

УДК 532.546, 519.633

ПРИМЕНЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ РАПОПОРТА–ЛИСА В ЗАДАЧАХ ВТОРИЧНОЙ МИГРАЦИИ УГЛЕВОДОРОДОВ

А. С. Журавлёв¹, Е. С. Журавлёв¹, А. Б. Шабаров¹

Рассмотрена задача моделирования процессов миграции и аккумуляции углеводородов в геологических коллекторах. Сформулирована начально-краевая задача, описывающая фильтрационное движение двухфазной несжимаемой жидкости в анизотропной несжимаемой поровой среде в предположении о сегрегационности характера движения. Предложен и обоснован метод расщепления численной схемы решения задачи, позволяющий проводить расчеты в геологических масштабах времени. Приведены результаты расчетов, позволяющие оценить зависимость времени формирования залежи нефти от размера и мощности источника.

Ключевые слова: вторичная миграция углеводородов, трехмерное уравнение Рапопорта–Лиса, противоточная капиллярно-гравитационная пропитка, конечно-разностные методы, расщепление численной схемы.

1. Введение. Результат разработки практически любого нефтяного, газового или конденсатного месторождения напрямую зависит от степени достоверности, с которой определена начальная картина насыщения геологической ловушки пластовыми флюидами. В случаях неравновесного насыщения ловушки провести такое исследование полноценно можно только с учетом моделирования процессов миграции углеводородов.

Цель данной работы сводится к разработке методов численного моделирования, позволяющих применять уравнение параболического типа, известное как уравнение Рапопорта–Лиса [1], в трехмерном случае в предположении сегрегационности характера движения в задачах вторичной миграции углеводородов [2]. Особое внимание уделяется алгоритмам численного решения этого уравнения, позволяющим проводить исследования задач о миграции, аккумуляции и перераспределении углеводородов в неоднородных анизотропных естественных геологических коллекторах в геологических масштабах времени.

2. Физико-математическая постановка. Физико-математическая модель, лежащая в основе разрабатываемых методов, заключается в равновесной фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в несжимаемой неоднородной анизотропной поровой среде под воздействием капиллярных и гравитационных сил. Охарактеризованная модель описывается следующей системой уравнений (1)–(8) [3–5]:

$$v_i^{(n)} S^{(n)} m = -\frac{k_{ij} f^{(n)}}{\mu^{(n)}} \frac{\partial}{\partial x_j} (P^{(n)} - \rho^{(n)} g_k x_k), \tag{1}$$

$$\frac{\partial S^{(n)}}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i^{(n)} S^{(n)} m + \hat{v}_i^{(n)} S^{(n)} m) = 0, \tag{2}$$

$$P^{(1)} - P^{(2)} = L, \tag{3}$$

$$S^{(1)} + S^{(2)} = 1, \tag{4}$$

$$\chi_i v_i^{(n)} = \chi_i \tilde{v}_i^{(n)} \quad \text{на границах}, \tag{5}$$

$$\oint_G \chi_i (\tilde{v}_i^{(1)} S^{(1)} m + \tilde{v}_i^{(2)} S^{(2)} m) dG + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{v}_i^{(1)} S^{(1)} m + \hat{v}_i^{(2)} S^{(2)} m) dV = 0, \tag{6}$$

$$P^{(1)}(x_1, x_2, x_3, 0) = P_{\text{нач}}^{(1)}(x_1, x_2, x_3), \tag{7}$$

$$S^{(1)}(x_1, x_2, x_3, 0) = S_{\text{нач}}^{(1)}(x_1, x_2, x_3). \tag{8}$$

Здесь верхние индексы в скобках – фаза: $n = 1, 2$; $v_i^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$ – скорость движения; $m(x_1, x_2, x_3)$ – пористость; $S^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$ – насыщенность; $k_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ – тензор абсолютной проницаемости; $\mu^{(n)}$ –

¹ Институт математики, естественных наук и информационных технологий Тюменского государственного университета, ул. Перекопская, 15а, 625003, г. Тюмень; А. С. Журавлёв, ст. преподаватель, e-mail: a.zhuravliov@gmail.com; Е. С. Журавлёв, аспирант, e-mail: tesseract.tmn@gmail.com; А. Б. Шабаров, зав. кафедрой, профессор, e-mail: kaf_mms@utmn.ru

динамическая вязкость; $f^{(n)}(S^{(1)}, m)$ — относительная фазовая проницаемость; $P^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$ — давление; $\rho^{(n)}$ — плотность; g_k — вектор, описывающий объемные силы; $L(S^{(1)}, m)$ — разность давлений в фазах, обусловленная наличием капиллярных сил; V — объем исследуемой области; G — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V ; χ_i — нормаль к поверхности G ; $\widehat{v}_i^{(n)} = \widehat{v}_i^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$ — скорость источника (стока), удовлетворяющая уравнению (6); $\widetilde{v}_i^{(n)} = \widetilde{v}_i^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$ — скорость потока на границах, удовлетворяющая уравнению (6); $P_{\text{нач}}^{(1)}$ — начальное давление в первой фазе; $S_{\text{нач}}^{(1)}$ — начальная насыщенность первой фазой.

