

УДК 519.642.4

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЯКОБИ С БОЛЬШИМ СЛУЧАЙНЫМ ПАРАМЕТРОМ КРИВИЗНЫ

Е. А. Илларионов¹

Выполнено обобщение полученных ранее результатов для случая, когда параметр кривизны в уравнении Якоби является случайной величиной, распределенной на большом или бесконечном интервале. Реализация численного алгоритма, позволяющего в таких случаях находить стационарное распределение, имеет ряд особенностей, связанных, в первую очередь, с конечной точностью вычислений. Рассмотрены эти особенности и приведены графики найденных распределений. По полученным распределениям вычислены показатели Ляпунова и скорости роста моментов поля Якоби. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 12-02-31128 и 12-02-00170).

Ключевые слова: стационарное распределение, произведение матриц, интегральное уравнение, уравнение Якоби.

1. Введение. Настоящая статья призвана обобщить результаты, полученные в [1]. Напомним постановку основной задачи. Нас интересует асимптотическое поведение решения уравнения Якоби

$$y''(x) + K(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

в котором коэффициент K задается в виде случайного процесса с обновлением в целочисленных точках. А именно, мы полагаем $K(x) = K_n$ при $x \in [n-1, n)$, где K_n — независимые одинаково распределенные случайные величины. В работе [1] величины K_n полагались равномерно распределенными на отрезке $[-K_{\max}, K_{\max}]$ и рассматривался случай малых значений K_{\max} . В данной работе мы рассмотрим поведение решений уравнения Якоби при больших значениях K_{\max} и перейдем к случаю, когда величины K_n имеют нормальное распределение. Заметим, что с вычислительной точки зрения большие значения коэффициента K создают дополнительные трудности и становится невозможным непосредственное применение описанного в [1] алгоритма. В частности, погрешность решения уравнений в ряде случаев становится больше того отрезка, на котором ищется корень, что приводит к накоплению значительной ошибки. Ниже будет предложен метод, позволяющий существенно расширить область возможных распределений коэффициента K .

2. Уравнение Якоби и теорема Ферстенберга. Изучать асимптотические свойства уравнения Якоби (1) удобно в терминах произведения случайных матриц (см., например, [2, 3]). К этому можно перейти следующим способом. Введем вектор-строку $z = (z_1, z_2)$ и перепишем уравнение Якоби в векторном виде, положив $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y'(x)$:

$$(z'_1, z'_2) = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} 0 & -K(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве начальных условий положим $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 1$.

В силу определения K фундаментальной матрицей этой системы будет произведение случайных матриц вида $B(n-1, n) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -K_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Явный вид этих матриц зависит от знака K_n :

$$\begin{aligned} \text{если } K_n \geq 0, \text{ то } B(n-1, n) &= \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_n} & -\sqrt{K_n} \sin \sqrt{K_n} \\ \sin \sqrt{K_n} / \sqrt{K_n} & \cos \sqrt{K_n} \end{pmatrix}; \\ \text{если } K_n < 0, \text{ то } B(n-1, n) &= \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{-K_n} & \sqrt{-K_n} \sinh \sqrt{-K_n} \\ \sinh \sqrt{-K_n} / \sqrt{-K_n} & \cosh \sqrt{-K_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; студент, e-mail: egor.mypost@gmail.com

В дальнейшем для краткости будем обозначать $B_i = B(i - 1, i)$. Произведение первых n таких матриц обозначим через $B(n)$. Характер поведения произведения матриц определяется показателем Ляпунова λ : $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|xB(n)\|$, где x — любой ненулевой вектор и предел понимается с вероятностью 1.

Известна теорема Ферстенберга [4] и ее обобщения, которые утверждают, что (при некоторых условиях на закон распределение матриц) показатель Ляпунова строго положителен, т.е. норма произведения растет с экспоненциальной скоростью.

