УДК 517.518.87

# О ТОЧНЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ОТ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОБЩЕМУ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА

**К. А. Кириллов**[1]

Получены верхние оценки погрешности обладающих $d$-свойством Хаара кубатурных формул на классах $\mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$ функций двух переменных, удовлетворяющих общему условию Липшица. Установлено, что минимальные кубатурные формулы, обладающие $d$-свойством Хаара, имеют наилучший порядок сходимости к нулю погрешности на указанных классах.

**Ключевые слова:** $d$-свойство Хаара, погрешности кубатурных формул, классы функций $\mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$.

**1. Введение.** Задача построения и исследования формул приближенного интегрирования, точных для некоторого заданного набора функций, в основном решалась ранее для вычисления интегралов, точных на алгебраических и тригонометрических многочленах. Квадратурные и кубатурные формулы, точные для системы функций Хаара, можно найти в монографии И. М. Соболя [1]. В указанной работе точность формул приближенного интегрирования на конечных суммах Хаара использовалась при выводе оценок погрешности этих формул.

Описание всех минимальных весовых квадратурных формул, обладающих $d$-свойством Хаара (формул, точных на константах и функциях Хаара первых $d$ групп), приведено в [2], исследование погрешности указанных формул — в [3, 4], оценки погрешности обладающих $d$-свойством Хаара квадратурных формул с весовой функцией $g(x) \equiv 1$ получены в [5].

В двумерном случае задача построения кубатурных формул, обладающих $d$-свойством Хаара (формул, точных для полиномов Хаара степеней, не превосходящих заданного числа $d$), решалась в [6–11], оценки нормы функционала погрешности указанных кубатурных формул получены на пространствах $S_p$ и $H_\alpha$ в [12–14].

В настоящей статье проведено исследование кубатурных формул, точных для полиномов Хаара, на классах $\mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$ функций двух переменных, удовлетворяющих общему условию Липшица. Для кубатурных формул, обладающих $d$-свойством Хаара в двумерном случае, доказана верхняя оценка погрешности на классах $\mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$:

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}(L_1,L_2)} |\delta_N(f)| \leqslant \frac{\left(1+2^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}-2\right)(L_1+L_2)}{4\left(2^{\frac{1}{p}}-1\right)\left(2-2^{\frac{2}{p}}\right)} \times 2^{-\frac{d}{2}} - \frac{L_1+L_2}{2\left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)} \times 2^{-d}.$$

В случае равенства нулю одной из определяющих постоянных $L_1$, $L_2$ класса $\mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$ эта оценка уточнена следующим образом:

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}(L_1,0)} |\delta_N(f)| \leqslant 0.5L_1 \times 2^{-d}, \qquad \sup_{f\in \mathrm{Lip}(0,L_2)} |\delta_N(f)| \leqslant 0.5L_2 \times 2^{-d}.$$

Установлено также, что минимальные кубатурные формулы, обладающие $d$-свойством, на классах $\mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$ имеют наилучший порядок сходимости к нулю погрешности $\sup\limits_{f\in \mathrm{Lip}(L_1,L_2)} |\delta_N(f)|$, $N \to \infty$, равный $N^{-\frac{1}{2}}$, если $L_1 \neq 0$ и $L_2 \neq 0$, и $N^{-1}$, если одна из определяющих постоянных $L_1$, $L_2$ равна нулю, а другая отлична от нуля, что соответствует результатам, полученным И. М. Соболем в [15] для кубатурных формул с узлами, образующими $\Pi_\tau$-сетки.

**2. Основные определения.** В настоящей статье используется оригинальное определение функций $\chi_{m,j}(x)$, введенное А. Хааром [16], отличное от приведенного в [1] определения этих функций в их точках разрыва.

[1] Сибирский Федеральный университет, кафедра “Прикладная математика и компьютерная безопасность”, ул. Киренского, 26, 660074, Красноярск; профессор, e-mail: kkirillov@rambler.ru

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $(j-1)/2^{m-1}$, $j/2^{m-1}$ ($m = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$). Если левый конец двоичного промежутка совпадает с 0, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1 — замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины промежутка $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать $l^{-}_{m,j}$ и $l^{+}_{m,j}$ соответственно.

Система функций Хаара строится группами: группа номер $m$ содержит $2^{m-1}$ функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при} \quad x \in l^{-}_{m,j}, \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при} \quad x \in l^{+}_{m,j}, \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m,j}}, \\ 0.5\bigl\{\chi_{m,j}(x-0) + \chi_{m,j}(x+0)\bigr\}, & \text{если} \quad x \text{ — внутренняя} \\ & \qquad \text{точка разрыва,} \end{cases}$$

где $\overline{l_{m,j}} = \left[\dfrac{j-1}{2^{m-1}}, \dfrac{j}{2^{m-1}}\right]$, $m = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_{0,1}(x) \equiv 1$, которая образует нулевую группу.