Приведенная выше физико-математическая модель, как уже было отмечено, описывает фильтрацию несжимаемых жидкостей, однако пластовые флюиды (нефть и вода), составляющие предмет исследования в данной работе, являются слабосжимаемыми жидкостями. Это противоречие разрешается в случае отсутствия тектонических напряжений и техногенного воздействия на пласт, поскольку в таких системах отсутствуют градиенты давления, приводящие к существенному изменению плотностей слабосжимаемых жидкостей [6].

Начально-краевую задачу (1)–(8) при допущении, заключающемся в учете только сегрегационных процессов, можно свести к следующим соотношениям (см. раздел 7 настоящей статьи):

$$\widehat{v}_i^{(1)} S^{(1)} m + \widehat{v}_i^{(2)} (1 - S^{(1)}) m = 0, \quad (9)$$

$$m \frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} + (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) \frac{\partial(\psi k_{ij} g_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\psi k_{ij} \frac{\partial L}{\partial x_j} + \widehat{v}_i^{(1)} S^{(1)} m \right) = 0, \quad (10)$$

$$\psi = \left(\frac{f^{(1)}}{\mu^{(1)}} \frac{f^{(2)}}{\mu^{(2)}} \right) \left(\frac{f^{(1)}}{\mu^{(1)}} + \frac{f^{(2)}}{\mu^{(2)}} \right)^{-1}, \quad (11)$$

$$S^{(1)}(x_1, x_2, x_3, 0) = S_{\text{нач}}^{(1)}(x_1, x_2, x_3), \quad (12)$$

$$\widetilde{v}_i^{(1)} S^{(1)} m + \widetilde{v}_i^{(2)} (1 - S^{(1)}) m = 0, \quad (13)$$

$$\chi_i k_{ij} \frac{\psi}{S^{(1)} m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(L - (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) g_k x_k \right) = \chi_i \widetilde{v}_i^{(1)} \quad \text{на границах.} \quad (14)$$

Выражение (10) представляет собой нелинейное параболическое однородное уравнение, замыкаемое соответствующими начальным (12) и краевым (14) условиями. При $\widehat{v}_i^{(1)} S^{(1)} m = 0$ в области определения отсутствуют источники, в случае $\widetilde{v}_i^{(1)} S^{(1)} m = 0$ на границах выполняется условие непротекания.

Соотношения (9) и (13) устанавливают ограничения на задание скоростей источников (стоков) и потоков на границе соответственно.

Уравнение (10) содержит только одну переменную $S^{(1)}$ и полностью определяет движение сплошной среды. Известная насыщенность одной из фаз позволяет найти насыщенность другой фазы с помощью уравнения (4). Кроме того, насыщенность определяет скорость движения с помощью уравнения неразрывности (2). Из уравнения (1) при интегрировании выявляется давление с учетом найденных скорости и насыщенности.

Соотношение (10), являясь трехмерным нелинейным уравнением параболического типа, не имеет аналитического решения; таким образом, решение этого уравнения следует искать при помощи численных методов.

3. Численная схема решения. Для конечно-разностной дискретизации на основе (10) и (14) нами сформулирована следующая начально-краевая задача (15)–(17):

$$F_i = -\psi k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(L - (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) g_k x_k \right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \xi^{(1)}, \quad (16)$$

$$\xi^{(1)} = - \frac{\partial \left(\widehat{v}_i^{(1)} S^{(1)} m \right)}{\partial x_i},$$

$$\chi_i \frac{F_i}{S^{(1)} m} = \chi_i \widetilde{v}_i^{(1)} \quad \text{на границах.} \quad (17)$$

Здесь также следует учитывать соотношения (9) и (13), ограничивающие произвольность задания скоростей \widehat{v}_i и \widetilde{v}_i .

