УДК 53:51(075.8)

УПРАВЛЕНИЕ ИСТОЧНИКАМИ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. А. Морозов[1], В. Г. Лежнев[2], Н. М. Токарев[2]

Для уравнения теплопроводности рассматривается краевая задача, состоящая в определении плотности объемных источников, которая обеспечивает заданное финальное (при $T > 0$) распределение температуры. Доказана корректность задачи, построены сходящиеся алгоритмы и предложен алгоритм решения обратной задачи теплопроводности. Работа выполнена в рамках проекта 2.1.1/1292 целевой программы Минобрнауки и поддержана РФФИ (коды проектов 11–01–96511а и 13–01–00096а).

Ключевые слова: теплопроводность, краевые задачи, обратная задача теплопроводности, управление распределенными параметрами.

В ограниченной односвязной области $Q \subset R^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей ∂Q рассматривается следующая задача: найти функцию $\psi(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q$, и решение $u(x,t)$ уравнения

$$u_t = \triangle u + \psi, \quad x \in Q, \quad t \in (0, T), \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным начальному и граничному условиям

$$u\big|_{\partial Q} = 0, \quad t \in (0, T), \tag{2}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in Q, \tag{3}$$

и финальному условию

$$u\big|_{t=T} = f(x), \tag{4}$$

где $f(x)$ — заданная функция.

Задача (1)–(4) может интерпретироваться, например, как задача управления процессом диффузии для получения нужной концентрации $u(x,t)$ в момент времени T и по постановке близка к обратной задаче. Как видно из последующего, имеют общие черты и алгоритмы решения обратной задачи теплопроводности и рассматриваемой задачи управления (см. последнее замечание в разделе 4). Обратные задачи и алгоритмы их решения широко исследуются в монографии [1], 3D-алгоритм решения обратной задачи представлен в [2] (см. также [5]).

1. Сделаем замену функции $u(x,t)$ следующим образом: пусть

$$w(x,t) = u(x,t) + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — решение краевой задачи уравнения Пуассона

$$\triangle\varphi\big|_Q = -\psi, \quad \varphi\big|_{\partial Q} = 0.$$

Тогда

$$w_t = \triangle w, \quad x \in Q, \quad t \in (0, T), \tag{5}$$

$$w\big|_{\partial Q} = 0, \quad t \in (0, T), \tag{6}$$

$$w\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q, \tag{7}$$

$$w\big|_{t=T} = f(x) + \varphi(x), \quad x \in Q. \tag{8}$$

---

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; главный науч. сотр., e-mail: morozov@srcc.msu.ru

[2] Кубанский государственный университет, факультет математики и компьютерных наук, ул. Ставропольская, д. 149, 350040, г. Краснодар; В. Г. Лежнев, профессор, e-mail: lzhnvv@mail.ru; Н. М. Токарев, преподаватель, e-mail: nikitatok@gmail.com

Требуется определить функцию $\varphi(x)$ и решение $w(x,t)$ задачи (5)–(8).

2. Покажем, что решение задачи (5)–(8) существует, единственно и непрерывно зависит от заданной функции $f(x)$. Норму в $L_2(Q)$ будем обозначать как $\|\ .\ \|$.

Для доказательства единственности предположим противное, т.е. существует другое решение $w_1(x,t)$ задачи (5)–(8) с функцией $\varphi_1(x)$. Положим $z(x,t)=w(x,t)-w_1(x,t)$, $\varphi(x)-\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, тогда

$$z_t(x,t)=\triangle z(x,t), \quad x\in Q, \quad t\in(0,T),$$

$$z\big|_{\partial Q}=0, \quad z\big|_{t=0}=\varphi_2(x), \quad z\big|_{t=T}=\varphi_2(x).$$

Умножим на $z(x,t)$ правую и левую части последнего уравнения и проинтегрируем по области $Q\times(0,T)$:

$$\int\limits_0^T\int\limits_Q z_t z\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_Q\int\limits_0^T\frac{\partial}{\partial t}z^2\,dt\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_Q\big(z^2(x,T)-z^2(x,0)\big)\,dx=0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^T\int\limits_Q\triangle z\ z\,dx\,dt=-\int\limits_0^T\int\limits_Q\big|\nabla z(x,t)\big|^2\,dx\,dt=0.$$

Отсюда получим, что $\nabla z(x,t)=0$ в $Q\times(0,T)$ и $z(x,t)=\mathrm{const}=0$.

Докажем существование решения и получим его оценку. Пусть $v_k(x)$ — собственная функция оператора Лапласа:

$$\triangle v_k\big|_Q=\lambda_k v_k, \quad v_k\big|_{\partial Q}=0.$$

Функции $v_k(x)$, $k=1,2,\ldots$, образуют ортонормированный базис в $L_2(Q)$ [3] и $\lambda_k\leqslant\lambda_1<0$.

