УДК 519.622

УСЛОВИЯ ИСТОКОПРЕДСТАВИМОСТИ И СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЧАСТЬ I

А. Б. Бакушинский[1], **М. Ю. Кокурин**[2]

Представлен обзор последних результатов авторов по оценкам скорости сходимости методов регуляризации линейных операторных уравнений в гильбертовом и банаховом пространствах. Особое внимание уделяется вопросам необходимости условий истокообразной представимости для степенных оценок скорости сходимости рассматриваемых методов.

Ключевые слова: линейные некорректные задачи, банахово пространство, регуляризация, скорость сходимости, истокообразное представление.

1. Введение. Цель предлагаемой работы — познакомить специалистов по численным методам с некоторыми важными результатами в области приближенного решения некорректных задач, полученными в последние годы. Эти результаты имеют теоретический и практический интерес, а их систематизация и подробное изложение представляется полезным. Объектом нашего внимания являются операторные уравнения вида

$$F(x) = 0, \quad x \in X_1, \tag{1.1}$$

где $F : X_1 \to X_2$ — нелинейный в общем случае оператор, X_1, X_2 — комплексные гильбертовы либо банаховы пространства. Предполагается, что уравнение (1.1) имеет решение x^*, которое может не быть единственным. Считаем, что оператор $F(x)$ дважды дифференцируем по Гато в окрестности точки x^*, при этом производная $F'(x)$ может не быть непрерывно обратимой в указанной окрестности. Уравнения такого типа часто возникают в процессе математического моделирования при решении обратных задач геофизики, астрофизики, теории рассеяния, при интерпретации результатов физических экспериментов и в других областях естествознания (см. [1–6]). Этим объясняется постоянный интерес к проблематике, связанной с численным анализом уравнений рассматриваемого вида. В наших предположениях уравнение (1.1) относится к классу некорректных [1 – 4], поскольку зависимость его решения от малых вариаций оператора F в общем случае не является непрерывной, так что небольшое возмущение F может вызвать значительное изменение решения либо вообще превратить исходное уравнение в несовместное. Указанные обстоятельства порождают существенные трудности при отыскании решений прикладных некорректных задач вида (1.1) традиционными методами вычислительной математики. Характерная особенность этих методов заключается в том, что в процессе построения приближения к решению информация об уровне погрешности в исходных данных задачи как правило не используется. Потребности численного нахождения решений практических некорректных задач диктуют необходимость разработки специально приспособленных для этого методов регуляризации, позволяющих при наличии приближенного оператора $\tilde{F}$ с известным уровнем погрешности δ получить такое приближение к решению, которое стремится к точному при $\delta \to 0$. В отличие от процедур классической вычислительной математики, методы регуляризации существенно используют информацию о величине погрешности в исходных данных.

Создание методов регуляризации некорректных уравнений вида (1.1) во многих случаях удобно проводить по следующей схеме (см. [4, 5]). Пусть $\mathbf{F}$ — класс операторов, которому принадлежат точный и приближенные операторы в (1.1). На первом этапе в предположении, что оператор F доступен без погрешностей, строится параметрическое семейство отображений $\Re_\alpha : \mathbf{F} \to X_1$, сопоставляющих оператору $F \in \mathbf{F}$ и параметру регуляризации $\alpha \in (0, \alpha_0]$ приближение к решению (1.1) (т.е. элемент $x_\alpha = \Re_\alpha(F)$) так, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} x_\alpha = x^*$. Затем в предположении, что вместо точного оператора F доступно его приближение $\tilde{F} \in \mathbf{F}$ и величина (вектор) δ, оценивающая в соответствующей метрике погрешность задания F, находится такая зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$ (правило выбора параметра регуляризации), что для элементов $x^\delta_{\alpha(\delta)} = \Re_{\alpha(\delta)}(\tilde{F})$ выполняется равенство $\lim\limits_{\delta\to 0} x^\delta_{\alpha(\delta)} = x^*$. Последнее соотношение означает, что элемент $x^\delta_{\alpha(\delta)}$ может быть взят в качестве искомой аппроксимации точного решения x^*, отвечающей приближенному оператору $\tilde{F}$.

[1] Институт системного анализа РАН, пр. 60-летия Октября, 9, 117312, Москва; e-mail: bakush@isa.ru
[2] Марийский государственный университет, пр. Ленина, 1, 424001, г. Йошкар-Ола; e-mail: kokurin@marsu.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Одно из основных направлений исследований методов регуляризации уравнений (1.1) связано с выделением классов решений x^*, на которых с некоторым показателем $p > 0$ выполняется степенная оценка скорости сходимости

$$\|x_\alpha - x^*\|_{X_1} \leqslant c\alpha^p \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0] \tag{1.2}$$

для случая точных данных либо оценка

$$\|x^\delta_{\alpha(\delta)} - x^*\|_{X_1} \leqslant c\delta^p \quad \forall \delta \in (0, \delta_0] \tag{1.3}$$

для задач с погрешностями. Здесь и далее $\|\cdot\|_X$ обозначает норму банахова пространства X. Общепринятый способ формализации требований к решению, обеспечивающих справедливость оценок (1.2) и (1.3), заключается в наложении на x^* условий истокопредставимости вида

$$x^* - \xi \in R((F'(x^*)^* F'(x^*))^p) \tag{1.4}$$

либо

$$x^* - \xi \in R(F'(x^*)^p), \tag{1.5}$$

где $R(A) = \{y \in X_2 : y = Ax, x \in X_1\}$ — образ оператора A, A^* — сопряженный оператор, $\xi \in X_1$ — параметр методов, используемый для управления сходимостью (в частности, можно полагать $\xi = 0$). Наиболее полно этот способ разработан применительно к линейным уравнениям в гильбертовом пространстве, т.е. в случае, когда оператор F в (1.1) имеет вид

$$F(x) = Ax - f, \tag{1.6}$$

где $A : X_1 \to X_2$ — линейный непрерывный оператор, $f \in X_2$, пространства X_1 и X_2 гильбертовы. Для таких уравнений в работах 60-х – 70-х годов построен и исследован широкий класс процедур регуляризации, среди которых выделены процедуры, оптимальные на различных классах истокопредставимых решений [3 – 9]. В [4, 5, 10 – 12] начато исследование аналогов этих процедур для линейных уравнений в банаховом пространстве. В работах [5, 13 – 15] развита общая схема построения итерационных методов регуляризации нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве на основе линейных регуляризующих процедур. Подчеркнем, что в большинстве работ рассматриваемого направления речь идет о получении оценок скорости сходимости соответствующих методов при выполнении условий (1.4), (1.5); вопрос же о необходимости этих условий для выполнения указанных оценок как правило не рассматривается. Одной из целей настоящей работы, носящей обзорный характер, является описание техники получения необходимых условий сходимости различных классов методов решения (1.1). Основной результат применения этой техники к рассматриваемым далее классам методов вкратце заключается в том, что условия истокообразного представления решения (1.4), (1.5), использовавшиеся ранее большинством авторов для получения оценок вида (1.2), практически совпадают с необходимыми. Таким образом, условия (1.4), (1.5) весьма точно описывают множество возможных решений уравнения (1.1), на которых достигается степенная оценка (1.2). В этом отношении представленные результаты аналогичны обратным теоремам типа Бернштейна в теории приближения функций [16]. Попутно развивается общая методика построения процедур регуляризации линейных уравнений в банаховом пространстве, контуры которой были намечены в [4, 5]. На этой основе разрабатывается общая схема исследования итерационных методов ньютоновского типа для нелинейных уравнений в банаховом пространстве, обобщающая аналогичную схему для гильбертовых пространств [5, 13 – 15].