Конечно-разностная аппроксимация системы уравнений (15)–(17) имеет вид

$$F_{i[r,w,d,h]} = - \sum_{j=1}^3 \psi_{[r,w,d,h]} k_{ij[r,w,d]} \frac{\Delta L_{[r,w,d,h]} + \tilde{g} \Delta x_{1[r,w,d]}}{\Delta x_{j[r,w,d]}}, \quad (18)$$

$$S_{[r,w,d,h+1]}^{(1)} = S_{[r,w,d,h]}^{(1)} + \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta t[h]}{m_{[r,w,d]}} \frac{\Delta F_{i[r,w,d,h]}}{\Delta x_{i[r,w,d]}} + \xi_{[r,w,d,h]}^{(1)}, \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^3 \chi_{i[r,w,d]} \frac{F_{i[r,w,d,h]}}{S_{[r,w,d,h]}^{(1)} m} = \sum_{i=1}^3 \chi_{i[r,w,d]} \tilde{v}_{i[r,w,d,h]}^{(1)} \quad \text{на границах,}$$

где $[r, w, d, h]$ — номера конечных элементов: первые три — пространственные, четвертый — временной, $\tilde{g} = -(\rho^{(1)} - \rho^{(2)})g$. Конечно-разностная сетка, состоящая из конечных элементов, является равномерной и имеет регулярную структуру. Ось x_1 коллинеарна ускорению свободного падения g_k , что позволяет скалярное произведение $g_k x_k$ записывать в виде $g x_1$.

Предложенная конечно-разностная аппроксимация является явной. Относительные фазовые проницаемости $f^{(n)}$ в относительной подвижности ψ , стоящие “перед” аппроксимированными производными, являются взятыми “против потока” (обоснование такого подхода приведено в [4]). Взятие какого-либо параметра “против потока” при конечно-разностном аппроксимировании частных производных означает взятие этого параметра из блока, из которого происходит вытекание фазы, к которой относится параметр. Остальные параметры, стоящие перед производными, являются средними гармоническими по области аппроксимирования.

Система координат при фиксированной оси x_1 выбирается таким образом, что тензор абсолютной проницаемости k_{ij} приобретает диагональный вид. Иными словами, в каждой точке моделируемого пласта плоскость $x_2 x_3$ является касательной к боковой поверхности (поверхности напластования). В задачах по моделированию геологических систем такой подход является распространенным [9].

Пористость m и компоненты тензора абсолютной проницаемости k_{ij} являются функциями от координат и принимаются известными. Относительные фазовые проницаемости $f^{(n)}(S^{(1)}, m)$ и разность давлений $L(S^{(1)}, m)$ задаются функциями от насыщенности первой фазой и от пористости.

Приращение времени Δt является переменным и выбирается таким, что максимальное изменение насыщенности первой фазой на последующем временном шаге равно заданной доле от максимально возможного изменения. Отмеченный множитель для максимально возможного шага по времени экспериментально выбирается достаточно малым для соблюдения устойчивости схемы решения (в приведенных расчетах он составил 0.001). Таким образом, предложенная схема является условно устойчивой.

Описанную схему решения предполагается использовать в задачах о вторичной миграции углеводородов в естественных геологических коллекторах. Характерные размеры этой системы таковы, что в горизонтальной плоскости они на три порядка больше, чем в вертикальной. Углы наклона геологических пластов, как правило, не превышают нескольких градусов. Гравитационная сила является определяющей в этих задачах. Таким образом, характерное время достижения капиллярно-гравитационного равновесия даже с учетом анизотропии абсолютной проницаемости в вертикальном направлении на 4–6 порядков выше, чем в горизонтальном.

На приведенных в предыдущем абзаце аргументах основана предложенная авторами работы методика расщепления решения конечно-разностных уравнений (18) и (19), позволяющая значительно снижать машинное время расчетов в задачах о вторичной естественной миграции (методом расщепления в задачах движения жидкостей посвящена работа [10]). Алгоритм заключается в том, что при суммировании в уравнениях (18) и (19) на каждый временной шаг, кратный определенному числу, не учитывается вертикальная координата. Число временных шагов, через которое производится описанное приближение, далее называется степенью расщепления схемы решения. На настоящий момент обоснование степени расщепления можно осуществить только эмпирически.

Описанные численные методы реализованы в программном комплексе “Saturation” [11], позволяющем проводить геолого-гидродинамическое моделирование процессов миграции нефти в неоднородных изотропных геологических коллекторах с использованием полноценной геофизической информации.

В [12] проводится изучение влияния неоднородности пластов и свойств флюидов на миграцию нефти и конфигурацию ее залежей посредством численного решения задачи о равновесной фильтрации двухфазной слабосжимаемой жидкости в изотропной неоднородной поровой среде. Математическая модель сводится к двум уравнениям: уравнению параболического типа относительно давления в одной из фаз и уравнению неразрывности относительно насыщенности одной из фаз. Применялась распространенная в

этих задачах IMPES-схема численного решения (неявная по давлению и явная по насыщенности).