Пусть $d$ — фиксированное целое неотрицательное число. Приведем определение полиномов Хаара в двумерном случае [6–11]. Мономами Хаара степени $d$ назовем функции $\chi_{m_1,j_1}(x_1)\,\chi_{m_2,j_2}(x_2)$, где $m_1 + m_2 = d$, $j_n = 1, 2, \dots, 2^{m_n - 1}$ при $m_n \neq 0$ и $j_n = 1$ при $m_n = 0$, $n = 1, 2$. Полиномами Хаара степени $d$ будем называть линейные комбинации с вещественными коэффициентами мономов Хаара степеней, не превосходящих $d$, такие, что хотя бы один из коэффициентов при мономах степени $d$ отличен от нуля.

Будем рассматривать кубатурные формулы

$$I(f) = \int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f\Bigl(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\Bigr) = Q_N(f), \tag{1}$$

где $\Bigl(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\Bigr) \in [0,1]^2$ — узлы кубатурной формулы, $C_i$ — коэффициенты формулы при узлах (вещественные числа) и $i = 1, 2, \dots, N$.

Будем говорить, что формула (1) обладает $d$-свойством Хаара, или просто $d$-свойством, если она точна для любого полинома Хаара $P(x_1, x_2)$ степени, не превосходящей $d$, т.е. $Q_N(P) = I(P)$.

Множество функций $f(x_1, x_2)$, определенных в единичном квадрате $[0,1]^2$ и представимых в виде ряда Фурье–Хаара

$$f(x_1,x_2) = c_{0,0}^{(1,1)} + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} c_{m_1,0}^{(j_1,1)} \chi_{m_1,j_1}(x_1) + \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} c_{0,m_2}^{(1,j_2)} \chi_{m_2,j_2}(x_2) + \\ + \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} \chi_{m_1,j_1}(x_1) \chi_{m_2,j_2}(x_2)$$

с вещественными коэффициентами $c_{0,0}^{(1,1)}$, $c_{m_1,0}^{(j_1,1)}$, $c_{0,m_2}^{(1,j_2)}$, $c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$, $m_n = 1, 2, \dots$, $j_n = 1, 2, \dots, 2^{m_n-1}$, $n = 1, 2$, удовлетворяющими условиям

$$\begin{gathered} A_p^{(1)}(f) = \sum_{m_1=1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}} \left\{ \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \bigl|c_{m_1,0}^{(j_1,1)}\bigr|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A_1, \\ A_p^{(2)}(f) = \sum_{m_2=1}^{\infty} 2^{\frac{m_2-1}{2}} \left\{ \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} \bigl|c_{0,m_2}^{(1,j_2)}\bigr|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A_2, \\ A_p^{(1,2)}(f) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2} + \frac{m_2-1}{2}} \left\{ \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} \bigl|c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\bigr|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A_{1,2}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $1 \leqslant p < \infty$, $A_1$, $A_2$ и $A_{1,2}$ — вещественные константы, называется классом $S_p(A_1, A_2, A_{1,2})$ [1]. Множество функций $f(x_1, x_2)$, принадлежащих всем классам $S_p(A_1, A_2, A_{1,2})$ со всевозможными $A_1$, $A_2$, $A_{1,2}$ при фиксированном значении $p$, определяется как класс $S_p$.

Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2)$, определенная на квадрате $[0,1]^2$, удовлетворяет общему условию Липшица, если

$$\bigl|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)\bigr| \leqslant L_1|y_1 - x_1| + L_2|y_2 - x_2|$$

для любых $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in [0,1]^2$, где $L_1, L_2 \geqslant 0$ — фиксированные константы [15]. Множество всех таких функций определим как класс $\operatorname{Lip}(L_1, L_2)$, а константы $L_1$ и $L_2$ назовем определяющими постоянными этого класса.

**3. Вывод оценок погрешности кубатурных формул.** Функционал погрешности кубатурной формулы (1) обозначим через $\delta_N(f)$:

$$\delta_N(f) = I(f) - Q(f) = \int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 - \sum_{i=1}^{N} C_i f\Bigl(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\Bigr). \tag{3}$$

Зафиксируем $p > 1$. Для функции $f \in S_p$ введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
\tilde{A}_p^{(1)}(f) = \sum_{m_1=d+1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}} \left\{\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \bigl|c_{m_1,0}^{(j_1,1)}\bigr|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \tilde{A}_p^{(2)}(f) = \sum_{m_2=d+1}^{\infty} 2^{\frac{m_2-1}{2}} \left\{\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} \bigl|c_{0,m_2}^{(1,j_2)}\bigr|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \\
\tilde{A}_p^{(1,2)}(f) = \sum_{m_1+m_2=d+1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \left\{\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} \bigl|c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\bigr|^p\right\}^{\frac{1}{p}},
\end{gathered} \tag{4}$$

где $c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ — коэффициенты Фурье–Хаара этой функции, $j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n-1}$ при $m_n = 1, 2, \ldots$, и $j_n = 1$ при $m_n = 0$, $n = 1, 2$.