Структура работы следующая. Первая ее часть (разделы 2 – 6) посвящена линейным уравнениям (1.1) с операторами вида (1.6). В разделе 2 излагается известная [4, 8] схема построения методов регуляризации линейных некорректных уравнений в гильбертовом пространстве, служащая отправной точкой для дальнейших построений. В разделе 3 устанавливается необходимость условий истокопредставимости для степенных оценок скорости сходимости соответствующих методов. Основные результаты этого раздела получены совместно с Н. А. Юсуповой. В разделе 4 обосновывается аналог вышеупомянутой схемы для линейных уравнений в банаховом пространстве при отсутствии погрешностей. В этом случае условие истокопредставимости удобно брать в виде (1.5). Показывается, что в банаховом пространстве условие (1.5) достаточно для выполнения оценки (1.2) с тем же показателем p. В разделе 5 устанавливается регуляризующее свойство схемы из раздела 4 для задач с погрешностями. Наконец, раздел 6 посвящен доказательству того, что условие (1.5) в случае банахова пространства близко к необходимому для выполнения (1.2). Используемые определения и обозначения вводятся и поясняются по мере их появления в тексте. Вторая часть работы будет посвящена итерационным методам решения нелинейных уравнений (1.1).

2. Методы регуляризации линейных уравнений в гильбертовом пространстве. В этом разделе, следуя [4, 8], опишем базовую схему построения методов регуляризации линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве.

Напомним некоторые используемые в работе определения и обозначения. Как обычно, для банаховых пространств X_1 и X_2 через $L(X_1, X_2)$ обозначается пространство всех линейных непрерывных операторов $A\colon X_1 \to X_2$ с нормой $\|A\|_{L(X_1,X_2)} = \max\{\|Ax\|_{X_2}\colon \|x\|_{X_1} \leqslant 1\}$. Для краткости полагаем $L(X, X) \equiv L(X)$. Через $N(A) = \{x \in X_1\colon Ax = 0\}$ обозначается нулевое подпространство оператора $A \in L(X_1, X_2); \sigma(A)$ и $\rho(A) = \mathbf{C}\backslash\sigma(A)$ есть соответственно спектр и резольвентное множество оператора $A \in L(X)$, $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ обозначает резольвенту A, E — единичный оператор.

Обратимся к уравнению

$$Ax = f, \quad x \in X_1, \tag{2.1}$$

где оператор $A \in L(X_1, X_2)$, элемент $f \in X_2$, пространства X_1 и X_2 гильбертовы.

Ввиду наличия для самосопряженных операторов развитого операторного исчисления (см., например, [17]) во многих отношениях удобнее иметь дело с уравнениями, включающими самосопряженные операторы. В том случае, когда исходный оператор A не является самосопряженным, применяя к обеим частям (2.1) оператор A^*, приходим к уравнению

$$A^*Ax = A^*f, \quad x \in X_1, \tag{2.2}$$

оператор которого самосопряжен. Пусть P — ортопроектор на замыкание $\operatorname{cl} R(A)$ образа $R(A)$. Связь решений уравнений (2.1) и (2.2) устанавливает следующая известная

Лемма 2.1. *Множества решений уравнения* (2.2) *и уравнения*

$$Ax = Pf, \quad x \in X_1,$$

совпадают.

Решения (2.2) называются квазирешениями уравнения (2.1). В случае, когда $f \notin R(A)$ и $Pf \in R(A)$, уравнение (2.1) не имеет решений, но обладает квазирешениями. Ясно также, что множество решений (2.1), если оно непусто, совпадает с множеством квазирешений. Ниже, говоря об уравнении (2.1), будем иметь в виду задачу отыскания его решения в случае самосопряженного оператора $A^* = A \in L(X)$, $X = X_1 = X_2$, либо квазирешения, если оператор A несамосопряженный. Обозначим через X^* (X_1^*) множество решений (квазирешений) (2.1). В дальнейшем предполагается, что $X^* \neq \emptyset$ $(X_1^* \neq \emptyset)$.

В качестве класса $\mathbf{F}$, описывающего совокупность возможных точных и приближенных данных (A, f) уравнения (2.1), естественно взять $\mathbf{F} = L(X_1, X_2) \times X_2$.

Перейдем к описанию отображений $\Re_\alpha\colon \mathbf{F} \to X_1, \alpha \in (0, \alpha_0]$, используемых при построении методов регуляризации уравнений (2.1). Напомним, что функции от самосопряженного оператора $A \in L(X)$, спектр которого расположен на отрезке $[M_0, M]$, определяются посредством спектрального разложения $A = \int\limits_{M_0}^{M} \lambda\, dE_\lambda$ [17, гл. IX]. Здесь $\{E_\lambda\}$ — семейство спектральных проекторов A. Таким образом, для произвольной функции $\varphi\colon [M_0, M] \to \mathbf{C}$, измеримой, конечной и определенной почти всюду относительно спектрального семейства $\{E_\lambda\}$ (т.е. относительно всех мер Лебега–Стилтьеса, порожденных функциями $\|E_\lambda x\|^2_X, x \in X$), имеют место представления

$$\varphi(A) = \int\limits_{M_0}^{M} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda, \tag{2.3}$$

$$\|\varphi(A)x\|^2_X = \int\limits_{M_0}^{M} |\varphi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2_X, \quad x \in D(\varphi(A)). \tag{2.4}$$

В случае вещественнозначной функции $\varphi(\lambda)$ оператор $\varphi(A)$ также самосопряжен. Он является ограниченным тогда и только тогда, когда $\operatorname{vrai}\sup\limits_{\{E_\lambda\}} |\varphi(\lambda)| < \infty$. Здесь верхняя грань вычисляется по совокупности всех мер, порожденных семейством $\{E_\lambda\}$. При этом

$$\|\varphi(A)\|_{L(X)} = \operatorname{vrai}\sup_{\{E_\lambda\}} |\varphi(\lambda)|. \tag{2.5}$$

В общем случае оператор $\varphi(A)$ неограничен и имеет область определения

$$D(\varphi(A)) = \Big\{x \in X\colon \int\limits_{M_0}^{M} |\varphi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2_X < \infty\Big\}, \tag{2.6}$$

плотную в X.

Рассмотрим вначале случай, когда в (2.1) $X_1 = X_2 = X$ и оператор $A \in L(X)$ самосопряженный. Зафиксируем начальное приближение $\xi \in X$ и семейство $\Theta(\lambda, \alpha), \alpha \in (0, \alpha_0]$, измеримых по Борелю вещественно- или комплекснозначных функций на $[M_0, M] \supset \sigma(A)$, таких, что выполняется следующее условие.

Условие 2.1. Для всех $p \in [0, p_0]$ $(p_0 > 0)$ имеет место оценка

$$\sup_{\lambda \in [M_0, M]} |\lambda|^p |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \leqslant c_0 \alpha^p \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{2.7}$$

где $c_0 = c_0(p_0) > 0$.

Здесь и далее через $c_0, c_1, \ldots$ обозначаются положительные константы, возможно, зависящие от задачи и характеристик рассматриваемых методов. Положим

$$\Re_\alpha(A, f) = (E - \Theta(A, \alpha)A)\,\xi + \Theta(A, \alpha)f.$$

Тем самым определено семейство процедур

$$x_\alpha = (E - \Theta(A, \alpha)A)\,\xi + \Theta(A, \alpha)f, \quad \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{2.8}$$

аппроксимации решения исходного уравнения. Система функций $\Theta(\lambda, \alpha)$ называется порождающей для группы методов (2.8). Следующее утверждение касается сходимости и оценки скорости сходимости методов (2.8) при наличии истокообразного представления решения.