Будем предполагать, что $f(x)$ принадлежит пространству $W_2^2(Q)$; тогда

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m v_m(x), \quad \triangle f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\lambda_m v_m(x), \quad \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\lambda_m)^2<\infty.$$

Воспользуемся также разложением

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k v_k(x)$$

с неизвестными коэффициентами b_k. Пусть

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(t)v_k(x).$$

Применяя формально метод Фурье, получим для коэффициентов $c_k(t)$ следующую краевую задачу для дифференциального уравнения первого порядка с искомым значением b_k, $k=1,2$:

$$c_k'(t)=\lambda_k c_k(t), \quad t\in(0,T),$$

$$c_k(0)=b_k, \quad c_k(T)=a_k+b_k.$$

Так как $c_k(t)=\beta_k\exp(\lambda_k t)$, то

$$\beta_k=b_k, \quad \beta_k\exp(\lambda_k t)=a_k+b_k.$$

Отсюда получим, что $\beta_k\big(\exp(\lambda_k T)-1\big)=a_k$ и

$$b_k=\beta_k=\frac{a_k}{\exp(\lambda_k T)-1},$$

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\exp(\lambda_k T)-1}\,v_k(x),$$

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_m}{\exp(\lambda_k T)-1}\exp(\lambda_k t)\,v_k(x).$$

Указанные здесь ряды сходятся в $W_2^2(Q)$. Справедлива оценка

$$\|w(x,t)\|\leqslant\frac{1}{1-\exp(\lambda_1 T)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)^2\right)^{1/2}=\frac{1}{1-\exp(\lambda_1 T)}\,\|f(x)\|,$$

из которой следует, что решение задачи (5)–(8) существует. Искомая функция $\psi(x)$ определяется равенством

$$\psi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\lambda_m}{\exp(\lambda_m T)-1}\,v_m(x).$$

3. При численном решении в случае сложных областей метод Фурье создает достаточно большие сложности из-за необходимости решения спектральной задачи и вычисления $v_k(x)$ и λ_k. В этой связи разумно предложить следующий альтернативный подход.

3.1. Рассмотрим несеточный алгоритм, использующий набор решений прямой задачи теплопроводности (5)–(7), когда $\varphi(x)=u(x,0)$ — заданные специальные начальные функции [2].

В разделе 4 доказывается следующая

Теорема. *Если* $\Big\{u(x,0)\Big\}_0^{\infty}$ *— плотное множество в* $L_2(Q)$*, то множество функций* $\Big\{u(x,t)\Big|_{t=T}\Big\}_1^{\infty}$ *плотно в* $L_2(Q)$*, где* $u(x,t)$ *— решение задачи* (5)–(7).

Положим для краткости

$$\alpha_k(x)=u_k(x,0),\qquad \omega_k(x)=u_k(x,T)$$

и будем предполагать, что начальные функции $\alpha_k(x)$, $k=1,2,\dots$, образуют полную систему и линейно независимы. Рассмотрим разложение с неизвестными коэффициентами h_n:

$$f(x)+\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\omega_n(x).\tag{9}$$

По построению имеем

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\alpha_n(x).$$

Следовательно,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\big(\omega_n(x)-\alpha_n(x)\big).\tag{10}$$

3.2. Докажем, что функции $\alpha_n(x)-\omega_n(x)$ линейно независимы, если линейно независима система функций $\alpha_n(x)$, $n=1,2,\dots$. Действительно, пусть

$$\sum_{n=1}^{N}A_n\big(\alpha_n(x)-\omega_n(x)\big)=0,\qquad x\in Q.$$

Покажем, что коэффициенты A_n этого равенства равны нулю.

Пусть $Z(x,t)$ — решение прямой задачи (5)–(7) с начальной функцией $Z(x,0)=\sum_{n=1}^{N}A_n(\alpha_n(x))$. Тогда для $Z(x,T)$ получим

$$Z(x,T)=\sum_{n=1}^{N}A_n(\omega_n(x))=\sum_{n=1}^{N}A_n(\alpha_n(x))=Z(x,0).$$

Следовательно, решение $Z(x,t)$, как и решение $z(x,t)$ в разделе 2, тождественно равно нулю. В частности,

$$Z(x,0)=\sum_{n=1}^{N}A_n(\alpha_n(x))=0,\qquad x\in Q,$$

и все коэффициенты A_n равны нулю вследствие линейной независимости системы функций $\alpha_m(x)$. Таким образом, линейная независимость системы функций $\alpha_n(x)-\omega_n(x)$ доказана.

3.3. Далее рассмотрим проекцию $f_N(x)$ функции $f(x)$ на подпространство $\Big\{\alpha_m(x)-\omega_m(x)\Big\}_{m=1}^N$:

$$f(x)=f_N(x)+\rho_N(x),\qquad f_N(x)\to f(x)\quad ,N\to\infty,\qquad \rho_N(x)\perp(\alpha_p-\omega_p),\qquad p>N.$$

Умножая равенство (10) скалярно на $\alpha_p(x)-\omega_p(x)$, $p=1,\dots,N$, получим невырожденную линейную систему уравнений для искомых коэффициентов h_n:

$$\sum_{n=1}^N h_n\Big(\alpha_n(x)-\omega_n(x),\alpha_p\Big)_Q=\Big(f(x),\alpha_p(x)-\omega_p(x)\Big)_Q,\qquad p=1,\dots,N.$$

Полученная система может быть плохо обусловленной, тогда применяются методы регуляризации [4].