**Лемма 1** [12]. *Для модуля функционала погрешности кубатурной формулы* (1), *обладающей $d$-свойством, имеет место неравенство*

$$\bigl|\delta_N(f)\bigr| \leqslant 2^{-\frac{d}{p}} \Bigl\{\tilde{A}_p^{(1)}(f) + \tilde{A}_p^{(2)}(f) + 2^{\frac{1}{p}} \tilde{A}_p^{(1,2)}(f)\Bigr\}, \quad f \in S_p. \tag{5}$$

Положим

$$\Delta_t^{(1)} f(x_1, x_2) = f(x_1 + t, x_2) - f(x_1, x_2), \quad \Delta_t^{(2)} f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + t) - f(x_1, x_2). \tag{6}$$

**Лемма 2** [1]. *Для коэффициентов Фурье–Хаара суммируемой функции $f$ справедливы равенства*

$$c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} = 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \iint\limits_{l_{m_1,j_1}^{-}\, l_{m_2,j_2}^{-}} \Delta_{2^{-m_1}}^{(1)} \Delta_{2^{-m_2}}^{(2)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2, \tag{7}$$

$$c_{m_1,0}^{(j_1,1)} = -2^{\frac{m_1-1}{2}} \iint\limits_{l_{m_1,j_1}^{-}\, [0,1]} \Delta_{2^{-m_1}}^{(1)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2, \quad c_{0,m_2}^{(1,j_2)} = -2^{\frac{m_2-1}{2}} \iint\limits_{[0,1]\, l_{m_2,j_2}^{-}} \Delta_{2^{-m_2}}^{(2)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

$m_n = 1, 2, \ldots,\ j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n-1},\ n = 1, 2$.

**Лемма 3.** *Для коэффициентов Фурье–Хаара функции $f$, принадлежащей классу* $\operatorname{Lip}(L_1, L_2)$, *имеют место следующие неравенства:*

$$\bigl|c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\bigr| \leqslant 2^{-\frac{3m_1+m_2}{2}} L_1, \quad \bigl|c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\bigr| \leqslant 2^{-\frac{3m_2+m_1}{2}} L_2, \tag{8}$$

$$\bigl|c_{m_1,0}^{(j_1,1)}\bigr| \leqslant 2^{-\frac{3m_1+1}{2}} L_1, \quad \bigl|c_{0,m_2}^{(1,j_2)}\bigr| \leqslant 2^{-\frac{3m_2+1}{2}} L_2, \tag{9}$$

$m_n = 1, 2, \ldots,\ j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n-1},\ n = 1, 2$.

**Доказательство.** Докажем первое из неравенств (8). Зафиксируем значения $m_1$, $m_2$, $j_1$ и $j_2$. В соответствии с (7), (6) имеем

$$c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2} = 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \iint\limits_{l^-_{m_1,j_1} l^-_{m_2,j_2}} \Delta^{(1)}_{2^{-m_1}} \Delta^{(2)}_{2^{-m_2}} f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$
$$= 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \iint\limits_{l^-_{m_1,j_1} l^-_{m_2,j_2}} \Big( f(x_1+2^{-m_1}, x_2+2^{-m_2}) - f(x_1+2^{-m_1}, x_2) - \tag{10}$$
$$- f(x_1, x_2+2^{-m_2}) + f(x_1,x_2)\Big)\, dx_1\, dx_2.$$

Из (10) с учетом определения класса функций $\mathrm{Lip}\,(L_1,L_2)$ получим

$$\big|c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}\big| \leqslant 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \iint\limits_{l^-_{m_1,j_1} l^-_{m_2,j_2}} \Big| \big(f(x_1+2^{-m_1}, x_2+2^{-m_2}) - f(x_1, x_2+2^{-m_2})\big) -$$
$$- \big(f(x_1+2^{-m_1}, x_2) - f(x_1,x_2)\big)\Big|\, dx_1\, dx_2 \leqslant 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \iint\limits_{l^-_{m_1,j_1} l^-_{m_2,j_2}} \Big\{ \big|f(x_1+2^{-m_1}, x_2+2^{-m_2}) -$$
$$- f(x_1, x_2+2^{-m_2})\big| + \big|f(x_1+2^{-m_1}, x_2) - f(x_1,x_2)\big|\Big\}\, dx_1\, dx_2 \leqslant 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \times$$
$$\times \iint\limits_{l^-_{m_1,j_1} l^-_{m_2,j_2}} 2\cdot 2^{-m_1} L_1\, dx_1\, dx_2 = 2^{-\frac{3m_1+m_2}{2}} L_1.$$

Установим справедливость второго неравенства из соотношений (8):

$$\Big|c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}\Big| \leqslant 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \iint\limits_{l^-_{m_1,j_1} l^-_{m_2,j_2}} \Big\{ \big|f(x_1+2^{-m_1}, x_2+2^{-m_2}) - f(x_1+2^{-m_1}, x_2)\big| +$$
$$+ \big|f(x_1, x_2+2^{-m_2}) - f(x_1,x_2)\big|\Big\}\, dx_1\, dx_2 \leqslant 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \iint\limits_{l^-_{m_1,j_1} l^-_{m_2,j_2}} 2\cdot 2^{-m_2} L_2\, dx_1\, dx_2 = 2^{-\frac{3m_2+m_1}{2}} L_2.$$

Неравенства (9) доказываются аналогично.