Теорема 2.1 [4, с. 33–37; 8, с. 42]. *Пусть выполняется условие* 2.1. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Имеет место соотношение*

$$\lim_{\alpha \to 0} \|x_\alpha - x^*\|_X = 0, \tag{2.9}$$

где x^* — *ближайшее к* ξ *решение* (2.1), *т.е.*

$$x^* \in X^*, \quad \|x^* - \xi\|_X = \min\{\|x - \xi\|_X : x \in X^*\}. \tag{2.10}$$

2) *Если при этом начальная погрешность имеет вид*

$$x^* - \xi = A^p v, \quad v \in X, \tag{2.11}$$

и $p, q \geqslant 0$, $p + q \in (0, p_0]$, *то дополнительно к* (2.9) *справедлива оценка*

$$\|A^q(x_\alpha - x^*)\|_X \leqslant c_1 \|v\|_X \alpha^{p+q} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{2.12}$$

Аналогично (2.8) с заменой уравнения (2.1) на (2.2) строятся регуляризующие отображения $\Re_\alpha$ в случае несамосопряженного оператора A. Пусть порождающие функции $\Theta(\lambda, \alpha)$ удовлетворяют условию (2.7). Положим

$$\Re_\alpha(A, f) = (E - \Theta(A^*A, \alpha)A^*A)\,\xi + \Theta(A^*A, \alpha)A^*f$$

и определим соответствующее семейство процедур аппроксимации квазирешения уравнения (2.1):

$$x_\alpha = (E - \Theta(A^*A, \alpha)A^*A)\,\xi + \Theta(A^*A, \alpha)A^*f, \quad \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{2.13}$$

Теорема 2.2 [4, с. 33–37; 8, с. 45]. *Пусть выполняется условие* 2.1. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Имеет место соотношение*

$$\lim_{\alpha \to 0} \|x_\alpha - x^*\|_{X_1} = 0,$$

где x^* — *ближайшее к* ξ *квазирешение* (2.1), *т.е.*

$$x^* \in X_1^*, \quad \|x^* - \xi\|_{X_1} = \min\{\|x - \xi\|_{X_1} : x \in X_1^*\}. \tag{2.14}$$

2) *Если при этом начальная погрешность имеет вид*

$$x^* - \xi = (A^*A)^p w, \quad w \in X_1, \tag{2.15}$$

и $p,q \geqslant 0$, $p+q \in (0,p_0]$, *то справедлива оценка*

$$\|(A^*A)^q(x_\alpha - x^*)\|_{X_1} \leqslant c_2\|w\|_{X_1}\alpha^{p+q} \quad \forall \in (0,\alpha_0]. \tag{2.16}$$

Замечание 2.1. Если $q=0$, то в левых частях оценок (2.12), (2.16) стоит норма невязки $x_\alpha - x^*$. В случае $q=1$ выражение под знаком нормы в этих оценках принимает вид $A(x_\alpha - x^*) = Ax_\alpha - f$, $A^*A(x_\alpha - x^*) = A^*(Ax_\alpha - f)$, т.е. совпадает с вектором невязки в уравнении (2.1) или (2.2).

Ясно, что в нетривиальных случаях условия (2.11), (2.15) с показателем $p' > p$ жестче аналогичных условий с показателем $p > 0$, так что с ростом p эти условия выделяют все более узкий класс начальных невязок $x^* - \xi$. В случае, когда X_1, X_2 являются функциональными пространствами (например, L_2, W_2^k), а оператор A интегральный, условия (2.11), (2.15) означают повышенную гладкость невязки $x^* - \xi$ по сравнению с гладкостью, предписываемой исходным пространством X_1. В частности, если A есть оператор Грина эллиптического дифференциального оператора, эти условия эквивалентны включению $x^* - \xi \in C^r$, где показатель гладкости r пропорционален p [18, с. 454].

Рассмотрим несколько наиболее распространенных в вычислительной практике семейств порождающих функций $\Theta(\lambda,\alpha)$ и конкретизируем для них схему (2.8). Заметим, что в интересующем нас случае некорректного уравнения (2.1) $0 \in \sigma(A)$, поэтому границы отрезка $[M_0, M] \supset \sigma(A)$ таковы, что $M_0 \leqslant 0$, $M \geqslant 0$.

Пример 2.1. Пусть $M_0 = 0$. Функция

$$\Theta(\lambda,\alpha) = (\lambda+\alpha)^{-1} \tag{2.17}$$

удовлетворяет (2.7) при любом $p_0 \in (0,1]$. Реализация схемы (2.8) с функцией (2.17) сводится к решению уравнения

$$(A+\alpha E)\,x_\alpha = \alpha\xi + f$$

с непрерывно обратимым оператором $A+\alpha E$. Метод (2.8), (2.17) носит название метода М. М. Лаврентьева.

Пример 2.2. Зафиксируем произвольно $N \in \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \overset{\text{def}}{=} \{1,2,\dots\}$ и предположим, что $M_0 = 0$. Функция

$$\Theta(\lambda,\alpha) = \frac{1}{\lambda}\Big[1 - \Big(\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\Big)^N\Big] \tag{2.18}$$

удовлетворяет (2.7) при любом $p_0 \in (0,N]$. Легко видеть, что функция (2.17) содержится в семействе (2.18) при $N=1$. В данном случае вычисление приближения x_α, определяемого (2.8), сводится к реализации следующего конечного итерационного процесса [8, с. 19]:

$$x_\alpha = x_\alpha^{(N)}, \tag{2.19}$$

где

$$x_\alpha^{(0)} = \xi, \quad (A+\alpha E)\,x_\alpha^{(k+1)} = \alpha x_\alpha^{(k)} + f, \quad k = 0,1,\dots,N-1. \tag{2.20}$$

Метод (2.19), (2.20) носит название итерированного метода М. М. Лаврентьева.

Приведем аналог семейства порождающих функций (2.18) для произвольных самосопряженных операторов A.

Пример 2.3. Функция

$$\Theta(\lambda,\alpha) = \frac{1}{\lambda}\Big[1 - \Big(\frac{\alpha i}{\lambda+\alpha i}\Big)^N\Big] \tag{2.21}$$

удовлетворяет условию (2.7) при любом $p_0 \in (0,N]$ и произвольном $M_0 \leqslant 0$. Схема (2.8), (2.21) допускает аналогичную (2.19), (2.20) реализацию [8, с. 22]: $x_\alpha = x_\alpha^{(N)}$, где

$$x_\alpha^{(0)} = \xi, \quad (A+\alpha i E)\,x_\alpha^{(k+1)} = \alpha i x_\alpha^{(k)} + f, \quad k = 0,1,\dots,N-1.$$

Несложные вычисления показывают, что верхние ограничения на p_0, указанные в примерах 2.1 – 2.3, не могут быть ослаблены. Таким образом, теоремы 2.1 и 2.2 не гарантируют сходимость приближений x_α с оценками (2.12), (2.16), включающими показатель $p+q > p_0$, даже если показатель p в представлениях (2.11) и (2.15) сколь угодно велик. Про подобные методы говорят, что они обладают свойством насыщения. Таким образом, скорость сходимости методов с этим свойством растет вместе с показателем истокопредставимости p лишь до некоторого порогового значения, после чего остается постоянной при любом дальнейшем росте p. Приведем примеры методов вида (2.8), свободных от этого недостатка.

Пример 2.4. Функция
$$\Theta(\lambda,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda/\alpha}\right), & \lambda\neq 0,\\ \dfrac{1}{\alpha}, & \lambda=0\end{cases} \tag{2.22}$$
удовлетворяет условию (2.7) при любом $p_0>0$, если $M_0=0$. Процесс (2.8), (2.22) может быть реализован следующим образом [8, с. 27]:
$$x_\alpha=u(\alpha^{-1}),\quad \alpha\in(0,\alpha_0], \tag{2.23}$$
где функция $u=u(t)$ является решением задачи Коши
$$\frac{du}{dt}+Au=f,\quad u(0)=\xi. \tag{2.24}$$
Метод (2.23), (2.24) принято называть методом установления.