Важным для нас также является следующий результат, вытекающий из работ Ферстенберга. Обозначим через μ распределение любой из матриц B_i из произведения $B(n)$ на группе матриц $G = SL(2, \mathbb{R})$. Пусть W — единичная окружность со склеенными диаметрально противоположными точками. Определим действие элемента $g \in G$ на W формулой $w \circ g = \frac{wg}{\|wg\|}$. В силу независимости B_i последовательность $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ задает на W цепь Маркова. Согласно предельным теоремам [5], при достаточно общих ограничениях на распределение μ эта цепь Маркова является эргодической, т.е. существует стационарное распределение этой цепи (инвариантная мера).

В работе [1], по-видимому впервые, была численно получена искомая инвариантная мера. При этом рассмотрение ограничилось случаями, когда значения K распределены равномерно на достаточно малом отрезке вблизи нуля. Целью данной работы является обсуждение особенностей, возникающих при больших значениях K .

3. Переходная плотность. Следуя обозначениям, принятым в [1], будем обозначать положение точек на W с помощью углов $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Пусть $u = \text{tg } \phi$. Пусть под действием матрицы B точка ϕ переходит в ψ , тогда соответствующие им точки на прямой обозначим через u и v . Пусть $\xi = \sqrt{|K|}$. Тогда u и v связаны выражениями (2) при $K \geq 0$ и (3) при $K < 0$:

$$v = \frac{u - \xi \text{tg } \xi}{1 + u \text{tg } \xi / \xi} = F_u(\xi), \tag{2}$$

$$v = \frac{u + \xi \text{th } \xi}{1 + u \text{th } \xi / \xi} = \tilde{F}_u(\xi). \tag{3}$$

Плотность распределения v при фиксированном u является переходной плотностью марковской цепи, рассматриваемой уже на прямой. Обозначим эту плотность через $p(u, v)$. Зная плотность ξ , можно выписать явное выражение для переходной плотности:

$$p(u, v) = \frac{1}{2} \frac{p_\xi(F_u^{-1}(v))}{|F'_u(F_u^{-1}(v))|} + \frac{1}{2} \frac{p_\xi(\tilde{F}_u^{-1}(v))}{|\tilde{F}'_u(\tilde{F}_u^{-1}(v))|}. \tag{4}$$

Заметим, что если для v существует несколько прообразов, то в формуле (4) предполагается суммирование по всем прообразам. Ситуация с несколькими прообразами в выражениях (2) и (3) возникает тогда, когда в них появляются вертикальные асимптоты (знаменатель обращается в нуль). Функция (2), вследствие периодичности тангенса, имеет бесконечное число асимптот, поэтому и прообразов, вообще говоря, может быть бесконечное число, если только носитель распределения ξ не ограничен сверху. Функция (3) может иметь асимптоту только при $u \leq -1$, притом единственную.

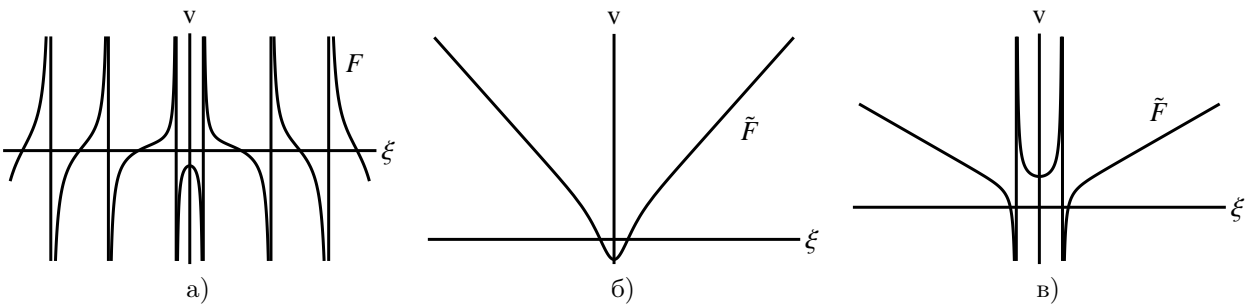


Рис. 1. Графики функций F и \tilde{F} , возникающие при подсчете переходной плотности:
 а) F при $u \neq -1$, б) \tilde{F} при $u > -1$, в) \tilde{F} при $u < -1$

На рис. 1 приведены примеры графиков функций (2), (3) в зависимости от u .