**Лемма 4.** *При* $p > 2$ *выполнено* $\mathrm{Lip}\,(L_1,L_2) \subset S_p(A_1,A_2,A_{1,2})$, *где*

$$A_i = \frac{L_i}{2\left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)}, \quad i=1,2, \quad A_{1,2} = \frac{\left(2+2^{\frac{1}{p}}\right)(L_1+L_2)}{4\left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)\left(2-2^{\frac{2}{p}}\right)}. \tag{11}$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathrm{Lip}\,(L_1,L_2)$. Для этой функции найдем верхние оценки величин $A^{(1)}_p(f)$, $A^{(2)}_p(f)$, $A^{(1,2)}_p(f)$. В силу (9) имеем

$$A^{(1)}_p(f) = \sum_{m_1=1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}} \left\{ \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \big|c^{(j_1,1)}_{m_1,0}\big|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{m_1=1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}} \left(2^{m_1-1} 2^{-\frac{3m_1+1}{2}p} L_1^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= 2^{-1-\frac{1}{p}} L_1 \sum_{m_1=1}^{\infty} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_1} = 0.5\left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)^{-1} L_1. \tag{12}$$

Аналогично получим

$$A^{(2)}_p(f) \leqslant 0.5\left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)^{-1} L_2. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь выражение для величины $A^{(1,2)}_p(f)$:

$$A^{(1,2)}_p(f) = \sum_{m_2<m_1} 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \left\{ \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} \big|c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}\big|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \sum_{m_2\geqslant m_1} 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \left\{ \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} \big|c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}\big|^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Учитывая (8), из (14) получим

$$A_p^{(1,2)}(f) \leqslant \sum_{m_2<m_1} 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \left(2^{m_1-1} 2^{m_2-1} 2^{-\frac{3m_1+m_2}{2}p} L_1^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ \sum_{m_1\leqslant m_2} 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \left(2^{m_1-1} 2^{m_2-1} 2^{-\frac{3m_2+m_1}{2}p} L_2^p\right)^{\frac{1}{p}} = \tag{15}$$
$$= 2^{-1-\frac{2}{p}} \left\{ L_1 \sum_{m_1=2}^{\infty} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_1} \sum_{m_2=1}^{m_1-1} 2^{\frac{m_2}{p}} + L_2 \sum_{m_2=1}^{\infty} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_2} \sum_{m_1=1}^{m_2} 2^{\frac{m_1}{p}} \right\}.$$

Так как

$$\sum_{m_2=1}^{m_1-1} 2^{\frac{m_2}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} \left(2^{\frac{1}{p}}-1\right)^{-1} \left(2^{\frac{m_1-1}{p}}-1\right), \quad \sum_{m_1=1}^{m_2} 2^{\frac{m_1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} \left(2^{\frac{1}{p}}-1\right)^{-1} \left(2^{\frac{m_2}{p}}-1\right),$$

то из (15) следует неравенство

$$A_p^{(1,2)}(f) \leqslant 2^{-1-\frac{1}{p}} \left(2^{\frac{1}{p}}-1\right)^{-1} \left\{ L_1 \left( 2^{-\frac{1}{p}} \sum_{m_1=2}^{\infty} 2^{\left(-1+\frac{2}{p}\right)m_1} - \sum_{m_1=2}^{\infty} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_1} \right) + \right.$$
$$\left. + L_2 \left( \sum_{m_2=1}^{\infty} 2^{\left(-1+\frac{2}{p}\right)m_2} - \sum_{m_2=1}^{\infty} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_2} \right) \right\}. \tag{16}$$

Заметим, что при $p > 2$ справедливы неравенства $2^{-1+\frac{2}{p}} < 1$ и $2^{-1+\frac{1}{p}} < 1$. Следовательно, все ряды, фигурирующие в соотношении (16), являются сходящимися. Вычисляя суммы этих рядов, получим

$$A_p^{(1,2)}(f) \leqslant \left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)^{-1} \left(2-2^{\frac{2}{p}}\right)^{-1} \left(2^{-1+\frac{1}{p}} L_1 + L_2\right). \tag{17}$$

Если в равенстве (14) поменять ролями $m_1$ и $m_2$, то после проведения аналогичных рассуждений придем к неравенству

$$A_p^{(1,2)}(f) \leqslant \left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)^{-1} \left(2-2^{\frac{2}{p}}\right)^{-1} \left(L_1 + 2^{-1+\frac{1}{p}} L_2\right). \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует соотношение

$$A_p^{(1,2)}(f) \leqslant 0.25 \left(2+2^{\frac{1}{p}}\right) \left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)^{-1} \left(2-2^{\frac{2}{p}}\right)^{-1} (L_1+L_2).$$

Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Если* $f \in \mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$, *то для любого* $p > 2$

$$\tilde{A}_p^{(i)}(f) \leqslant \frac{L_i}{2\left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)d}, \quad i = 1,\, 2, \tag{19}$$

$$\tilde{A}_p^{(1,2)}(f) \leqslant \frac{\left(1+2^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}-2\right)(L_1+L_2)}{2^{2+\frac{1}{p}}\left(2^{\frac{1}{p}}-1\right)\left(2-2^{\frac{2}{p}}\right)} 2^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)d} - \frac{L_1+L_2}{2^{\frac{1}{p}}\left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)d}. \tag{20}$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$. В соответствии с леммой 4 функция $f$ принадлежит классу $S_p\,(A_1, A_2, A_{1,2})$ с определяющими постоянными, удовлетворяющими равенствам (11).

