пар условий Дирихле и Неймана на внешней границе области.

Исследованию единственности решения задачи электроимпедансной томографии в различных постановках посвящены работы [2–5]. Численные методы ее решения рассматривались в работах [6–12]. В данной работе предлагается итерационный метод решения задачи электроимпедансной томографии в случае, когда на внешней границе заданы несколько пар условий Дирихле и Неймана. Перейдем к постановке задачи.

Рассмотрим в трехмерном пространстве односвязную ограниченную область Ω с границей Γ_0 . Пусть Ω_1 — односвязная область с границей Γ_1 , такая, что $\overline{\Omega}_1 \in \Omega$. Поверхности Γ_0 и Γ_1 достаточно гладкие. Обозначим через Ω_0 область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$.

Будем рассматривать краевые задачи. Требуется определить функции $u^j(M)$, такие, что $u^j \in C(\overline{\Omega})$, $u^j(M) = u_i^j(M)$, $M \in \Omega_i$ ($i = 0, 1$), где $u_i^j \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega}_i)$ ($i = 0, 1$),

$$\Delta u_i^j(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \quad (1)$$

$$u_0^j(M) = u_1^j(M), \quad M \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0^j(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1^j(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \quad (3)$$

$$u_0^j(M) = f^j(M), \quad M \in \Gamma_0. \quad (4)$$

Здесь $j = 1, 2, \dots, t$; σ_0, σ_1 — заданные положительные постоянные; $f^j(M)$ — известные функции, непрерывные и не постоянные на Γ_0 .

Сформулируем обратную задачу. Пусть в краевых задачах (1)–(4) поверхность Γ_0 , постоянные σ_0 и σ_1 и функции $f^j(M)$, $j = 1, 2, \dots, t$, на Γ_0 заданы, а поверхность Γ_1 не известна. Требуется определить Γ_1 , если для $j = 1, 2, \dots, t$ задана следующая дополнительная информация о решениях $u^j(M)$ задач (1)–(4):

$$\frac{\partial u^j(M)}{\partial n} = g^j(M), \quad M \in \Gamma_0. \quad (5)$$

Здесь $g^j(M)$ известные функции, непрерывные на Γ_0 , а n — внутренняя нормаль к Γ_0 .

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, 119991, Москва; аспирант, e-mail: gvrlserg@gmail.com

В настоящей статье строится итерационный метод численного решения поставленной обратной задачи. Метод основан на выводе нелинейного операторного уравнения для функции, задающей неизвестную поверхность Γ_1 , и построении регуляризованного итерационного метода решения полученного операторного уравнения. Подобный метод решения двумерной задачи электроимпедансной томографии в случае нескольких измерений рассматривался в работе [13]. Итерационному методу решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае одного измерения посвящена работа [14].

2. Операторное уравнение для неизвестной поверхности. В этом разделе выводится операторное уравнение для функции, определяющей неизвестную поверхность Γ_1 . Будем предполагать, что класс неизвестных поверхностей Γ_1 таков, что известна точка M_0 , являющаяся общим центром звездности для поверхностей Γ_1 из этого класса. Кроме того, поверхности Γ_1 задаются в сферической системе координат с центром в точке M_0 функциями $r(\theta, \varphi) : r(\theta, \varphi) \in C^2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}$ и $\|r\|_{C^2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}} \leq c_0$, где c_0 — фиксированное число. Будем также считать, что известная поверхность Γ_0 задается в той же сферической системе координат функцией $R(\theta, \varphi) : R(\theta, \varphi) \in C^2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}$.

Операторное уравнение для неизвестной поверхности имеет вид

$$A_m r = g_m, \tag{6}$$

где оператор $A_m = (A^1, A^2, \dots, A^m)$ отображает функцию $r(\theta, \varphi)$ в вектор-функцию $g_m = (g^1, g^2, \dots, g^m)$. Каждый из операторов A^j ($j = 1, 2, \dots, m$) соответствует одной паре измерений $f^j(M)$, $g^j(M)$ и строится по принципам, изложенным в работе [14]. Рассмотрим построение оператора A^j при фиксированном j подробнее.