В [1] подробно разбиралось нахождение переходной плотности при малых K_{\max} , в частности, при $K_{\max} = 1, 0.1, 0.01$. Поэтому сейчас мы ограничимся описанием особенностей, возникающих при больших K_{\max} , для некоторых из которых будут построены графики стационарной плотности и посчитаны показатели Ляпунова. Случай больших K_{\max} представляет интерес с той точки зрения, что если мы захотим рассматривать распределения K , сосредоточенные на всей прямой, то вычислительные ограничения приводят к необходимости рассматривать эти распределения на большом, но конечном отрезке.

В случае функции F необходимо искать решения уравнения $v = F_u^{-1}(\xi)$ на каждом из отрезков, разделенных вертикальными асимптотами. При этом на первом отрезке решение существует, если $v \leq u/(1+u)$, на всех последующих отрезках решение существует для всех v , кроме, быть может, последнего отрезка, ограниченного справа максимальным допустимым значением $\xi = \sqrt{K_{\max}}$. Кроме того, с ростом номера отрезка графики функции F постепенно отжимаются от асимптот, что повышает точность решения. Таким образом, в этом случае большое число отрезков, на которых ищется решение, не вызывает принципиальных затруднений.

В случае функции \tilde{F} начинают сказываться особенности, связанные с тем, что в условиях машинной арифметики гиперболический тангенс быстро становится равным единице. В нашей реализации для переменной типа `double` языка Си это происходит уже при $\xi \simeq 20$. Заметим, что если подставить $\text{th } \xi = 1$ в (3), то \tilde{F} превратится в тождественную функцию. Заметим также, что при $\text{th } \xi \simeq 1$ асимптота (нуль знаменателя функции \tilde{F}) находится в точке $\xi \simeq -u$. Следующая качественная оценка показывает, что уже при небольших значениях $|u|$ мера области вблизи асимптоты, на которой функция \tilde{F} значительно отличается от ξ , крайне мала и быстро уменьшается с ростом $|u|$. Воспользуемся тем, что $\text{th } \xi = 1 - \frac{2}{\exp(2\xi) + 1} \sim 1 - \frac{2}{\exp(2\xi)}$ уже для небольших значений ξ . Пусть $\xi - (-u) = \xi + u = \delta$, где δ мало. Рассмотрим разность $|\tilde{F} - \xi|$ вблизи асимптоты при $u = -20$, т.е. в окрестности точки $\xi \simeq 20$. Тогда

$$|\tilde{F}(\xi) - \xi| = \left| \frac{\xi(u + \xi \text{th } \xi)}{\xi + u \text{th } \xi} - \xi \right| = \left| \frac{(1 - \text{th } \xi)(u\xi - \xi^2)}{\xi + u \text{th } \xi} \right| = \left| \frac{2\xi(u - \xi)}{\exp(2\xi)(\xi + u) - 2u} \right| \sim \left| \frac{2\xi(u - \xi)}{\delta \exp(2\xi)} \right|.$$

Заметим, что числитель имеет порядок 10^3 . Тогда если мы потребуем, чтобы \tilde{F} отличалась от ξ хотя бы на $\varepsilon = 0.1$ (именно таким числом в дальнейшем будет оценено расстояние между узлами сетки вблизи точки 20), то потребуется взять $\delta \sim 10^4 \exp(-40) \simeq 10^{-13}$. Таким образом, корни уравнения $\tilde{F}_u(\xi) = v$, которые соответствуют скачку функции \tilde{F}_u , лежат в крайне малой области ширины $\sim 10^{-13}$ вблизи точки асимптоты (рис. 2).