Пример 2.5. Пусть $M_0=0$, $g\colon[0,M]\to\mathbf{R}$ — измеримая по Борелю, ограниченная и непрерывная в точке $\lambda=0$ функция, такая, что
$$\sup_{\lambda\in[\varepsilon,M]}|1-\lambda g(\lambda)|\leqslant 1\quad\forall\varepsilon\in(0,M).$$
Тогда функция
$$\Theta(\lambda,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\left[1-(1-\lambda g(\lambda))\right]^{1/\alpha}, & \lambda\neq 0,\\ \dfrac{g(0)}{\alpha}, & \lambda=0,\end{cases} \tag{2.25}$$
определенная для дискретного множества значений $\alpha=1,\dfrac12,\ldots,\dfrac1n,\ldots$, удовлетворяет условию (2.7) при всех $p_0>0$. Процедура (2.8), (2.25) допускает реализацию в виде конечного итерационного процесса [8, с. 37]: если $\alpha=\dfrac1n$, то
$$x_\alpha=x^{(n)}, \tag{2.26}$$
где
$$x^{(0)}=\xi,\quad x^{(k+1)}=x^{(k)}-g(A)\left(Ax^{(k)}-f\right),\quad k=0,1,\ldots,n-1. \tag{2.27}$$
Перечисленным выше требованиям на $g(\lambda)$ удовлетворяют, например, функции $g(\lambda)\equiv\mu_0\in\left(0,\dfrac{2}{M}\right)$ и $g(\lambda)=(\lambda+\mu_0)^{-1}$, $\mu_0>0$.

Поскольку функции из примеров 2.4 и 2.5 удовлетворяют условию 1.1 без ограничений сверху на p_0, соответствующие процедуры (2.23), (2.24) и (2.26), (2.27) являются ненасыщаемыми.

Методы (2.13) с порождающими функциями из примеров 2.1 – 2.5 конкретизируются аналогично вышеприведенному.

Вкратце остановимся на случае приближенных данных в (2.1). Ограничимся общим случаем несамосопряженного оператора $A\in L(X_1,X_2)$. Пусть вместо точных данных (A,f) в (2.1) доступны приближения $(A_h,f_\eta)\in L(X_1,X_2)\times X_2$, такие, что
$$\|A_h-A\|_{L(X_1,X_2)}\leqslant h,\quad \|f_\eta-f\|_{X_2}\leqslant\eta. \tag{2.28}$$
В соответствии с (2.13) в качестве приближения к квазирешению x^* выбирается элемент
$$x_{\alpha(h,\eta)}^{(h,\eta)}=\Big(E-\Theta(A_h^*A_h,\alpha(h,\eta))\,A_h^*A_h\Big)\,\xi+\Theta(A_h^*A_h,\alpha(h,\eta))\,A_h^*f_\eta.$$
Не ограничивая общности можем считать, что $\sigma(A_h^*A_h)$, $\sigma(A^*A)\subset[0,M]$. Один из возможных способов согласования параметра регуляризации α и погрешности $\delta=(h,\eta)$, обеспечивающих сходимость $x_{\alpha(h,\eta)}^{(h,\eta)}$ к x^* при $h,\eta\to 0$ устанавливает

Теорема 2.3 [4, с. 39; 8, с. 97]. *Пусть выполняется условие* 2.1 *и кроме того*
$$\sup_{\lambda\in[0,M]}|\Theta(\lambda,\alpha)|\leqslant c_3\alpha^{-1}\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0],$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\sup_{\lambda\in[0,M]}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda|=0.$$

Предположим, что параметр регуляризации согласован с погрешностью так, что

$$\lim_{h,\eta\to 0}\alpha(h,\eta)=0,\quad \lim_{h,\eta\to 0}\frac{h+\eta}{\alpha(h,\eta)}=0.$$

Тогда равномерно относительно выбора (A_h, f_η) *в рамках условий* (2.28) *справедливы следующие утверждения.*

1) *Имеет место соотношение*

$$\lim_{h,\eta\to 0}\|x_{\alpha(h,\eta)}^{(h,\eta)}-x^*\|_{X_1}=0,$$

где квазирешение x^* *определено в* (2.14).

2) *Если при этом начальная погрешность представима в виде* (2.15), *то при надлежащем выборе параметра* $\alpha(h,\eta)=c_4(h+\eta)^{\frac{1}{p+1}}$ *справедлива оценка*

$$\|x_{\alpha(h,\eta)}^{(h,\eta)}-x^*\|_{X_1}\leqslant c_5(h+\eta)^{\frac{p}{p+1}},$$

неулучшаемая на классе задач (2.1) *с решениями, допускающими представление* (2.15).

По поводу других способов выбора параметра регуляризации по известным погрешностям h,η см., например, [3–6, 8].

3. Необходимые условия сходимости методов регуляризации линейных уравнений в гильбертовом пространстве. В этом разделе покажем, что при выполнении некоторых дополнительных условий на порождающие функции $\Theta(\lambda,\alpha)$ истокообразные представления (2.11), (2.15) оказываются близкими к необходимым для сходимости методов (2.8), (2.13) с оценками (2.12), (2.16). В дополнение к условию 2.1 введем следующее

Условие 3.1. Функции $\Theta(\lambda,\alpha)$ удовлетворяют условию 2.1, измеримы по Борелю и имеет место соотношение

$$\int_0^{\alpha_0}\alpha^{-2\tau-1}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda|^2d\alpha\geqslant\frac{c_6}{|\lambda|^{2\tau}}\quad\forall\lambda\in[M_0,M]\backslash\{0\}\quad\forall\tau\in(0,p_0),\tag{3.1}$$

где константа $c_6=c_6(\tau)>0$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняется условие* 3.1. *Предположим, что для фиксированных* $A,\ f,\ \xi$ *и заданных* p,q, *таких, что* $p>0,\ q\geqslant 0,\ p+q\in(0,p_0]$, *выполняется оценка*

$$\|A^q(x_\alpha-x^*)\|_X\leqslant c_7\alpha^{p+q}\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0],\tag{3.2}$$

где приближения x_α *определены согласно* (2.8), *решение* x^* *взято из* (2.10). *Тогда для любого* $\varepsilon\in(0,p)$ *имеет место включение*

$$x^*-\xi\in R(A^{p-\varepsilon}).\tag{3.3}$$

Доказательство. Из (2.8), (3.2) с учетом равенства $f=Ax^*$ находим

$$\|A^q(x_\alpha-x^*)\|_X^2=\|A^q(E-\Theta(A,\alpha)A)\,(x^*-\xi)\,\|_X^2\leqslant c_7\alpha^{2(p+q)}.\tag{3.4}$$

На основании (2.4) для любого $\omega\in(0,2p)$ из (3.4) получаем

$$\int\limits_{[M_0,M]\backslash\{0\}}\alpha^{-2(p+q)-1+\omega}|\lambda|^{2q}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda|^2d\|E_\lambda(x^*-\xi)\|_X^2\leqslant c_7\alpha^{-1+\omega}\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0].$$

Проинтегрировав обе части последнего неравенства по $\alpha\in(0,\alpha_0]$, будем иметь

$$\int_0^{\alpha_0}\int\limits_{[M_0,M]\backslash\{0\}}\alpha^{-2(p+q)-1+\omega}|\lambda|^{2q}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda|^2d\|E_\lambda(x^*-\xi)\|_X^2d\alpha<\infty.$$

Поскольку подынтегральная функция неотрицательна, на основании теоремы Фубини [19, с. 318] имеем

$$\int\limits_{[M_0,M]\backslash\{0\}}|\lambda|^{2q}\Big(\int_0^{\alpha_0}\alpha^{-2(p+q)-1+\omega}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda|^2d\alpha\Big)\,d\|E_\lambda(x^*-\xi)\|_X^2<\infty.\tag{3.5}$$