4. Описание расчетной модели. В настоящей статье приведены результаты расчетов, моделирующих процесс аккумуляции нефти в модельном пласте, представляющем собой структурную ловушку. Размерность сетки расчетной модели (рис. 4 и 5) и геометрические размеры одного блока по формуле “длина×высота×ширина” составляют $200 \times 30 \times 1$ и $50 \text{ м} \times 0.5 \text{ м} \times 1 \text{ м}$ соответственно. Первая фаза соответствует нефти, вторая — воде.

Приток нефти в модельный пласт моделировался заданием источника в блоках, примыкающих к левой границе. Мощность источников, приводимая в результатах, представляет собой объем нефти, генерируемый в год, где объем нефти измеряется поровыми объемами области, в которой задается источник. Размер источника, приводимый в результатах, представляет собой поверхность блоков с источником, через которую происходит приток нефти в пласт.

Пористость и абсолютная проницаемость в латеральном направлении заданы постоянными и равны соответственно 0.2 и 1000 мД (миллионная доля). Анизотропия абсолютной проницаемости сведена к заданию вертикальной проницаемости, равной 10 % от латеральной. Плотности нефти и воды составляют 800 кг/м^3 и 1000 кг/м^3 соответственно. Вязкости нефти и воды составляют $5 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ и $1 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ соответственно. Зависимости относительных фазовых проницаемостей, относительной подвижности и разницы давлений в фазах представлены на рис. 1а, 1б и 1с соответственно.

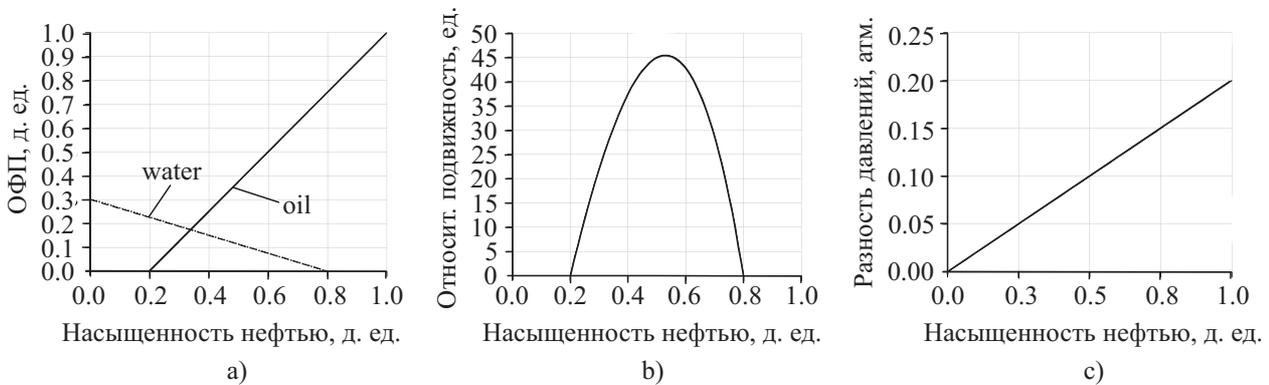


Рис. 1. Функции относительных фазовых проницаемостей и разности давлений в фазах: а) относительные фазовые проницаемости $f^{(n)}$; б) относительная подвижность ψ ; в) разность давлений в фазах L

На рис. 1а и 1б видно, что даже при задании относительных фазовых проницаемостей $f^{(n)}$ линейными функциями только от насыщенности $S^{(1)}$ относительная подвижность ψ является нелинейной функцией и характеризуется колоколообразной формой. Таким образом, даже в идеализированном случае линейности функций относительных фазовых проницаемостей движение может иметь сложный характер.

5. Обоснование метода расщепления. Для апробации и обоснования предложенной методики расщепления численной схемы решения был проведен ряд расчетов, результаты которых представлены на рис. 2. Рис. 2а иллюстрирует среднеквадратичное отклонение поля насыщенности, соответствующее расчету с расщеплением, от поля насыщенности, соответствующего расчету без расщепления:

$$\sigma_{[h]} = \sqrt{\frac{1}{N_r N_w N_d} \sum_{r=1}^{N_r} \sum_{w=1}^{N_w} \sum_{d=1}^{N_d} \left(\Delta S_{[r,w,d,h]}^{(1)} - \overline{\Delta S_{[h]}^{(1)}} \right)^2}.$$

Здесь $\Delta S_{[r,w,d,h]}^{(1)} = S_{[r,w,d,h]}^{(1)} \text{ без расщ.} - S_{[r,w,d,h]}^{(1)} \text{ с расщ.}$, $N_r \times N_w \times N_d$ — размерность конечно-разностной сетки модели. Максимальное и минимальное среднеквадратичное отклонение, представленное на графике, равно 0.008 (степень расщепления 2) и 0.003 (степень расщепления 7) соответственно. При степени расщепления больше 10 наблюдается линейное увеличение среднеквадратичного отклонения.