Теперь обратимся к формуле (4). В знаменателе стоит производная функции \tilde{F} от прообраза v . Ясно, что когда прообраз лежит вблизи асимптоты, то производная по модулю велика, а поскольку значение плотности в данной точке конечно и обычно мало, то вклад от этой точки должен быть почти нулевым. С другой стороны, поскольку мы находим положение асимптоты и прообраз точки v лишь с некоторой погрешностью (в нашем случае погрешность метода деления пополам бралась равной 10^{-10}), то, решая соответствующие уравнения, когда v принадлежит скачку функции \tilde{F} , мы на порядок промахиваемся мимо области скачка и попадаем вне ее, где сама функция близка к тождественной, а производная, соответственно, близка к 1. В итоге в формулу (4) вносится большая погрешность, что сильно сказывается на конечном результате.

Понятно, что с ростом $|u|$ ситуация только усугубляется и ее нельзя исправить, например, повышая точность метода нахождения корней. Чтобы избавиться от этой ошибки, связанной только с вычислительной погрешностью, приходится полагать, что $\tilde{F}(x)$ не имеет особенностей в области $x > x_0$. Конкретное значение x_0 будет определено далее. Как было отмечено, те решения, которые мы при этом теряем, не должны давать существенного вклада в ответ.

4. Стационарная плотность. Стационарная плотность π ищется как решение следующего интегрального уравнения, в которое входит переходная плотность:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\phi, \psi) \pi(\phi) d\phi = \pi(\psi).$$

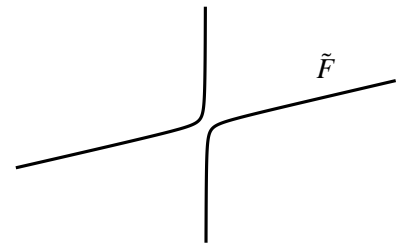


Рис. 2. График функции \tilde{F} вблизи асимптоты при больших $|u|$, вертикальная линия не показана

Решение ищется методом итераций. В качестве нулевого приближения полагаем $\pi_0(\psi) \equiv 1$. Затем производится нормировка плотности, полученной на предыдущем шаге: $\pi_{n-1}(\psi) = \frac{\pi_{n-1}(\psi)}{\|\pi_{n-1}(\psi)\|_{L_1[-\pi/2, \pi/2]}}$.

Новая плотность $\pi_n(\psi)$ находится по формуле $\pi_n(\psi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\phi, \psi)\pi_{n-1}(\phi) d\phi$.

Процесс останавливается, когда $\|\pi_n - \pi_{n-1}\|_{L_1[-\pi/2, \pi/2]} < \varepsilon$, где ε — заданная точность. Всюду далее мы полагаем $\varepsilon = 10^{-6}$.

Вычисление интегралов производится по составной формуле средних прямоугольников с разбиением отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ на $N = 10^4, 2 \times 10^4$ и 3×10^4 узлов. В [1] необходимость в большом разбиении объяснялась тем, что при малых K_{\max} становится малой область определения обратного отображения и в нее попадает недостаточное количество узлов, что влияет на точность вычисления показателей Ляпунова. В случае больших K_{\max} сказывается то, что при отображении сетки при помощи функции тангенса с отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ на прямую, сетка перестает быть равномерной. Например, при $N = 10^4$ расстояние между соседними узлами в окрестности точки 20 уже становится больше 0.1, а расстояние между двумя крайними узлами приблизительно равно 1500. Чтобы проверить влияние этой особенности на точность решения, результаты сравниваются с большим разбиением $N = 3 \times 10^4$. В качестве дополнительного контроля точности решения интегрального уравнения мы рассматриваем максимальную по модулю разность Δ между левой и правой частями интегрального уравнения по всем узлам разбиения.

Вычисления при $N \geq 10^4$ и больших значениях K_{\max} оказались невыполнимыми на обычном компьютере за приемлемое время, а потому были проведены на суперкомпьютере СКИФ МГУ.

Обратимся к вопросу выбора параметра x_0 . С одной стороны, при фиксированном разбиении можно выбирать его так, чтобы минимизировать ошибку Δ . При $K_{\max} = 2.5 \times 10^3$ и $N = 10^4$ минимум Δ достигается при $x_0 = 28$. С другой стороны, если при выбранном x_0 увеличить разбиение, то за счет большего числа точек погрешность накопится раньше и итоговая ошибка будет больше. Поэтому для большего разбиения необходимо выбирать меньшее x_0 .