Вывод неравенств (19) аналогичен выводу неравенств (12) и (13).

Докажем неравенство (20). Действуя так же, как и при доказательстве неравенства (15), получим

$$\tilde{A}_p^{(1,2)}(f) = \sum_{\substack{m_1+m_2\geqslant d+1,\\ m_2<m_1}} 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \left\{ \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} \left| c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \sum_{\substack{m_1+m_2\geqslant d+1,\\ m_2\geqslant m_1}} 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} \left| c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{-1-\frac{2}{p}} \left\{ L_1 \sum_{\substack{m_1+m_2\geqslant d+1,\\ m_2<m_1}} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_1} 2^{\frac{m_2}{p}} + \right. \tag{21}$$
$$\left. + L_2 \sum_{\substack{m_1+m_2\geqslant d+1,\\ m_2\geqslant m_1}} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_2} 2^{\frac{m_1}{p}} \right\}.$$

Из системы неравенств $\begin{cases} m_1+m_2\geqslant d+1, \\ m_2<m_1 \end{cases}$ следует, что $m_1 \geqslant \left[\frac{d+1}{2}\right]+1$, а из системы $\begin{cases} m_1+m_2\geqslant d+1, \\ m_2\geqslant m_1 \end{cases}$ следует неравенство $m_2 \geqslant \left[\frac{d}{2}\right]+1$, где символом $[a]$ обозначена целая часть числа $a$. Тогда (21) можно переписать в виде

$$\tilde{A}_p^{(1,2)}(f) \leqslant 2^{-1-\frac{2}{p}} \left\{ L_1 \left( \sum_{m_1=\left[\frac{d+1}{2}\right]+1}^{d} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_1} \sum_{m_2=d+1-m_1}^{m_1-1} 2^{\frac{m_2}{p}} + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{m_1=d+1}^{\infty} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_1} \sum_{m_2=1}^{m_1-1} 2^{\frac{m_2}{p}} \right) + L_2 \left( \sum_{m_2=\left[\frac{d}{2}\right]+1}^{d} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_2} \sum_{m_1=d+1-m_2}^{m_2} 2^{\frac{m_1}{p}} + \right. \tag{22}$$
$$\left.\left. + \sum_{m_2=d+1}^{\infty} 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)m_2} \sum_{m_1=1}^{m_2} 2^{\frac{m_1}{p}} \right) \right\}.$$

Вычислив все суммы в правой части (22), придем к соотношению

$$\tilde{A}_p^{(1,2)}(f) \leqslant 2^{-1-\frac{1}{p}} \left(2^{\frac{1}{p}}-1\right)^{-1} \left\{ L_1 \left( 2^{-\frac{1}{p}+\left(-1+\frac{2}{p}\right)\left(\left[\frac{d+1}{2}\right]+1\right)} \left(1-2^{-1+\frac{2}{p}}\right)^{-1} + \right.\right.$$
$$\left. + 2^{\frac{d}{p}} \left(2^{-d}-2^{-\left[\frac{d+1}{2}\right]}\right) - 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)(d+1)} \left(1-2^{-1+\frac{1}{p}}\right)^{-1} \right) + L_2 \left( 2^{\left(-1+\frac{2}{p}\right)\left(\left[\frac{d}{2}\right]+1\right)} \times \right. \tag{23}$$
$$\left.\left. \times \left(1-2^{-1+\frac{2}{p}}\right)^{-1} + 2^{\frac{d}{p}} \left(2^{-d}-2^{-\left[\frac{d}{2}\right]}\right) - 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)(d+1)} \left(1-2^{-1+\frac{1}{p}}\right)^{-1} \right) \right\}.$$

Поскольку для любого натурального числа $d$ выполняются неравенства

$$\left[\frac{d+1}{2}\right]+1 \geqslant \frac{d}{2}+1, \quad \left[\frac{d}{2}\right]+1 \geqslant \frac{d+1}{2}, \quad \left[\frac{d+1}{2}\right] \leqslant \frac{d+1}{2}, \quad \left[\frac{d}{2}\right] \leqslant \frac{d}{2},$$