Функция $w^j(M)$ представляется с помощью суммы двух потенциалов простого слоя

$$w^j(M) = \iint_{\Gamma_0} \mu^j(P) \frac{1}{\rho_{MP}} ds_P + (\sigma_0 - \sigma_1) \iint_{\Gamma_1} \nu^j(P) \frac{1}{\rho_{MP}} ds_P, \quad M \in \Omega, \tag{7}$$

где ρ_{MP} — расстояние между точками M и P , а плотности $\mu^j(P)$ и $\nu^j(P)$ являются решениями системы интегральных уравнений

$$\iint_{\Gamma_0} \mu^j(P) \frac{1}{\rho_{MP}} ds_P + (\sigma_0 - \sigma_1) \iint_{\Gamma_1} \nu^j(P) \frac{1}{\rho_{MP}} ds_P = f^j(M), \quad M \in \Gamma_0, \tag{8}$$

$$2\pi\nu^j(M) + \frac{1}{\sigma_0 + \sigma_1} \iint_{\Gamma_0} \mu^j(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) ds_P + \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \iint_{\Gamma_1} \nu^j(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) ds_P = 0, \quad M \in \Gamma_1, \tag{9}$$

где n_m — внутренняя нормаль в точке M к поверхности Γ_1 .

Переходя в уравнениях (8) и (9) к сферическим координатам, получим следующие уравнения при $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi N(\theta, \varphi, \xi, \alpha) \mu^j(\xi, \alpha) d\xi d\alpha + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi K(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) \nu^j(\xi, \alpha) d\xi d\alpha = f^j(\theta, \varphi), \tag{10}$$

$$2\pi\nu^j(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sigma_0 + \sigma_1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi W(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) \mu^j(\xi, \alpha) d\xi d\alpha + \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Q(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) \nu^j(\xi, \alpha) d\xi d\alpha = 0. \tag{11}$$

Представления функций $N(\theta, \varphi, \xi, \alpha)$, $K(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r)$, $W(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r)$ и $Q(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r)$ приведены в работе [14]. Отметим, что в обозначениях ряда функций подчеркивается их зависимость от функции r . Например, вместо $K(\theta, \varphi, \xi, \alpha)$ используется обозначение $K(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r)$.

Используем дополнительное условие (5), представление (7) и свойства потенциала простого слоя:

$$-2\pi\mu^j(M) + \iint_{\Gamma_0} \mu^j(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) ds_P + (\sigma_0 - \sigma_1) \iint_{\Gamma_1} \nu^j(P) \frac{\partial}{\partial n_m} \left(\frac{1}{\rho_{MP}} \right) ds_P = g^j(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{12}$$

Здесь n_m — внутренняя нормаль в точке M к поверхности Γ_0 . После перехода в уравнении (12) к сферическим координатам получим при $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$-2\pi\mu^j(\theta, \varphi) + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S(\theta, \varphi, \xi, \alpha) \mu^j(\xi, \alpha) d\xi d\alpha + (\sigma_0 - \sigma_1) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r) \nu^j(\xi, \alpha) d\xi d\alpha = g^j(\theta, \varphi). \tag{13}$$

Представления для функций $S(\theta, \varphi, \xi, \alpha)$ и $T(\theta, \varphi, \xi, \alpha; r)$ приведены в [14].

Уравнения (10), (11) и (13) определяют нелинейное операторное уравнение относительно неизвестной функции $r(\theta, \varphi)$: $A^j r = g^j$. Для вычисления функции $(A^j r)(\theta, \varphi)$ при заданной $r(\theta, \varphi)$ нужно решить систему интегральных уравнений (10), (11), определить $\mu^j(\theta, \varphi)$ и $\nu^j(\theta, \varphi)$, а затем вычислить значение оператора, стоящего в левой части уравнения (13).