Полагая в неравенстве (3.1) $\tau = p + q - \dfrac{\omega}{2}$, для внутреннего интеграла в (3.5) получаем оценку

$$\int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-2(p+q)-1+\omega} |1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda|^2 d\alpha \geqslant \frac{c_6}{|\lambda|^{2(p+q)-\omega}} \quad \forall \lambda \in [M_0, M]\backslash\{0\}.$$

Заметим, что согласно (2.10) элемент $x^* - \xi \perp N(A)$. Поэтому функция $\|E_\lambda(x^* - \xi)\|_X^2$ непрерывна в точке $\lambda = 0$. Следовательно, мера одноточечного множества $\{0\}$, порожденная этой функцией, равна нулю, и из (3.5) следует, что

$$\int\limits_{M_0}^{M} |\lambda|^{-2(p-\omega/2)}\, d\|E_\lambda(x^* - \xi)\|_X^2 = \int\limits_{[M_0,M]\backslash\{0\}} |\lambda|^{-2(p-\omega/2)}\, d\|E_\lambda(x^* - \xi)\|_X^2 < \infty.$$

Последнее в силу (2.6) влечет $x^* - \xi \in R(A^{p-\omega/2})$. Поскольку величина $\omega \in (0, 2p)$ может быть выбрана произвольно малой, последнее включение означает, что для любого $\varepsilon \in (0,p)$ имеет место (3.3). Теорема доказана.

Пример 3.1. Непосредственно проверяется, что оценка (3.1) имеет место для порождающих функций из примеров 2.1, 2.2 и 2.4 при $M_0 = 0$. Порождающие функции примера 2.3 удовлетворяют (3.1) при любом $M_0 \leqslant 0$.

Перейдем к анализу необходимости истокообразного представления (2.11) для квалифицированной сходимости итерационных методов (2.26), (2.27). С этой целью введем

Условие 3.2. Функция $g(\lambda)$ удовлетворяет условиям, указанным в примере 2.5, и кроме того выполняется соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\tau-1} |1 - \lambda g(\lambda)|^{2n} \geqslant \frac{c_8}{\lambda^{2\tau}} \quad \forall \lambda \in (0, M] \quad \forall \tau > 0, \tag{3.6}$$

где константа $c_8 = c_8(\tau) > 0$.

Теорема 3.2. *Пусть выполняется условие* 3.2. *Предположим, что для фиксированных* A, f, ξ *и заданных* p, q, *таких, что* $p > 0$, $q \geqslant 0$, $p + q \in (0, p_0]$, *выполняется оценка*

$$\left\| A^q \left(x^{(n)} - x^* \right) \right\|_X \leqslant c_9 n^{-(p+q)} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \tag{3.7}$$

где $x^{(n)} = x_\alpha$ *определены в* (2.26), (2.27), *решение* x^* *определено в* (2.10). *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,p)$ *имеет место включение* (3.3).

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3.1 с учетом (3.7) получаем, что для $\forall n \in \mathbf{N}$

$$\|A^q(x^{(n)} - x^*)\|_X^2 = \|A^q(E - Ag(A))^n (x^* - \xi)\|_X^2 = \int\limits_0^M \lambda^{2q} (1 - \lambda g(\lambda))^{2n} d\|E_\lambda(x^* - \xi)\|_X^2 \leqslant \frac{c_9}{n^{2(p+q)}}. \tag{3.8}$$

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны доказательству теоремы 3.1 с заменой интегрирования по $\alpha \in (0, \alpha_0]$ суммированием по $n \in \mathbf{N}$. Из (3.8) получаем, что для любого $\omega \in (0, 2p)$ справедлива оценка

$$\int\limits_0^M n^{2(p+q)-1-\omega} \lambda^{2q} |1 - \lambda g(\lambda)|^{2n} d\|E_\lambda(x^* - \xi)\|_X^2 \leqslant \frac{c_9}{n^{1+\omega}}.$$

Суммируя последние неравенства, заключаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^M n^{2(p+q)-1-\omega} \lambda^{2q} |1 - \lambda g(\lambda)|^{2n} d\|E_\lambda(x^* - \xi)\|_X^2 < \infty.$$

Используя теорему Б. Леви [19, с. 305] и полагая в (3.6) $\tau = p + q - \dfrac{\omega}{2}$, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^M n^{2(p+q)-1-\omega} \lambda^{2q} |1 - \lambda g(\lambda)|^{2n} d\|E_\lambda(x^* - \xi)\|_X^2 =$$

$$= \int\limits_0^M \lambda^{2q} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2(p+q)-1-\omega} |1 - \lambda g(\lambda)|^{2n} \Big) d\|E_\lambda(x^* - \xi)\|_X^2 \geqslant c_8 \int\limits_0^M \lambda^{-2(p-\omega/2)}\, d\|E_\lambda(x^* - \xi)\|_X^2.$$

Полученное неравенство, как и выше, приводит к требуемому включению $x^* - \xi \in R(A^{p-\varepsilon})$ $\forall \varepsilon \in (0, p)$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Как следует из вышеприведенного доказательства, теорема 3.2 остается в силе, если неравенство (3.6) выполняется для всех $\lambda \in (0, M_1]$ с некоторым $M_1 \in (0, M]$. Этим обстоятельством удобно пользоваться при практической проверке условия 3.2.

Пример 3.2. Нетрудно проверить, что условие 3.2 выполняется для функций $g(\lambda) \equiv \mu_0$, $\mu_0 \in \left(0, \dfrac{2}{M}\right)$ и $g(\lambda) = (\lambda + \mu_0)^{-1}$, $\mu_0 > 0$, введенных в примере 2.5.

Замечание 3.2. Как показывают примеры из [6, 19], включение $\varepsilon \in (0, p)$ в теоремах 3.1, 3.2 не может быть в общем случае заменено равенством $\varepsilon = 0$. В то же время такая замена возможна в случае $p = p_0^*$, где p_0^* — максимальное значение p_0, для которого выполняется условие 2.1 (см. [6]). Указанное значение p_0^* называется квалификацией соответствующего метода (2.8) или (2.13). Согласно сказанному в предыдущем параграфе, функции (2.18) и (2.21) порождают методы с квалификацией $p_0^* = N$, функции (2.22) и (2.25) порождают методы с квалификацией $p_0^* = \infty$.

Аналогично теоремам 3.1, 3.2 с заменой A на A^*A, f на A^*f и условия (2.10) на (2.14) формулируются обратные утверждения для теоремы 2.2, относящиеся к случаю несамосопряженного оператора $A \in L(X_1, X_2)$.

В заключение данного раздела отметим, что неулучшаемость оценок скорости сходимости методов (2.8) и (2.13) равномерно относительно начальных данных (A, f) и начального приближения ξ в рамках условий истокопредставимости (2.11), (2.15) устанавливалась ранее многими авторами (см. [3, 4, 8, 21]). В отличие от этих результатов, теоремы 3.1 и 3.2 относятся к индивидуальной задаче (2.1) с фиксированным начальным приближением ξ. Они показывают, что гарантированный порядок скорости сходимости рассматриваемых методов целиком определяется априорной информацией о порядке истокопредставимости неизвестного решения (квазирешения). Использованная выше техника получения необходимых условий квалифицированной сходимости процедур (2.8), (2.13) развивает методику [20, гл. I, § 9], где утверждения теорем 3.1, 3.2 были доказаны применительно к порождающим функциям частного вида при $q = 0$. Для случая $q = 0$ утверждения этих теорем другими методами получены также в [6].