из (23) получим

$$\tilde{A}_p^{(1,2)}(f) \leqslant 2^{-1-\frac{1}{p}} \left(2^{\frac{1}{p}}-1\right)^{-1} \left\{ L_1 \left( 2^{-\frac{1}{p}+\left(-1+\frac{2}{p}\right)\left(\frac{d}{2}+1\right)} \left(1-2^{-1+\frac{2}{p}}\right)^{-1} + \right.\right.$$
$$\left. + 2^{\frac{d}{p}} \left(2^{-d}-2^{-\frac{d+1}{2}}\right) - 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)(d+1)} \left(1-2^{-1+\frac{1}{p}}\right)^{-1} \right) + L_2 \left( 2^{\left(-1+\frac{2}{p}\right)\frac{d+1}{2}} \times \right.$$
$$\left.\left. \times \left(1-2^{-1+\frac{2}{p}}\right)^{-1} + 2^{\frac{d}{p}} \left(2^{-d}-2^{-\frac{d}{2}}\right) - 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)(d+1)} \left(1-2^{-1+\frac{1}{p}}\right)^{-1} \right) \right\} = \tag{24}$$
$$= 2^{-1-\frac{1}{p}} \left(2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}-2\right)\left(2^{\frac{1}{p}}-1\right)^{-1}\left(2-2^{\frac{2}{p}}\right)^{-1} \left(2^{-\frac{1}{2}}L_1+L_2\right) 2^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)d} -$$
$$- 2^{-\frac{1}{p}} \left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)^{-1} (L_1+L_2)\, 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)d}.$$

Если в правой части равенства, фигурирующего в соотношениях (21), поменять ролями $m_1$ и $m_2$, то после проведения аналогичных рассуждений придем к неравенству

$$\tilde{A}_p^{(1,2)}(f) \leqslant 2^{-1-\frac{1}{p}} \left(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} - 2\right)\left(2^{\frac{1}{p}} - 1\right)^{-1}\left(2 - 2^{\frac{2}{p}}\right)^{-1} \left(L_1 + 2^{-\frac{1}{2}} L_2\right) \times \\ \times 2^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}\right)d} - 2^{-\frac{1}{p}} \left(2 - 2^{\frac{1}{p}}\right)^{-1} (L_1 + L_2)\, 2^{\left(-1+\frac{1}{p}\right)d}. \tag{25}$$

Неравенство (20) следует из (24) и (25). Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Если кубатурная формула* (1) *обладает $d$-свойством, то при любом $p > 2$ имеет место неравенство*

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}(L_1,L_2)} \left|\delta_N(f)\right| \leqslant \frac{\left(1 + 2^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} - 2\right)(L_1 + L_2)}{4\left(2^{\frac{1}{p}} - 1\right)\left(2 - 2^{\frac{2}{p}}\right)}\, 2^{-\frac{d}{2}} - \frac{L_1 + L_2}{2\left(2 - 2^{\frac{1}{p}}\right)}\, 2^{-d}. \tag{26}$$

**Доказательство.** Пусть функция $f \in \mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$. Тогда в соответствии с леммой 4 при $p > 2$ функция $f$ принадлежит классу $S_p(A_1, A_2, A_{1,2})$ с определяющими постоянными, удовлетворяющими равенствам (11). Следовательно, в силу леммы 1 для модуля функционала погрешности кубатурной формулы (1), обладающей $d$-свойством, выполняется неравенство (5), из которого с учетом (19) и (20) ввиду произвольности функции $f \in \mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$ получим (26). Теорема доказана.

**Замечание 1.** Несложно показать, что функция

$$g(p) = \frac{\left(1 + 2^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} - 2\right)}{4\left(2^{\frac{1}{p}} - 1\right)\left(2 - 2^{\frac{2}{p}}\right)}$$

на промежутке $(2, +\infty)$ достигает своего наименьшего значения в точке $p = 1/\log_2 t_0$, где $t_0$ — решение уравнения

$$t^4 + 2\sqrt{2}\, t^3 - (4 + \sqrt{2})\, t^2 + 4 - 2\sqrt{2} = 0,$$

принадлежащее интервалу $(1, \sqrt{2})$ (на интервале $(1, \sqrt{2})$ указанное уравнение имеет единственное решение $t = t_0 \approx 1.136792504118$). Тогда из (26) следует неравенство

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}(L_1,L_2)} \left|\delta_N(f)\right| \leqslant C\,(L_1 + L_2)\, 2^{-\frac{d}{2}} - \tilde{C}\,(L_1 + L_2)\, 2^{-d},$$

где

$$C = \frac{\left(1 + 1/\sqrt{2}\right)\left(t_0^2 + \sqrt{2} t_0 - 2\right)}{4\,(t_0 - 1)\,(2 - t_0^2)} \approx 3.967463092376, \quad \tilde{C} = \frac{1}{2\,(2 - t_0)} \approx 0.579235007093. \tag{27}$$

**Теорема 2.** *Если кубатурная формула* (1) *обладает $d$-свойством, то*

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}(L_1,0)} \left|\delta_N(f)\right| \leqslant 0.5 L_1 \times 2^{-d}, \tag{28}$$