Рисунок 2б демонстрирует линейную зависимость количества временных шагов, затрачиваемых алгоритмом, от степени расщепления. Количество временных шагов при степени расщепления 7, дающей наиболее точный результат, равно 5.9×10^5 , в то время как количество временных шагов при использовании схемы без расщепления равно 736.7×10^5 . Таким образом, применение схемы расщепления дает значительную экономию расчетного времени при соблюдении приемлемой точности.

6. Влияние источников на картину аккумуляции. В рамках данной работы был проведен ряд исследований, позволяющих оценить влияние мощности и размера источника нефти на скорость аккумуляции нефти в геологической ловушке. Результаты этих исследований представлены на рис. 3–5.

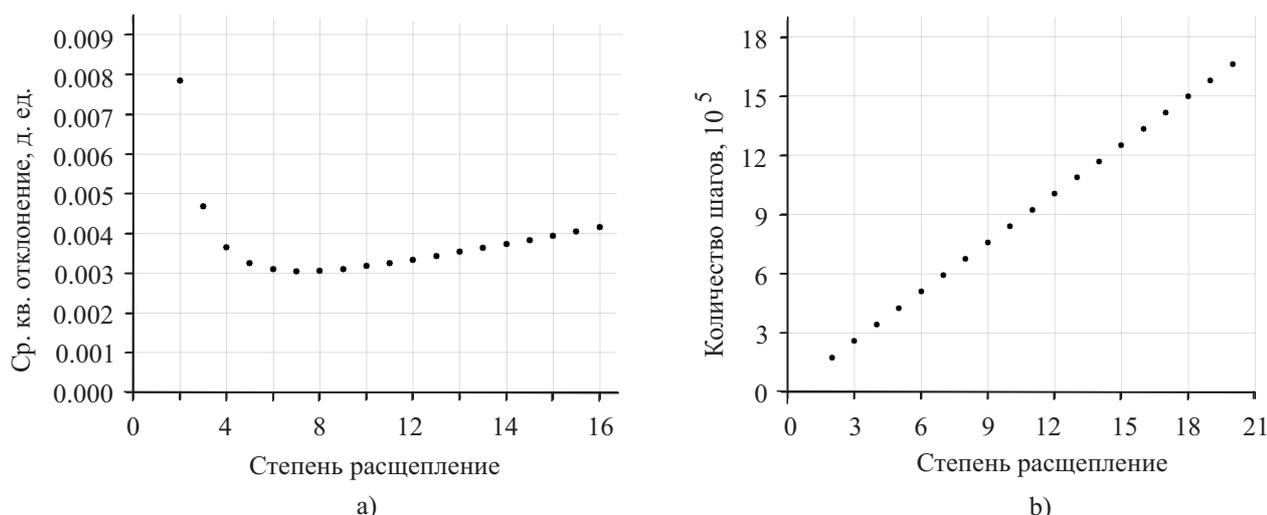


Рис. 2. Обоснование алгоритма расщепления конечно-разностной схемы: а) зависимость степени расщепления от среднеквадратичного отклонения от решения без расщепления; б) зависимость степени расщепления от количества временных шагов. Решение без расщепления соответствует 736.7×10^5 временным шагам, размер источника 15 м^2 , мощность источника $70 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$