После построения операторов A^j для всех $j = 1, 2, \dots, m$ получим операторное уравнение (6) для неизвестной функции $r(\theta, \varphi)$.

3. Численный метод решения обратной задачи. Уравнение (6) решается итерационным методом. В качестве начального приближения $r_0(\theta, \varphi)$ неизвестного контура принимается сфера. Пусть $r_n(\theta, \varphi)$ — функция, полученная на n -м шаге итерационного процесса. После линеаризации уравнения (6) в окрестности функции $r_n(\theta, \varphi)$ получается линейное операторное уравнение для функции $\rho_n(\theta, \varphi)$:

$$B_m [r_n] \rho_n = \hat{g}_m [r_n]. \tag{14}$$

Оператор $B_m = (B^1, B^2, \dots, B^m)$ отображает функцию $\rho_n(\theta, \varphi)$ в вектор-функцию $\hat{g}_m = (\hat{g}^1, \hat{g}^2, \dots, \hat{g}^m)$.

Каждый из операторов B^j , $j = 1, 2, \dots, m$, получается линеаризацией соответствующего оператора A^j в окрестности функции $r_n(\theta, \varphi)$. Построение такого линеаризованного оператора описано в работе [14].

В результате решения уравнения (14) определяется функция $\rho_n(\theta, \varphi)$, которая позволяет получить $r_{n+1}(\theta, \varphi)$:

$$r_{n+1}(\theta, \varphi) = r_n(\theta, \varphi) + \rho_n(\theta, \varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{15}$$

Численная реализация итерационного метода проводится следующим образом. На прямоугольнике $\{0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ вводится сетка (θ_i, φ_j) и сеточные аналоги $r_{i,j}^n$ функций $r_n(\theta, \varphi)$. Задача решения уравнения (14) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений для неизвестной сеточной функции $\rho_{i,j}^n$. Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений применяется метод регуляризации Тихонова. Величина параметра регуляризации согласовывается с точностью задания исходной информации и с шагом итерационного процесса n .