Проекция $f_N(x)$ определяется равенством

$$f_N(x)=\sum_{n=1}^N h_n\big(\alpha_n(x)-\omega_n(x)\big).$$

Покажем, что функция

$$\varphi^N(x)=\sum_{n=1}^N h_n\omega_n(x)$$

аппроксимирует в $L_2(Q)$ функцию $\varphi(x)$. Действительно, функция $\varphi(x)$ существует, ряд (9) сходится в $L_2(Q)$, а остаток ряда стремится к нулю: $\sum_{n=N+1}^\infty h_n\alpha_n(x)\to 0$ при $N\to\infty$.

Вычитая $\varphi^N(x)$ из (9), получим

$$f(x)+\varphi(x)-\varphi^N(x)=f_N(x)+\sum_{n=N+1}^\infty h_n\alpha_n(x),$$

откуда следует, что

$$\varphi(x)-\varphi^N(x)\to 0,\qquad N\to 0.$$

Аппроксимация $\psi^N(x)$ искомого распределения $\psi(x)$ определяется равенством $\psi^N(x)=-\triangle\varphi^N(x)$.

4. Доказательство теоремы. Докажем полноту в $L_2(Q)$ множества следов $u_n(x,T)$ решений прямой задачи (5)–(7), если множество начальных функций $u_n(x,0)$ является полным в $L_2(Q)$, $n=1,2,\dots$.

Во-первых, для решений $u(x,t)$ задачи (5)–(7) выполняется равенство

$$\frac12\left(\|u(x,T)\|^2-\|u(x,0)\|^2\right)=-\int_0^T\|\nabla u(x,t)\|^2\,dt,$$

откуда имеем

$$\|u(x,T)\|<\|u(x,0)\|. \tag{11}$$

Во-вторых, любая функция $f(x)\in L_2(Q)$ может быть аппроксимирована суммами собственных функций:

$$\Big\|f(x)-\sum_{n=1}^N a_m\exp(\lambda_mT)\,v_m(x)\Big\|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{12}$$

где величина $\varepsilon>0$ может быть произвольно малой.

Финальной функции вида $\omega(x)=\sum_{m=1}^N\alpha_m\exp(\lambda_mT)\,v_m(x)$ задачи (5)–(7) соответствует начальная функция

$$\alpha(x)=\sum_{m=1}^N\alpha_m v_m(x).$$

Если $u_n(x,0)$ — полная система в $L_2(Q)$, то $\alpha(x)$ может быть аппроксимирована их линейными комбинациями:

$$\Big\|\alpha(x)-\sum_{n=1}^N b_nu_n(x,0)\Big\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Из (11)–(13) следуют оценки

$$\left\|f(x)-\sum_{n=1}^{N}b_nu_n(x,T)\right\|\leqslant\|f(x)-\omega(x)\|+\left\|\omega(x)-\sum_{n=1}^{N}b_nu_n(x,T)\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left\|\alpha_n(x)-\sum_{1}^{N}b_nu_n(x,0)\right\|\leqslant\varepsilon.$$

Полнота системы следов $\Big\{u_n(x,T)\Big\}_{n=1}^{\infty}$ доказана.

Замечание. Рассмотрим задачу обратной теплопроводности

$$v_t(x,t)=\triangle v(x,t)\big|_{x\in Q},\qquad v(x,t)\big|_{\partial Q}=0,\qquad v(x,t)\big|_{t=T}=g(x),$$

в которой требуется приближенно определить начальную функцию

$$v(x,t)\big|_t=G(x).$$

Пусть $g^N(x)$ — проекция функции $g(x)$ на подпространство $\{\omega_m(x)\}_1^N$:

$$g^N(x)=\sum_{n=1}^{N}b_n\omega_n(x).$$

Для решения прямой задачи

$$w_t=\triangle w,\qquad x\in Q,\qquad t\in(0,T),$$
$$w\big|_{\partial Q}=0,\qquad t\in(0,T),\qquad w\big|_{t=0}=G^N(x),\qquad x\in Q,$$

где $G^N(x)=\sum_{n=1}^{N}b_n\alpha_n(x)$, имеем

$$v(x,T)-w(x,T)=g(x)-g^N(x).$$

Иными словами, $G^N(x)$ дает приближенное решение данной обратной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988.
2. *Лежнев В.Г., Марковский А.Н.* К решению обратной задачи теплопроводности // Сибирские электронные математические известия. 2011. № 8. 314–319.
3. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
4. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
5. *Морозов В.А., Лежнев В.Г., Токарев Н.М.* Вариационная задача для бигармонического уравнения // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**, № 2. 409–412.

Поступила в редакцию
30.01.2013