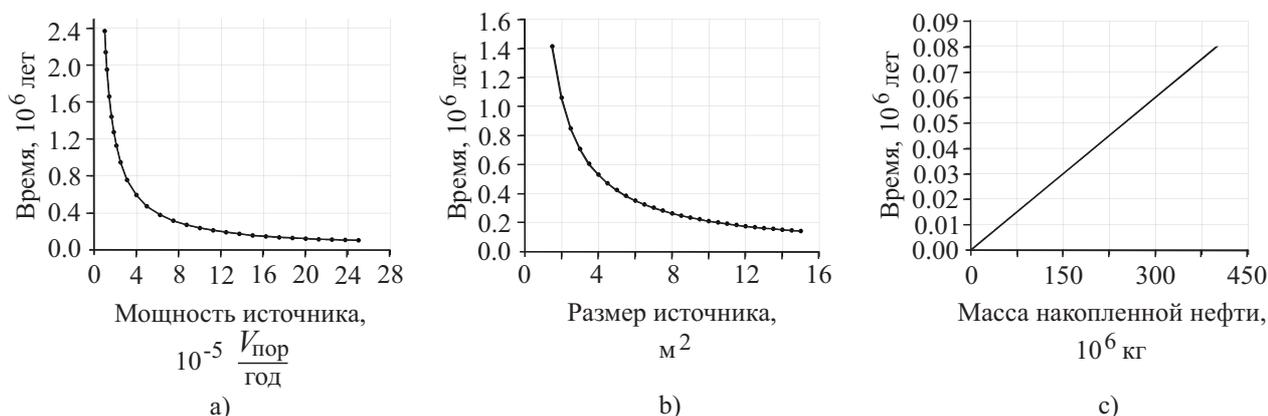


Рис. 3. Оценка скорости аккумуляции углеводородов: а) время накопления $400 \times 10^6 \text{ кг}$ в зависимости от мощности источника, размер которого 15 м^2 ; б) время накопления $400 \times 10^6 \text{ кг}$ в зависимости от размера источника, мощность которого $70 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$; в) зависимость количества накопленной нефти от времени: размер источника 15 м^2 , мощность источника $70 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$

Рисунок 3а иллюстрирует зависимость времени аккумуляции $400 \times 10^6 \text{ кг}$ нефти в модельной ловушке от мощности источника. Размер источника соответствует 15 м^2 . Кривая зависимости имеет гиперболический характер; на оси ординат (с уменьшением мощности источника) кривая медленно стремится к нулю, на оси абсцисс (с увеличением мощности источника) кривая выходит на асимптоту, что связано с ограничением мощности источника сверху сегрегационной природой моделируемого движения (см. (9)). Картину аккумуляции нефти при расчете на 2×10^5 лет, размере источника 15 м^2 и разных мощностях источника характеризует рис. 4.

На рис. 3б показана зависимость времени аккумуляции $400 \times 10^6 \text{ кг}$ нефти в модельной ловушке от размера источника. Мощность источника соответствует $70 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$. Кривая зависимости имеет гиперболический характер, как и в эксперименте, представленном на рис. 3а, что в обоих случаях, по-видимому, связано с нелинейностью функции относительной подвижности ψ (рис. 1б), поскольку функция относительной подвижности существенно влияет на характер сегрегационного движения. Картину аккумуляции нефти при расчете на 2×10^5 лет мощности источника $70 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$ и разных размерах источника характеризует рис. 5.

Рисунок 3в демонстрирует линейную зависимость массы накопленной нефти от времени аккумуляции при размере и мощности источника 15 м^2 и $70 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$ соответственно. Данная зависимость говорит о том, что нелинейный характер движения не сказывается на скорости накопления нефти даже