4. Класс методов аппроксимации решений линейных уравнений в банаховом пространстве. Обратимся теперь к линейным уравнениям в банаховом пространстве

$$Ax = f, \quad x \in X. \tag{4.1}$$

Здесь $A \in L(X)$, $f \in X$, X — комплексное банахово пространство. Предполагается, что множество решений X^* уравнения (4.1) непусто. Непосредственный перенос результатов гильбертовой теории на случай банахова пространства затрудняется главным образом отсутствием удобного аналога спектрального разложения и соответствующего операторного исчисления для достаточно широкого класса операторов A. Наиболее подходящим для наших целей вариантом операторного исчисления является исчисление Рисса–Данфорда, позволяющее определить функцию $\varphi(A)$ оператора A в виде интеграла Бохнера (см. [17, с. 455])

$$\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \varphi(\lambda) R(\lambda, A)\, d\lambda, \tag{4.2}$$

где Γ — положительно ориентированный контур на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, охватывающий спектр $\sigma(A)$. Необходимо, чтобы функция $\varphi(\lambda)$ была аналитична в некоторой открытой окрестности $D \supset \sigma(A)$, а контур Γ лежал в D. При таком определении оператора $\Theta(A, \alpha)$ в [10, 11] (при $\xi = 0$) был введен процесс

$$x_\alpha = (E - \Theta(A, \alpha) A)\, \xi + \Theta(A, \alpha) f, \quad \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{4.3}$$

обобщающий схему (2.8) на случай банахова пространства X. Здесь элемент $\xi \in X$ играет роль параметра, управляющего сходимостью приближений x_α. В [10, 11] установлено, что при выполнении подходящих условий на оператор A и наличии представления (2.11) с показателем $p = 1$, приближения x_α сходятся при $\alpha \to 0$ к решению x^*, участвующему в (2.11). Там же рассмотрен случай приближенного задания правой части в (4.1) (см. также [4, с. 50–54; 12]). Следует отметить, что сужение по сравнению с гильбертовым случаем класса допустимых порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$, вызванное требованием аналитичности $\Theta(\lambda, \alpha)$ по λ, фактически не приводит к уменьшению общности построений, поскольку наиболее распространенные в вычислительной практике схемы (4.3) порождаются именно аналитическими в нужной части $\mathbf{C}$ функциями $\Theta(\lambda, \alpha)$ (см. примеры 2.1–2.5). Ближайшие два раздела посвящены продолжению исследования схемы регуляризации (4.3) и получению для нее аналогов приведенных выше результатов гильбертовой теории. Намеченная программа включает в первую очередь получение оценок скорости сходимости аппроксимаций x_α к x^* при $\alpha \to 0$ для произвольных показателей истокопредставимости $p > 0$, а также обоснование регуляризующих свойств рассматриваемой схемы при наличии погрешностей как в правой части, так и в операторе уравнения (4.1). Основная трудность здесь связана с тем, что степень A^p в (2.11) в случае нецелого показателя $p > 0$ не может быть определена непосредственно по формуле (4.2) ввиду неаналитичности функции λ^p в окрестности нуля.

Как и в [4, с. 51; 10, 11], ограничимся рассмотрением операторов A, удовлетворяющих следующему условию.

Условие 4.1. Для некоторого $\varphi_0 \in (0, \pi)$ выполняется включение

$$\sigma(A) \subset K(\varphi_0), \quad K(\varphi_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbf{C}\colon |\arg\lambda| \leqslant \varphi_0\} \tag{4.4}$$

и оценка

$$\|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \leqslant \frac{c_{10}}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \backslash K(\varphi_0). \tag{4.5}$$

Зафиксируем константу $R_0 > \|A\|_{L(X)}$. Нетрудно видеть, что $\sigma(A) \subset K(R_0, \varphi_0)$, где

$$K(R_0, \varphi_0) \stackrel{\text{def}}{=} K(\varphi_0) \cap S(R_0), \quad S(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbf{C}\colon |\lambda| \leqslant r\}, \quad r > 0.$$

Кроме того, имеет место аналогичная (4.5) оценка с заменой конуса $K(\varphi_0)$ на сектор $K(R_0, \varphi_0)$.

Приведем необходимые для дальнейшего сведения из теории степеней линейных операторов. Для натурального показателя p степень A^p определяется стандартным образом, т.е. $A^p = A \cdots A$ (p раз). Для оператора A, удовлетворяющего условию 4.1, и произвольного нецелого $p > 0$, следуя [22; 23, с. 156], дадим

Определение 4.1. Для любого $\mu \in (0, 1)$,

$$A^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin \pi\mu}{\pi} \int\limits_0^\infty t^{\mu-1}(tE + A)^{-1} A\, dt. \tag{4.6}$$

Для произвольного $p > 0$ и $m \in \mathbf{N}$, такого, что $p \in (m, m + 1)$, полагаем

$$A^p \stackrel{\text{def}}{=} A^m \cdot A^{p-m} \equiv A^{p-m} \cdot A^m.$$

Заметим, что в силу оценки (4.5) интеграл в правой части (4.6) сходится в смысле Бохнера и представляет оператор $A^\mu \in L(X)$.

Наряду с исходным оператором A рассмотрим регуляризованный оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon E$. Нетрудно видеть, что при $\varepsilon > 0$ степень A_ε^p, $p > 0$, может быть определена по формуле (4.2), если в качестве Γ выбрать контур, охватывающий спектр $\sigma(A_\varepsilon) = \{\lambda + \varepsilon\colon \lambda \in \sigma(A)\}$, но не содержащий точки $\lambda = 0$. Ниже нам потребуется следующее известное предложение.

Лемма 4.1 [23, с. 155]. *Пусть оператор A удовлетворяет условию* 4.1. *Тогда для любого $\mu \in (0, 1)$ имеет место оценка*

$$\|A_\varepsilon^\mu - A^\mu\|_{L(X)} \leqslant c_{11}\varepsilon^\mu \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{4.7}$$

где постоянная c_{11} зависит от μ.

Переходя к исследованию сходимости процесса (4.3), конкретизируем класс порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$. Будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 4.2. Для каждого $\alpha \in (0, \alpha_0]$ функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ аналитична по λ на открытом множестве $D_\alpha \subset \mathbf{C}$, таком, что

$$K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0) \subset D_\alpha, \tag{4.8}$$

где

$$K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0) \stackrel{\text{def}}{=} K(R_0, \varphi_0) \cup S_{\min\{R_0, d_0\alpha\}}(0),$$

$d_0 \in (0, 1)$ — фиксированная константа.

В дальнейшем по мере необходимости на функции $\Theta(\lambda, \alpha)$ будут налагаться дополнительные условия. Через $\operatorname{int} G$ и $\operatorname{fr} G = \operatorname{cl} G \backslash \operatorname{int} G$ обозначаем соответственно внутренность и границу множества $G \subset \mathbf{C}$; $\operatorname{cl} G$ есть замыкание множества G. Положим

$$\gamma_\alpha = \operatorname{fr} K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0), \quad \alpha > 0.$$

Как следует из (4.4), (4.8), оператор $\Theta(A,\alpha)$ может быть определен по формуле (4.2) с $\varphi(\lambda)=\Theta(\lambda,\alpha)$, если в качестве контура Γ выбрать произвольный контур Γ_α, такой, что $\Gamma_\alpha \subset D$ и γ_α находится внутри Γ_α при положительной ориентации обоих контуров. Таким образом, всюду ниже

$$\Theta(A,\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\alpha}\Theta(\lambda,\alpha)R(\lambda,A)\,d\lambda,\quad \alpha\in(0,\alpha_0], \tag{4.9}$$

где контур Γ_α выбран указанным только что способом. Дополнительно предположим, что Γ_α не содержит внутри точку $\lambda=-d_1\alpha$ $(d_1>d_0)$ $\forall\alpha\in(0,\alpha_0]$. В силу условия 4.2 такие семейства контуров Γ_α, $\alpha\in(0,\alpha_0]$ существуют.