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}(0,L_2)} \left|\delta_N(f)\right| \leqslant 0.5 L_2 \times 2^{-d}. \tag{29}$$

**Доказательство.** Пусть функция $f \in \mathrm{Lip}\,(L_1, 0)$. В силу второго неравенства из (8) и второго неравенства из (9) коэффициенты Фурье–Хаара $c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ и $c_{0,m_2}^{(1,j_2)}$ функции $f$ равны нулю. Тогда в соответствии с (2) имеем $A_p^{(2)}(f) = A_p^{(1,2)}(f) = 0$ и, следовательно,

$$\tilde{A}_p^{(2)}(f) = \tilde{A}_p^{(1,2)}(f) = 0. \tag{30}$$

Величина $\tilde{A}_p^{(1)}(f)$ в силу леммы 5 удовлетворяет неравенству (19). В соответствии с леммой 4 при $p > 2$ функция $f$ принадлежит некоторому классу $S_p(A_1, A_2, A_{1,2})$ (определяющую постоянную $A_1$ этого класса можно выбрать согласно первому из равенств (11), $A_2$ и $A_{1,2}$ можно взять равными нулю).

Следовательно, в силу леммы 1 для модуля функционала погрешности кубатурной формулы (1), обладающей $d$-свойством, выполняется неравенство (5), из которого с учетом (19) и (30) ввиду произвольности функции $f \in \mathrm{Lip}\,(L_1, 0)$ получим

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}(L_1,L_2)} \bigl|\delta_N(f)\bigr| \leqslant 0.5L_1 \left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)^{-1} \times 2^{-d}, \tag{31}$$

где $p$ — любое число из промежутка $(2,+\infty)$. Так как $\inf\limits_{p>2}\left\{\left(2-2^{\frac{1}{p}}\right)^{-1}\right\} = 1$, то из (31) следует (28).

Неравенство (29) доказывается аналогично.

Рассмотрим теперь кубатурные формулы (1), обладающие $d$-свойством, число узлов которых $N \sim 2^d$ при $d \to \infty$. Например, указанному условию удовлетворяют минимальные кубатурные формулы (формулы с наименьшим возможным числом узлов), обладающие $d$-свойством, построенные в [8] для значений $d \geqslant 5$, — число узлов каждой такой формулы $N = 2^d - \lambda(d)$, где

$$\lambda(d) = \begin{cases} 2^{\frac{d}{2}+1} - 2 & \text{при} \quad d = 2l, \\ 3\times 2^{\frac{d-1}{2}} - 2 & \text{при} \quad d = 2l-1, \end{cases}$$

$l = 3, 4, \ldots$; из замечания 1 и теоремы 2 следует

**Теорема 3.** *Пусть кубатурная формула* (1) *обладает $d$-свойством и число ее узлов $N \sim 2^d$ при $d \to \infty$. Тогда*

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}(L_1,L_2)} \bigl|\delta_N(f)\bigr| \leqslant \varTheta(N),$$

где

$$\varTheta(N) \sim \begin{cases} C\,(L_1+L_2)\,N^{-\frac{1}{2}}, & \text{если} \quad L_1 \neq 0,\ L_2 \neq 0, \\ 0.5L_1N^{-1}, & \text{если} \quad L_1 \neq 0,\ L_2 = 0, \\ 0.5L_2N^{-1}, & \text{если} \quad L_1 = 0,\ L_2 \neq 0 \end{cases}$$

*при $N \to \infty$, а константа $C$ определена согласно* (27).

**Замечание 2.** Классу $\mathrm{Lip}(0,0)$ принадлежат те и только те функции двух переменных, определенные на $[0,1]^2$, которые тождественно равны константам. Следовательно, для любого целого неотрицательного $d$ погрешность обладающих $d$-свойством кубатурных формул (1) на классе $\mathrm{Lip}(0,0)$ равна нулю.

**4. Заключение.** В [15] рассмотрены кубатурные формулы

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \approx N^{-1}\sum_{i=1}^N f(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}) \tag{32}$$

с $2^\nu$ узлами $(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}) \in [0,1]^n$, образующими $\Pi_\tau$-сетки $(0 \leqslant \tau < \nu)$, получена верхняя оценка погрешности таких формул на классах функций $\mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$, которая в двумерном случае имеет вид

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}(L_1,L_2)} \bigl|\delta_N(f)\bigr| \leqslant 2^\tau \mathrm{e}^2 c_\rho, \tag{33}$$

где

$$c_\rho = \begin{cases} 0.5\max\bigl\{L_1N^{-1}, \sqrt{2L_1L_2}\,N^{-\frac{1}{2}}\bigr\}, & \text{если} \quad L_1 \geqslant L_2 \geqslant 0, \\ 0.5\max\bigl\{L_2N^{-1}, \sqrt{2L_1L_2}\,N^{-\frac{1}{2}}\bigr\}, & \text{если} \quad L_2 \geqslant L_1 \geqslant 0. \end{cases} \tag{34}$$

Легко видеть, что при достаточно больших значениях $N$ величина $c_\rho$ удовлетворяет соотношению

$$c_\rho = \begin{cases} \sqrt{0.5L_1L_2}\;N^{-\frac{1}{2}}, & \text{если} \quad L_1 \neq 0,\ L_2 \neq 0, \\ 0.5L_1N^{-1}, & \text{если} \quad L_2 = 0, \\ 0.5L_2N^{-1}, & \text{если} \quad L_1 = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Для выполнения равенства (35) при условии $L_1L_2 \neq 0$, достаточно взять $N \geqslant 0.5\max\{L_1L_2^{-1}, L_2L_1^{-1}\}$, а при $L_1L_2 = 0$ равенство (35) имеет место для любых натуральных $N$.