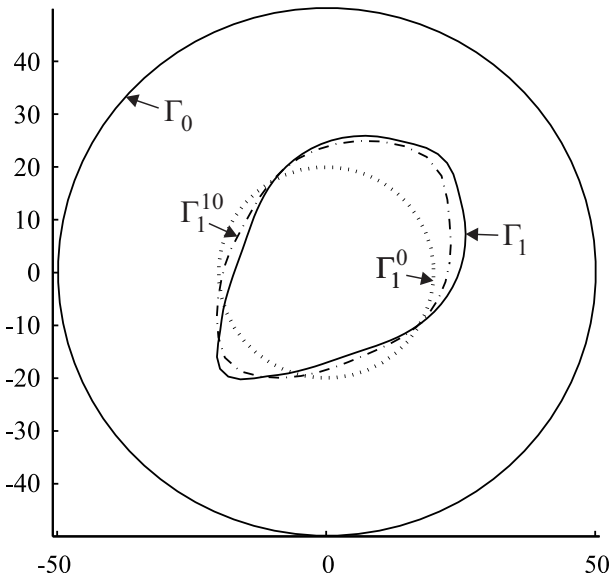


Рис. 1. $m = 2$

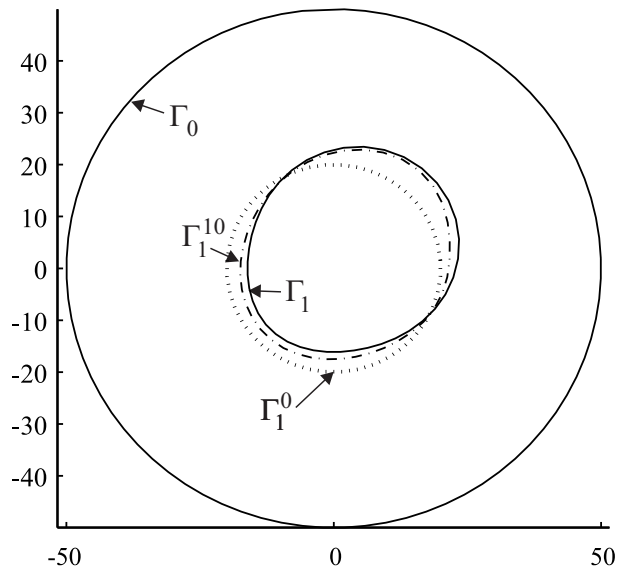


Рис. 2. $m = 2$

4. Результаты вычислительных экспериментов. Рассмотрим примеры применения итерационного метода (15) для численного решения задачи электроимпедансной томографии с несколькими измерениями.

В первом вычислительном эксперименте с $m = 2$ были выбраны следующие параметры. Поверхность Γ_0 представляла собой сферу с центром в начале сферической системы координат (рис. 1), значения функций $f^j(M)$ на Γ_0 , заданные в сферической системе координат, имеют вид

$$\begin{aligned} f^j(\theta, \varphi) &= 50 \left(\exp[\gamma^j(\theta, \varphi) - 1] - \exp[-\gamma^j(\theta, \varphi) - 1] \right), \\ \gamma^j(\theta, \varphi) &= l_x^j \sin(\theta) \cos(\varphi) + l_y^j \sin(\theta) \sin(\varphi) + l_z^j \cos(\theta), \quad j = 1, 2, \\ l_x^1 &= 0, \quad l_y^1 = 0, \quad l_z^1 = 1, \quad l_x^2 = 1, \quad l_y^2 = 0, \quad l_z^2 = 0. \end{aligned}$$

В качестве Γ_1 была взята поверхность Бэзе грушевидной формы (рис. 1), постоянные $\sigma_0 = 3, \sigma_1 = 1$. Схема вычислительного эксперимента была такова. С заданными $\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma_0, \sigma_1$ и $f^j(\theta, \varphi)$ решались задачи Дирихле (1)–(4) и находились функции $g^j(\theta, \varphi)$, представляющие собой значение нормальной производной $\frac{\partial u^j(M)}{\partial n}$ на поверхности Γ_0 . В эти функции вносилась погрешность, и получались функции $g_\delta^j(\theta, \varphi)$, такие,

что $\frac{\|g^j(\theta, \varphi) - g_\delta^j(\theta, \varphi)\|_{L_2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}}}{\|g^j(\theta, \varphi)\|_{L_2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}}} = 0.01$. Далее с функциями $g_\delta^j(\theta, \varphi)$, взятыми в качестве исходных данных, численно решалась обратная задача.

На рис. 1 и 2 приведены некоторые результаты решения обратной задачи. На рис. 1 изображены кривые, полученные в результате сечения области Ω плоскостью, проходящей через ось OZ и наибольшее по диаметру сечение поверхности Γ_1 . Кривая Γ_1^0 – сечение начального приближения, кривая Γ_1^{10} – сечение найденной в результате 10 итераций поверхности Γ_1^{10} . На рис. 2 приведены аналогичные кривые, полученные в результате сечения области Ω плоскостью, проходящей через начало координат и перпендикулярной оси OZ . Расчеты проводились при выборе равномерных сеток на $\Gamma_0 \{(\theta_i, \varphi_j); i = 0, 1, \dots, 39; j = 0, 1, \dots, 78\}$ и на $\Gamma_1 \{(\theta_i, \varphi_j); i = 0, 1, \dots, 19; j = 0, 1, \dots, 39\}$. Критерием останова служило достижение уровня погрешности по невязке. Характер близости кривых Γ_1^{10} и Γ_1 для других сечений области Ω аналогичен приведенным на рис. 1 и 2.