Предполагая выполненным истокообразное представление начальной невязки

$$x^*-\xi=A^p v,\quad v\in X (p>0), \tag{4.10}$$

на основании (4.3) для любого $q\geqslant 0$ запишем

$$A^q(x_\alpha-x^*)=-(E-\Theta(A,\alpha)A)\,A^{p+q}v. \tag{4.11}$$

Обозначим через $m=[p+q]$ и $\mu=p+q-m$ соответственно целую и дробную части $p+q$. В силу данного выше определения, $A^{p+q}=A^m\cdot A^\mu$. Согласно (4.11), для любого $\varepsilon>0$ выполняется

$$\|A^q(x_\alpha-x^*)\|_X\leqslant\|(E-\Theta(A,\alpha)A)A^m(A+\varepsilon E)^\mu v\|_X+\|(E-\Theta(A,\alpha)A)A^m[(A+\varepsilon E)^\mu-A^\mu]v\|_X. \tag{4.12}$$

Выберем $\varepsilon=c_{12}\alpha$ и оценим по отдельности слагаемые в правой части неравенства (4.12). На основании формулы (4.2) имеем

$$\begin{aligned}\|(E-\Theta(A,\alpha)A)A^m(A+\varepsilon E)^\mu v\|_X &\leqslant\frac{1}{2\pi}\|v\|_X\cdot\int\limits_{\Gamma_\alpha}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda||\lambda|^m|\lambda+\varepsilon|^\mu\|R(\lambda,A)\|_{L(X)}\,|d\lambda|\leqslant\\ &\leqslant c_{13}\|v\|_X\cdot\int\limits_{\Gamma_\alpha}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda|\,(|\lambda|^{p+q-1}+\alpha^\mu|\lambda|^{m-1})\,|d\lambda|.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Имея в виду полученную оценку, введем следующее дополнительное условие на порождающие функции $\Theta(\lambda,\alpha)$ (ср. с условием 2.1).

Условие 4.3. Для всех $p\in[0,p_0]$ $(p_0>0)$ имеет место оценка

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda||\lambda|^{p-1}|d\lambda|\leqslant c_{14}\alpha^p\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0], \tag{4.14}$$

где константа c_{14} не зависит от α.

Считая выполненным условие 4.3 и предполагая, что $p+q\in(0,p_0]$, из (4.13), (4.14) с учетом соотношения $|\lambda|\geqslant d_0\alpha$ $\forall\lambda\in\Gamma_\alpha$ находим

$$\|(E-\Theta(A,\alpha)A)A^m(A+\varepsilon E)^\mu v\|_X\leqslant c_{15}\|v\|_X\alpha^p\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{4.15}$$

Для второго слагаемого в правой части (4.12) на основании (4.5) и (4.7) выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\|(E-\Theta(A,\alpha)A)A^m[(A+\varepsilon E)^\mu-A^\mu]v\|_X &\leqslant c_{11}\|v\|_X\varepsilon^\mu\|(E-\Theta(A,\alpha)A)A^m\|_{L(X)}\leqslant\\ &\leqslant\frac{c_{11}}{2\pi}\|v\|_X\varepsilon^\mu\int\limits_{\Gamma_\alpha}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda||\lambda|^m\|R(\lambda,A)\|_{L(X)}\,|d\lambda|\leqslant c_{16}\|v\|_X\alpha^p\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0].\end{aligned} \tag{4.16}$$

Объединяя оценки (4.12), (4.15), (4.16), заключаем, что

$$\|A^q(x_\alpha-x^*)\|_X\leqslant c_{17}\|v\|_X\alpha^p\quad\forall\alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{4.17}$$

Тем самым доказана

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* 4.1 – 4.3, *имеет место истокообразное представление начальной невязки* (4.10) *и* $q\geqslant 0$, $p+q\in(0,p_0]$. *Тогда для вырабатываемых согласно* (4.3) *приближений* x_α *и решения* x^*, *участвующего в* (4.10), *справедлива оценка* (4.17).

Замечание 4.1. Из теоремы 4.1 следует, что если существует элемент x^*, являющийся решением уравнения (4.1) и удовлетворяющий условию (4.10), то этот элемент определяется однозначно.

Замечание 4.2. Аналогичный результат имеет место и в более общем случае, когда условие 4.1 выполняется с заменой конуса $K(\varphi_0)$ на $\tilde{K}(\varphi_0) = \{\lambda \in \mathbf{C}\colon |\arg\lambda - \lambda_0| \leqslant \varphi_0\}$, $\lambda_0 \in (0, 2\pi)$. Этот случай сводится к рассмотренному умножением обеих частей уравнения (4.1) на $e^{-i\lambda_0}$.

В заключение этого раздела отметим, что условию 4.1 удовлетворяет каждый из следующих классов операторов $A \in L(X)$.

1) Самосопряженные неотрицательные операторы $A^* = A \geqslant 0$ в гильбертовом пространстве X. В этом случае можно положить $c_{10} = 1$, φ_0 — любое из интервала $(0, \pi)$.

2) Аккретивные операторы в гильбертовом пространстве, т.е. операторы, удовлетворяющие условию (см. [24, с. 350])

$$\mathrm{Re}(Ax, x) \geqslant 0 \quad \forall x \in X.$$

В этом случае φ_0 — любое из $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

3) Спектральные операторы скалярного типа в банаховом пространстве, спектр которых принадлежит конусу $K(\psi_0), \psi_0 \in (0, \pi)$ (см. [25, с. 41]). Здесь φ_0 — любое из (ψ_0, π).

4) Операторы A в банаховом пространстве X, такие, что $\sigma(A) \subset K(\psi_0)$, $\psi_0 \in (0, \pi)$ и имеет место оценка

$$\|R(-t, A)\|_{L(X)} \leqslant \frac{c_{18}}{t}, \quad c_{18} > 1 \quad \forall t > 0.$$

В этом случае $\varphi_0 \in (\psi_1, \pi)$ можно выбрать произвольно,

$$\psi_1 = \max\left\{\psi_0, \pi - \arcsin\frac{1}{c_{18}}\right\}.$$

5. Класс регуляризующих алгоритмов для линейных уравнений в банаховом пространстве. Обратимся к случаю, когда исходные данные в уравнении (4.1) известны с погрешностью. Будем считать, что вместо оператора A и правой части f доступны их приближения $(A_h, f_\eta) \in \mathbf{F}$, $\mathbf{F} = L(X) \times X$, такие, что

$$\|A_h - A\|_{L(X)} \leqslant h, \quad \|f_\eta - f\|_X \leqslant \eta. \tag{5.1}$$

Оценка погрешностей $\delta = (h, \eta)$ в (5.1) также предполагается известной. В соответствии с (4.3) определим приближенное решение (4.1) следующим образом:

$$x_{\alpha(h,\eta)}^{(h,\eta)} = (E - \Theta(A_h, \alpha(h,\eta))A_h)\,\xi + \Theta(A_h, \alpha(h,\eta))\,f_\eta. \tag{5.2}$$

Здесь параметр регуляризации $\alpha = \alpha(h, \eta)$ следует согласовать с погрешностями h, η так, чтобы равномерно относительно выбора $(A_h, f_\eta) \in \mathbf{F}$ в рамках условий (5.1) выполнялось равенство

$$\lim_{h,\eta \to 0} \left\|x_{\alpha(h,\eta)}^{(h,\eta)} - x^*\right\|_X = 0 \quad (x^* \in X^*). \tag{5.3}$$

Вначале убедимся, что при достаточно малом $h > 0$ функция $\Theta(A_h, \alpha)$ оператора A_h может быть определена согласно (4.9). Нам потребуется следующее известное предложение.

Лемма 5.1 [23, с. 185; 26 , с. 141]. *Пусть* $\lambda \in \rho(A)$, $A \in L(X)$ *и* $B \in L(X)$.