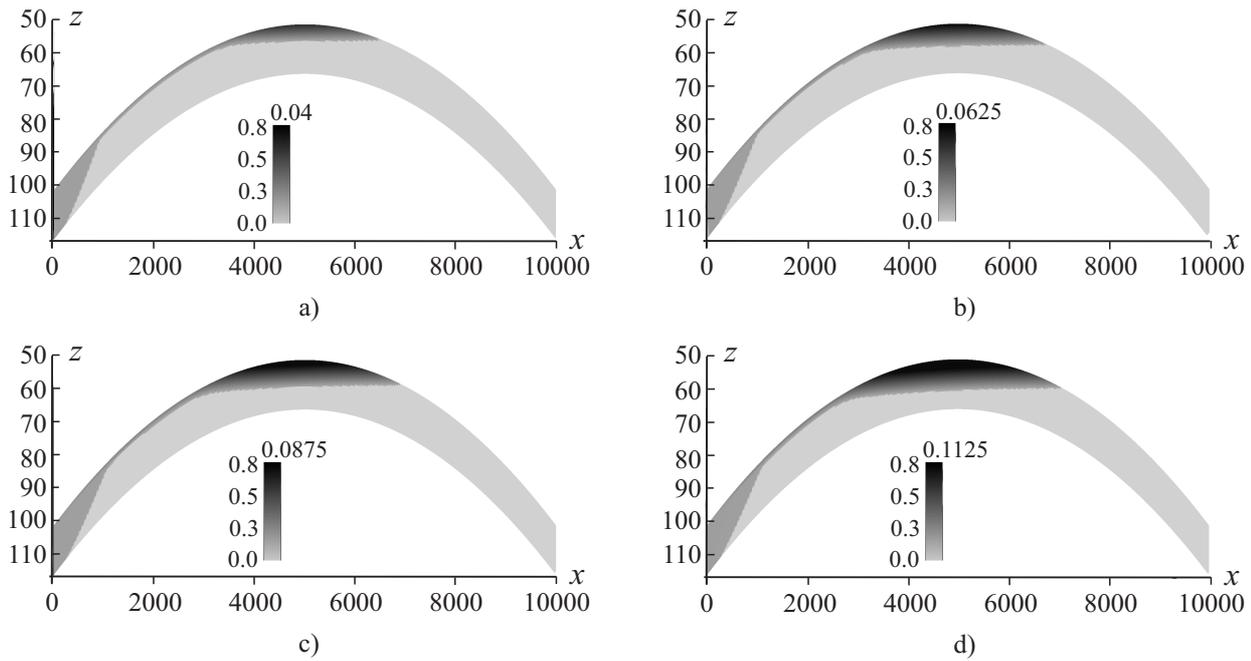


Рис. 4. Насыщенность нефтью. Аккумуляция углеводородов. Расчет на 2×10^5 лет. Размер источника 15 м^2 .
 Разная мощность источника: а) $4 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$ ($36.9 \times 10^6 \text{ кг}$); б) $6.25 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$ ($55 \times 10^6 \text{ кг}$);
 в) $8.75 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$ ($75.1 \times 10^6 \text{ кг}$); д) $11.25 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$ ($95.1 \times 10^6 \text{ кг}$)

при высокой мощности источника (при мощности источника $70 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$ кривая на рис. За выходит на асимптоту).

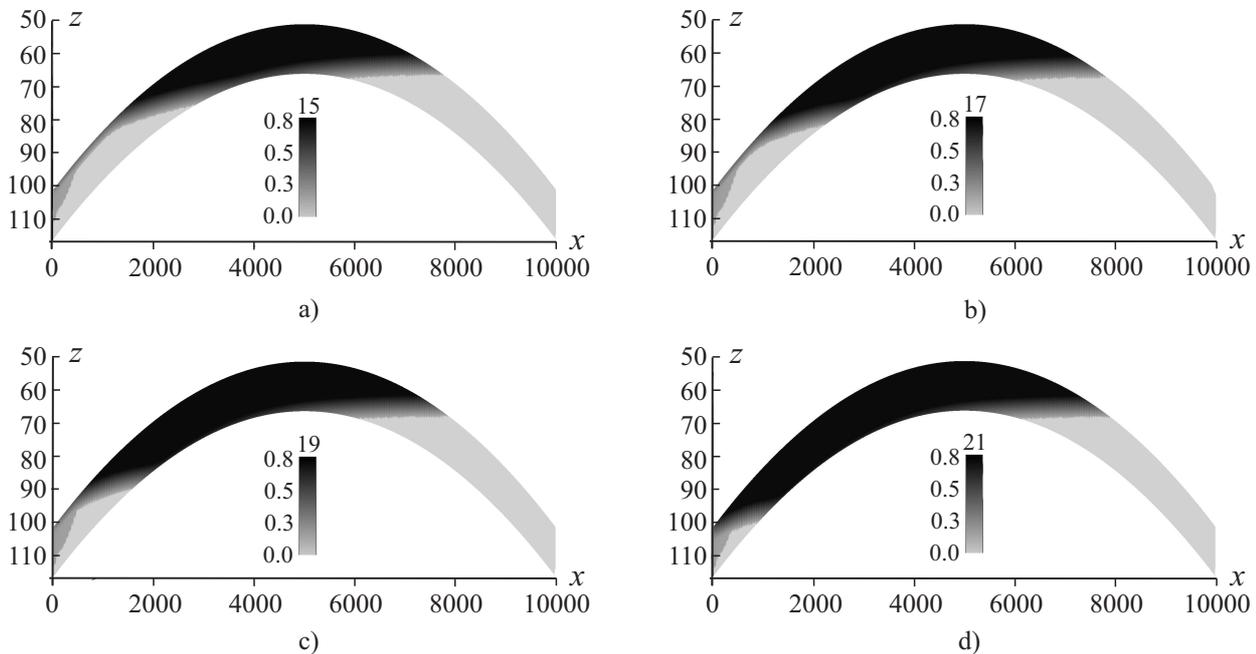


Рис. 5. Насыщенность нефтью. Аккумуляция углеводородов. Расчет на 2×10^5 лет. Мощность источника $70 \times 10^{-5} V_{\text{пор}}/\text{год}$. Разный размер источника: а) 7.5 м^2 ($285.2 \times 10^6 \text{ кг}$); б) 8.5 м^2 ($323.3 \times 10^6 \text{ кг}$);
 в) 9.5 м^2 ($361.4 \times 10^6 \text{ кг}$); д) 10.5 м^2 ($399.4 \times 10^6 \text{ кг}$)

7. Вывод соотношений (9)–(14), составляющих начально-краевую задачу. Соотношения (1), линейно связывающие скорости фильтрации с суммами действующих сил, следует разделить на соответствующие относительные фазовые проницаемости $f^{(n)}$ и умножить на соответствующие вязкости $\mu^{(n)}$,

после чего вычесть одно из другого:

$$v_i^{(1)} S^{(1)} m \frac{\mu^{(1)}}{f^{(1)}} - v_i^{(2)} S^{(2)} m \frac{\mu^{(2)}}{f^{(2)}} = k_{ij} M_j, \tag{20}$$

где вектор

$$M_j = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(L - (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) g_k x_k \right), \tag{21}$$

как это видно из физического смысла составляющих уравнения, представляет собой сумму сил, вызывающих относительное движение фаз.