Чтобы определить единое значение x_0 для всех рассматриваемых нами разбиений, представляется разумным положить x_0 равным наибольшему из таких, что при увеличении разбиения в случае $K_{\max} = x_0^2$ не происходит роста ошибки. Такое x_0 оказывается равным 15.

Построим графики стационарной плотности для равномерного распределения на большом отрезке $[-K_{\max}, K_{\max}]$ при $K_{\max} = 10^2, 2.5 \times 10^3$ и 10^4 . В табл. 1 приведены параметры точности решения при различных N для значения $K_{\max} = 2.5 \times 10^3$. Заметим, что выбор сетки сказывается также и на точности вычисления показателя Ляпунова λ .

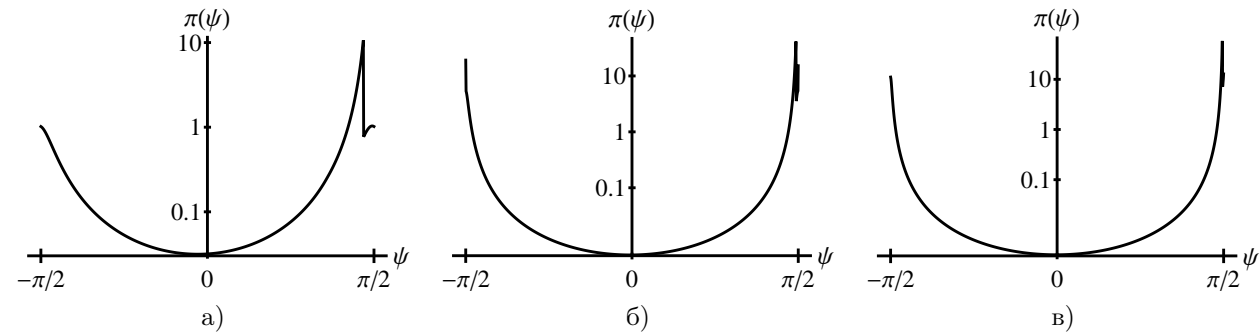


Рис. 3. Графики стационарной плотности для равномерного распределения (логарифмический масштаб): а) $K_{\max} = 10^2$, б) $K_{\max} = 2.5 \times 10^3$, в) $K_{\max} = 10^4$

В качестве решения мы принимаем графики, полученные по сетке из 3×10^4 узлов. Соответствующие

Таблица 1
Точность решения задачи в зависимости от числа точек разбиения: $K_{\max} = 2.5 \times 10^3$, n — число итераций, $\|\pi_n\|$ — норма приближения на последнем шаге

Критерий	$N = 10^4$	$N = 2 \times 10^4$	$N = 3 \times 10^4$
Δ	0.2896	0.1225	0.0151
n	5	5	5
$\ \pi_n\ $	0.9944	1.0023	0.9997
λ	16.5730	16.5712	16.5718

графики для различных K_{\max} приведены на рис. 3 в логарифмическом масштабе.

В работе [1] было показано, что при малых K_{\max} графики имеют максимум вблизи нуля. Из рис. 3 видно, что при увеличении K_{\max} максимум смещается вправо и графики прижимаются к границам. Следует также учитывать, что точки $\pm\pi/2$ на самом деле отождествлены, поэтому графики замыкаются через значения на концах.