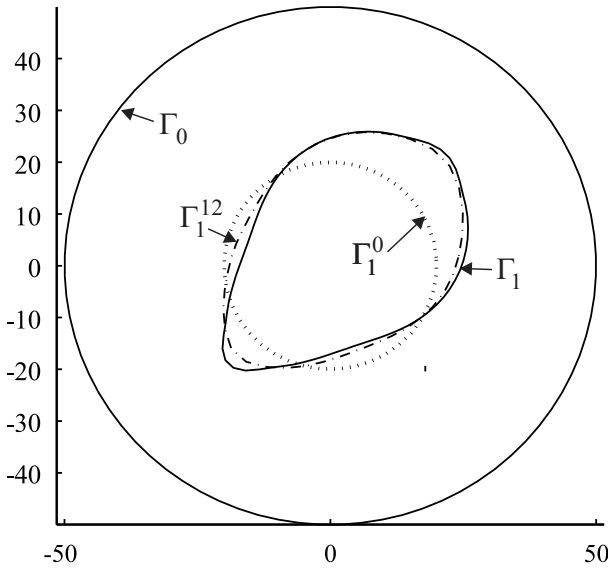


Рис. 3. $m = 4$

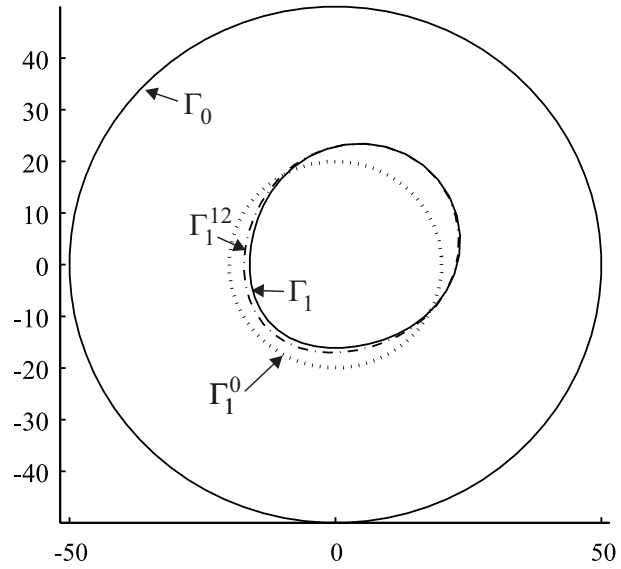


Рис. 4. $m = 4$

Второй вычислительный эксперимент проводился при $m = 4$. Поверхности Γ_0 и Γ_1 , а также постоянные σ_0 и σ_1 были такими же, как и в предыдущем эксперименте. Значения функций $f^j(M)$ на Γ_0 , заданные в сферической системе координат, имеют вид

$$f^j(\theta, \varphi) = 50 \left(\exp[\gamma^j(\theta, \varphi) - 1] - \exp[-\gamma^j(\theta, \varphi) - 1] \right),$$

$$\gamma^j(\theta, \varphi) = l_x^j \sin(\theta) \cos(\varphi) + l_y^j \sin(\theta) \sin(\varphi) + l_z^j \cos(\theta), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$l_x^1 = 0, \quad l_y^1 = 0, \quad l_z^1 = 1, \quad l_x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad l_y^2 = -\frac{1}{2}, \quad l_z^2 = -\frac{1}{2},$$

$$l_x^3 = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad l_y^3 = \frac{3}{4}, \quad l_z^3 = -\frac{1}{2}, \quad l_x^4 = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad l_y^4 = -\frac{3}{4}, \quad l_z^4 = -\frac{1}{2}.$$

Схема второго вычислительного эксперимента была аналогична первому. С заданными $\Gamma_0, \Gamma_1, \sigma_0, \sigma_1$ и $f^j(\theta, \varphi)$ решались задачи Дирихле (1)–(4) и находились функции $g^j(\theta, \varphi)$, представляющие собой значение нормальной производной $\frac{\partial u^j(M)}{\partial n}$ на поверхности Γ_0 . В эти функции вносилась погрешность,

и получались функции $g_\delta^j(\theta, \varphi)$, такие, что $\frac{\|g^j(\theta, \varphi) - g_\delta^j(\theta, \varphi)\|_{L_2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}}}{\|g^j(\theta, \varphi)\|_{L_2\{[0, \pi] \times [0, 2\pi]\}}} = 0.01$. Далее с функциями $g_\delta^j(\theta, \varphi)$, взятыми в качестве исходных данных, численно решалась обратная задача.