При получении (20) было учтено соотношение (3), согласно которому разница градиентов давлений в фазах равна градиенту функции L : $\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_j} - \frac{\partial P^{(2)}}{\partial x_j}$.

Далее, используя несжимаемость жидкостей, следует сложить уравнения (2), представляющие собой законы сохранения массы этих жидкостей. Таким образом получается выражение

$$\frac{\partial \left(v_i^{(1)} S^{(1)} m + \widehat{v}_i^{(1)} S^{(1)} m + v_i^{(2)} S^{(2)} m + \widehat{v}_i^{(2)} S^{(2)} m \right)}{\partial x_i} = 0,$$

в котором отсутствует время и которое удовлетворяет следующим соотношениям, справедливым при условии сегрегационности характера движения [3]:

$$v_i^{(1)} S^{(1)} m + v_i^{(2)} S^{(2)} m = 0, \tag{22}$$

$$\widehat{v}_i^{(1)} S^{(1)} m + \widehat{v}_i^{(2)} S^{(2)} m = 0. \tag{23}$$

Отсюда следует

$$\widetilde{v}_i^{(1)} S^{(1)} m + \widetilde{v}_i^{(2)} S^{(2)} m = 0. \tag{24}$$

С учетом (20) соотношение (22) преобразуется к выражению

$$v_i^{(1)} S^{(1)} m = \psi k_{ij} M_j. \tag{25}$$

Функция $\psi = \psi(S^{(1)}, m, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$ (см. (11)) оказывает существенное влияние на относительное движение фаз. Параметр ψ называется в настоящей работе относительной подвижностью.

Далее следует в уравнение (2) для первой фазы подставить скорость фильтрации из (25):

$$m \frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\psi k_{ij} M_j + \widehat{v}_i^{(1)} S^{(1)} m \right)}{\partial x_i} = 0. \tag{26}$$

С помощью определения суммы сил относительного движения фаз M_j (см. (21)) в соотношении (26) получается уравнение (10).

Условие на границе (14) получается путем подстановки (25) в (8) с учетом (21).

Ограничения на произвольность задания источников и условий на границах (9) и (13) получаются из (23) и (24) с использованием (4).

Вывод уравнения (10) без учета источников в предположении сегрегационности характера движения приведен в работе [7], без учета источников и сегрегационности — в работе [3].

8. Заключение. Сформирована начально-краевая задача равновесной фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом наличия источников и стоков в предположении сегрегационности характера движения. Предложен и обоснован новый метод расщепления численной схемы при решении задач о вторичной миграции углеводородов в геологических неоднородных анизотропных коллекторах. Зависимость мощности и размера источника нефти от времени формирования залежи имеет параболический характер. В случае максимально возможной мощности источника скорость нефтенакпления остается постоянной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rapoport L., Leas W. Properties of linear waterflood // AIME Trans. 1953. **198**. 139–148.
2. Нестеров И.И., Шпильман В.И. Теория нефтегазонакопления. М.: Недра, 1987.
3. Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational methods for multiphase flows in porous media. Philadelphia: SIAM, 2006.

4. *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
5. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.
6. *Бакиров Э.А., Ермолкин В.И., Ларин В.И.* Геология нефти и газа. М.: Недра, 1990.
7. *Шабаров А.Б., Журавлёв А.С., Журавлёв Е.С.* Моделирование миграции и аккумуляции углеводородов в естественных геологических системах // Вестник ТюмГУ. Физ.-матем. науки. 2011. **7**. 38–45.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
9. *Закревский К.Е.* Геологическое 3D моделирование. М.: ООО “ИПЦ Маска”, 2009.
10. *Ковеня В.М., Яценко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
11. *Журавлёв А.С.* Программный комплекс “Saturation”. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012617089, 2012.
12. *Степанов С.В., Шабаров А.Б.* Численное исследование распределения нефти и оценка ее запасов в неоднородных пластах // Матем. моделирование. 2003. **15**, № 9. 88–98.

Поступила в редакцию
25.03.2013