Перейдем к случаю, когда K имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Распределение $\xi = \sqrt{|K|}$ выражается через распределение K следующим образом: $p_\xi(x) = 4xp_K(x^2)$ при $x \geq 0$. Плотность нормального распределения убывает по закону $\exp(-x^2/2\sigma^2)$, тогда плотность ξ убывает еще быстрее: $x \exp(-x^4/2\sigma^2)$. Чтобы не выходить за предел точности переменной типа double (эта точность приблизительно равна 2.2×10^{-308}), нужно ограничить максимальное значение $x = x_{\max}$. Например, при не слишком маленьких дисперсиях подойдет такая оценка: $x_{\max} \leq 6\sqrt{\sigma}$. Для нормального распределения $N(0,1)$ получаем $x_{\max} = 6$, т.е. достаточно малый отрезок. При $\sigma^2 = 100$ полагаем $x_{\max} = 18$, при $\sigma^2 = 100^2$ полагаем $x_{\max} = 60$. Случай $\sigma^2 = 0.01$ формально не относится к задаче с большим параметром кривизны, тем не менее мы включили его в таблицы для полноты картины.

Таблица 2
Точность решения задачи с $K \sim N(0, \sigma^2)$ при различных σ^2

Критерий	$\sigma^2 = 0.01$	$\sigma^2 = 1$	$\sigma^2 = 100$	$\sigma^2 = 100^2$
Δ	2.03×10^{-6}	2.09×10^{-7}	1.46×10^{-8}	1.11×10^{-5}
n	71	17	5	3
$\ \pi_n\ $	1	1	1	0.999998

Например, при не слишком маленьких дисперсиях подойдет такая оценка: $x_{\max} \leq 6\sqrt{\sigma}$. Для нормального распределения $N(0,1)$ получаем $x_{\max} = 6$, т.е. достаточно малый отрезок. При $\sigma^2 = 100$ полагаем $x_{\max} = 18$, при $\sigma^2 = 100^2$ полагаем $x_{\max} = 60$. Случай $\sigma^2 = 0.01$ формально не относится к задаче с большим параметром кривизны, тем не менее мы включили его в таблицы для полноты картины.

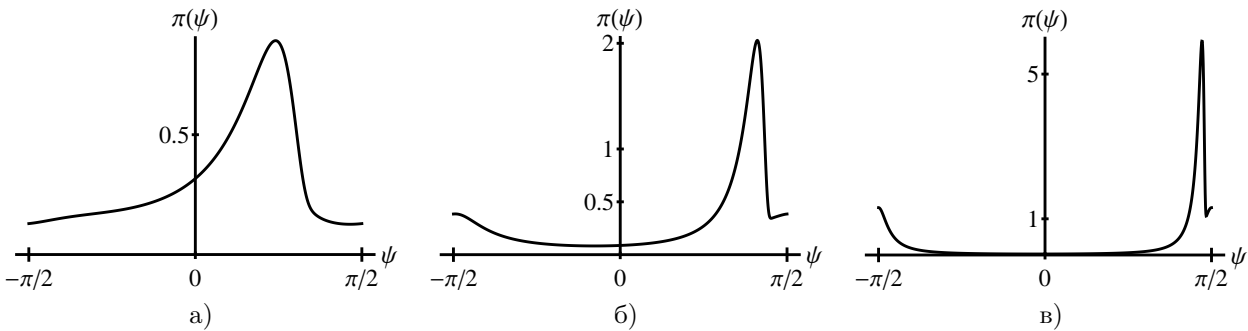


Рис. 4. Графики стационарной плотности для $K \sim N(0, \sigma^2)$ (обыкновенный масштаб):
а) $\sigma^2 = 1$, б) $\sigma^2 = 100$, в) $\sigma^2 = 100^2$

В табл. 2 представлены параметры погрешности счета. Для нормального распределения оказалось достаточным рассматривать разбиение на $N = 10^4$ узлов. Получившиеся при этом графики стационарной плотности показаны на рис. 4. Из этого рисунка видно, что, как и в случае равномерного распределения, при небольших σ^2 графики имеют максимум, расположенный ближе к нулю, затем при увеличении дисперсии σ^2 распределения K максимум смещается к правой границе, становясь более резким.