На рис. 3 и 4 приведены некоторые результаты решения обратной задачи. На рис. 3 изображены кривые, полученные в результате сечения области Ω плоскостью, проходящей через ось OZ и наибольшее по диаметру сечение поверхности Γ_1 . Кривая Γ_1^0 — сечение начального приближения, кривая Γ_1^{12} — сечение найденной в результате 12 итераций поверхности Γ_1^{12} . На рис. 4 приведены аналогичные кривые, полученные в результате сечения области Ω плоскостью, проходящей через начало координат и перпендикулярной оси OZ . Расчеты проводились при выборе равномерных сеток на $\Gamma_0 \{(\theta_i, \varphi_j); i = 0, 1, \dots, 39; j = 0, 1, \dots, 78\}$ и на $\Gamma_1 \{(\theta_i, \varphi_j); i = 0, 1, \dots, 19; j = 0, 1, \dots, 39\}$. Критерием останова служило достижение уровня погрешности по невязке. Характер близости кривых Γ_1^{12} и Γ_1 для других сечений области Ω аналогичен приведенным на рис. 3 и 4.

5. Заключение. В работе предложен итерационный метод определения неизвестной границы неоднородности для трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и нескольких пар измерений потенциала и его нормальной производной. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что за счет увеличения числа измерений на внешней границе можно повысить точность определения неизвестной поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borcea L.* Electrical impedance tomography // *Inverse Problems*. 2002. **18**. 99–136.
2. *Alessandrini G., Isakov V.* Analyticity and uniqueness for the inverse conductivity problem // *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste*. 1996. **28**, N I, II. 351–369.
3. *Barceo B., Fabes E., Seo J.K.* The inverse conductivity problem with one measurement: uniqueness for convex polyhedra // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1994. **122-1**. 183–189.
4. *Bellout H., Friedman A., Isakov V.* Stability for an inverse problem in potential theory // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1992. **332**. 271–296.
5. *Astala K., Paivarinta L.* Calderon's inverse conductivity problem in the plane // *Ann. Math.* 2006. **163**. 265–299.
6. *Kang H., Seo J.K.* Layer potential technique for the inverse conductivity problem // *Inverse Problems*. 1996. **12**. 267–278.
7. *Bruhl M., Hanke M.* Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions by impedance tomography // *Inverse Problems*. 2000. **16**. 1029–1042.
8. *Bruhl M., Hanke M.* Recent progress in electrical impedance tomography // *Inverse Problems*. 2003. **19**. 65–90.
9. *Eckel H., Kress R.* Nonlinear integral equations for the inverse electrical impedance problem // *Inverse Problems*. 2007. **23**. 475–491.
10. *Kwon O., Seo J.K., Yoon J.R.* A real-time algorithm for the location search of discontinuous conductivities with one measurement // *Comm. Pure Appl. Math.* 2002. **55**, N 1. 1–29.
11. *Kang H., Seo J.K., Sheen D.* Numerical identification of discontinuous conductivity coefficients // *Inverse Problems*. 1997. **13**. 113–123.
12. *Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В., Калинин В.В.* Численные методы решения некоторых обратных задач электрофизиологии сердца // *Дифференц. уравнения*. 2009. **45**, № 7. 1014–1022.
13. *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Численные методы определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2011. **51**, № 8. 1–14.
14. *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Итерационный метод решения трехмерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости и одного измерения на границе // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2012. **52**, № 8. 1426–1436.

Поступила в редакцию
24.12.2011