Отметим, что кубатурная формула (32) с $2^\nu$ узлами, образующими $\Pi_\tau$-сетки, является частным случаем формул, точных для полиномов Хаара: в [1] доказано, что такая формула обладает $(\nu-\tau)$-свойством.

Кроме того, в [15] установлено, что для любой точной на константах кубатурной формулы

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$$

с произвольными вещественными коэффициентами $C_i$ при узлах $x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$, имеет место нижняя оценка погрешности на классах функций $\mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$, которая в двумерном случае принимает вид

$$\sup_{f \in \mathrm{Lip}(L_1, L_2)} \left|\delta_N(f)\right| \geqslant c_\rho/4, \tag{36}$$

где величина $c_\rho$ определена согласно (34). Следовательно, неравенство (36) справедливо также и для погрешности $\sup\limits_{f \in \mathrm{Lip}(L_1, L_2)} \left|\delta_N(f)\right|$ кубатурных формул (1), обладающих $d$-свойством.

Таким образом, так же как и кубатурные формулы (32) с образующими $\Pi_\tau$–сетки узлами при $n = 2$, исследованные в настоящей статье формулы в случае $N \sim 2^d$ при $d \to \infty$ имеют наилучший порядок сходимости к нулю погрешности $\sup\limits_{f \in \mathrm{Lip}(L_1, L_2)} \left|\delta_N(f)\right|$ на классах $\mathrm{Lip}\,(L_1, L_2)$, $N \to \infty$, равный $N^{-\frac{1}{2}}$, если $L_1 \neq 0$ и $L_2 \neq 0$, и $N^{-1}$, если одна из определяющих постоянных $L_1$ и $L_2$ равна нулю, а другая отлична от нуля. В частности, условию $N \sim 2^d$, $d \to \infty$, удовлетворяет число узлов минимальных кубатурных формул, обладающих $d$-свойством, которые были рассмотрены в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.
2. *Кириллов К.А., Носков М.В.* Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2002. **42**, № 6. 791–799.
3. *Кириллов К.А.* Об оценке погрешности минимальных весовых квадратурных формул, точных для функций Хаара // Вычислительные технологии. 2006. **11**, спец. выпуск. 44–50.
4. *Кириллов К.А.* Оценки нормы функционала погрешности на пространствах $S_p$ весовых квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 324–331 (http://num-meth.srcc.msu.ru/).
5. *Кириллов К.А.* Об оценках погрешности квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**, № 2. 94–101.
6. *Кириллов К.А.* Минимальные кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара в $\mathbb{R}^2$ // Вопросы математического анализа. Красноярск: Изд-во Красноярского гос. техн. ун-та, 2003. **6**. 108–117.
7. *Кириллов К.А.* Нижние оценки числа узлов кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Вычислительные технологии. 2004. **9**, спец. выпуск. 62–71.
8. *Кириллов К.А.* Построение минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара высших степеней в двумерном случае // Вычислительные технологии. 2005. **10**, спец. выпуск. 29–47.
9. *Noskov M.V., Kirillov K.A.* Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials // J. of Approximation Theory. 2010. **162**, N 3. 615–627.
10. *Кириллов К.А.* Алгоритм построения минимальных кубатурных формул, обладающих $d$-свойством Хаара в двумерном случае // Журн. Сибирского Федерального ун-та. Серия “Математика и физика”. 2010. **3**, № 2. 205–215.
11. *Кириллов К.А.* Минимальные кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара малых степеней в двумерном случае // Вестник Красноярского гос. аграрного ун-та. 2012. № 10. 7–12.
12. *Кириллов К.А., Носков М.В.* Оценки погрешности на пространствах $S_p$ кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2009. **49**, № 1. 3–13.
13. *Кириллов К.А.* Оценки нормы функционала погрешности на пространствах $H_\alpha$ кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Журн. Сибирского Федерального ун-та. Серия “Математика и физика”. 2012. **5**, № 3. 382–387.
14. *Кириллов К.А.* Об оценках погрешности кубатурных формул, точных для полиномов Хаара // Вестник Сибирского гос. аэрокосмического ун-та. 2012. № 2. 33–36.
15. *Соболь И.М.* О квадратурных формулах от функций нескольких переменных, удовлетворяющих общему условию Липшица // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1989. **29**, № 6. 935–941.
16. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. **69**. 331–371.

Поступила в редакцию
06.02.2013