На рис. 5 в случае $K \sim N(0, 1)$ показана функция распределения, которая вычисляется по найденной стационарной плотности по формуле

$$F(\psi) = \int_{-\pi/2}^{\psi} \pi(\phi) d\phi.$$

5. Показатель Ляпунова. Вычислим с помощью стационарной плотности показателя Ляпунова произведения случайных матриц и моменты старших порядков, используя соотношения из работы [1]:

$$\lambda = E \log \|wB\| \text{ и } \gamma_p = \frac{1}{p} \log E \|wB\|^p, \text{ где } \|\cdot\| \text{ — евклидова норма.}$$

Первые шесть скоростей роста целочисленных моментов приведены в табл. 3 при различных распределениях K . Из табл. 3 видно, что, как это и предсказывается теорией [6], γ_p увеличивается с ростом p .

6. Заключение. На примере уравнения Якоби (1) был предложен метод нахождения инвариантной меры для широкого класса распределений параметра кривизны K . Показано, что в случае когда K сосредоточено на большом или бесконечном интервале, возникает ряд технических трудностей, связанных с конечной погрешностью вычислений, которые необходимо учитывать при решении данной задачи. Большой

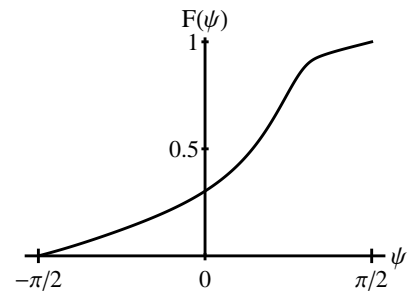


Рис. 5. Функция распределения при $K \sim N(0, 1)$

Таблица 3

Показатели Ляпунова и скорости роста моментов

$K \sim$	λ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6
$U[-10^2, 10^2]$	3.2459	7.8962	9.0192	9.5855	9.9473	10.1986	10.3821
$U[-2.5 \times 10^3, 2.5 \times 10^3]$	16.5718	46.7126	48.9701	50.0871	50.7362	51.1552	51.4482
$U[-10^4, 10^4]$	33.2358	96.1447	98.9634	100.3193	101.0847	101.5728	101.9117
$N(0, 0.01)$	0.0645	0.0866	0.1071	0.1263	0.1444	0.1616	0.1770
$N(0, 1)$	0.3137	0.4323	0.5619	0.6932	0.8165	0.9277	1.0271
$N(0, 100)$	1.2184	2.6765	3.7468	4.4674	5.0260	5.4891	5.8871
$N(0, 100^2)$	4.03173	13.3097	17.2554	19.9976	22.1421	23.9193	25.4490

объем вычислений требует привлечения методов параллельного программирования. Вычисления проводились на суперкомпьютере СКИФ МГУ с использованием стандарта MPI. В результате удалось построить рассматриваемую меру при различных распределениях K , и на ее основе были вычислены показатели Ляпунова и скорости роста моментов поля Якоби. Для контроля получаемых значений было проведено прямое численное моделирование решений уравнения Якоби, аналогичное тому, что было предложено в работе [7]. В результате оказалось, что при большом числе реализаций удается с хорошей точностью воспроизвести показатели Ляпунова при всех распределениях K , в то же время моменты старших порядков сильно недотягивали до приведенных в табл. 3 значений. Этот вопрос требует отдельного изучения.

Автор благодарен Соколову Д.Д. и Тутубалину В.Н. за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Илларионов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н. Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 218–225.
2. Bougerol P., Lacroix J. Product of random matrices with application to Schrödinger operators // Progress in Probability and Statistics. 1985. **8**. 1–283.
3. Comtet A., Texier C., Tourigny Y. Products of random matrices and generalized quantum point scatterers // Journal of Statistical Physics. 2010. **140**. 427–466.
4. Furstenberg H. Noncommuting random products // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. **108**. 377–428.
5. Tutubalin V.N. A central limit theorem for products of random matrices and some of its applications // Symposia Mathematica. 1977. **XXI**. 101–116.
6. Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Molchanov S.A., Sokoloff D.D. Kinematic dynamo problem in a linear velocity field // J. Fluid Mech. 1984. **144**. 1–11.
7. Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н. Фундаментальная матрица для уравнений Якоби со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 261–268.

Поступила в редакцию
10.01.2013