1) *Предположим, что* $\|BR(\lambda, A)\|_{L(X)} < 1$. *Тогда* $\lambda \in \rho(A + B)$ *и справедливо представление*

$$R(\lambda, A + B) = R(\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^k. \tag{5.4}$$

2) *Пусть* $\|R(\lambda, A)B\|_{L(X)} < 1$. *Тогда* $\lambda \in \rho(A + B)$ *и*

$$R(\lambda, A + B) = \sum_{k=0}^{\infty} (R(\lambda, A)B)^k R(\lambda, A). \tag{5.5}$$

Ряды в (5.4) *и* (5.5) *абсолютно сходятся в норме пространства* $L(X)$.

Следующая лемма устанавливает условие, при котором определенный в (4.9) контур Γ_α наряду с $\sigma(A)$ охватывает и спектр $\sigma(A_h)$.

Лемма 5.2. *Пусть выполняется условие*

$$\frac{c_{10}h}{d_0\alpha} \leqslant \omega_0, \tag{5.6}$$

где постоянная $\omega_0 \in (0,1)$. *Тогда контур* Γ_α *охватывает спектр* $\sigma(A_h)$, *так что для оператора* $\Theta(A_h,\alpha)$ *справедливо представление* (4.9).

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathbf{C}\backslash \operatorname{int} K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0)$ по построению $K_\alpha(R_0,d_0,\varphi_0)$ имеем $|\lambda| \geqslant d_0\alpha$. Полагая в лемме 5.1 $B = A_h - A$, с использованием (5.1) и (5.6) получаем

$$\|BR(\lambda,A)\|_{L(X)} \leqslant \frac{c_{10}h}{|\lambda|} \leqslant \frac{c_{10}h}{d_0\alpha} \leqslant \omega_0 < 1.$$

Таким образом, $\lambda \in \rho(A_h)$, т.е. контур Γ_α содержит внутри все точки спектра $\sigma(A_h)$. Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем в этом разделе условие (5.6) считаем выполненным.

Предполагая выполненным условие истокопредставимости (4.10), оценим величину $\|x_\alpha^{(h,\eta)} - x^*\|_X$. Имеем

$$x_\alpha^{(h,\eta)} - x^* = (E - \Theta(A_h,\alpha)A_h)(\xi - x^*) + \Theta(A_h,\alpha)[(f_\eta - f) + (A - A_h)x^*]. \tag{5.7}$$

Согласно (4.10), (5.1) и (5.7) справедливо неравенство

$$\|x_\alpha^{(h,\eta)} - x^*\|_X \leqslant \|\Theta(A_h,\alpha)\|_{L(X)}(\eta + \|x^*\|_X h) + \|(E - \Theta(A_h,\alpha)A_h)A^p v\|_X. \tag{5.8}$$

Оценим по отдельности слагаемые в правой части (5.8).

Заметим, что при выполнении условия (5.6) в силу (5.1) и (5.4) выполняется соотношение

$$\|R(\lambda,A_h)\|_{L(X)} \leqslant \|R(\lambda,A)\|_{L(X)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \|(A_h - A)R(\lambda,A)\|_{L(X)}^k \leqslant \frac{c_{10}}{(1-\omega_0)|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \Gamma_\alpha, \quad \alpha \in (0,\alpha_0].$$

Из (4.9) следует, что

$$\|\Theta(A_h,\alpha)\|_{L(X)} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\alpha} |\Theta(\lambda,\alpha)| \|R(\lambda,A_h)\|_{L(X)}\,|d\lambda| \leqslant c_{19} \int\limits_{\Gamma_\alpha} \frac{|\Theta(\lambda,\alpha)|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \quad \forall \alpha \in (0,\alpha_0]. \tag{5.9}$$

В дополнение к условиям 4.2, 4.3 будем предполагать, что порождающие функции $\Theta(\lambda,\alpha)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 5.1. Для любого $\alpha \in (0,\alpha_0]$ имеет место оценка

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha} \frac{|\Theta(\lambda,\alpha)|}{|\lambda|}\,|d\lambda| \leqslant \frac{c_{20}}{\alpha}.$$

Из (5.9) с учетом условия 5.1 получаем

$$\|\Theta(A_h,\alpha)\|_{L(X)} \leqslant \frac{c_{21}}{\alpha} \quad \forall \alpha \in (0,\alpha_0]. \tag{5.10}$$

Для второго слагаемого в правой части (5.8) имеем оценку

$$\|(E - \Theta(A_h,\alpha)A_h)A^p v\|_X \leqslant \|(E - \Theta(A,\alpha)A)A^p v\|_X + \|(\Theta(A_h,\alpha)A_h - \Theta(A,\alpha)A)A^p v\|_X. \tag{5.11}$$

Аналогично доказательству теоремы 4.1 с использованием (4.14) устанавливается, что

$$\|(E - \Theta(A,\alpha)A)A^p v\|_X \leqslant c_{22}\|v\|_X \alpha^p \quad \forall \alpha \in (0,\alpha_0]. \tag{5.12}$$

Положим $m = [p]$, $\mu = p - m$, $\varepsilon = c_{23}\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(\Theta(A_h,\alpha)A_h - \Theta(A,\alpha)A)A^p v\|_X &\leqslant \|(\Theta(A_h,\alpha)A_h - \Theta(A,\alpha)A)A^m(A+\varepsilon E)^\mu v\|_X + \\ &+ \|(\Theta(A_h,\alpha)A_h - \Theta(A,\alpha)A)A^m[(A+\varepsilon E)^\mu - A^\mu]v\|_X. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Для первого слагаемого в правой части (5.13) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\|(\Theta(A_h,\alpha)A_h - \Theta(A,\alpha)A)A^m(A+\varepsilon E)^\mu v\|_X \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\|v\| \cdot \int\limits_{\Gamma_\alpha} |1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda| \cdot \|(R(\lambda,A) - R(\lambda,A_h))A^m(A+\varepsilon E)^\mu\|_{L(X)}\,|d\lambda|. \end{aligned}$$

На основании леммы 5.1 (см. (5.5)) с учетом (5.6) получаем

$$\|(R(\lambda,A)-R(\lambda,A_h))A^m(A+\varepsilon E)^\mu\|_{L(X)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(\|R(\lambda,A)\|_{L(X)}h)^k\|R(\lambda,A)A^m\|_{L(X)}\|(A+\varepsilon E)^\mu\|_{L(X)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_{24}h}{(1-\omega_0)|\lambda|}\|R(\lambda,A)A^m\|_{L(X)} \quad \forall\lambda\in\Gamma_\alpha, \quad \alpha\in(0,\alpha_0].$$

В силу тождества $R(\lambda,A)A=-E+\lambda R(\lambda,A)$ величина $\|R(\lambda,A)A^m\|_{L(X)}$ допускает оценку

$$\|R(\lambda,A)A^m\|_{L(X)} \leqslant c_{25}\Delta_p(|\lambda|),$$

где

$$\Delta_p(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} t^{-1}, & [p]=0, \\ 1, & [p]>0, \end{cases} \quad (t>0).$$

Поэтому

$$\|(\Theta(A_h,\alpha)A_h-\Theta(A,\alpha)A)A^m(A+\varepsilon E)^\mu v\|_X \leqslant c_{26}\|v\|_X\Delta_p(\alpha)h \quad \forall\alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{5.14}$$

Для второго слагаемого в (5.13) с учетом условия 4.1 и леммы 5.1 аналогично получаем

$$\|(\Theta(A_h,\alpha)A_h-\Theta(A,\alpha)A)A^m[(A+\varepsilon E)^\mu - A^\mu]v\|_X \leqslant$$
$$\leqslant c_{27}\|v\|_X\alpha^\mu\cdot\int_{\Gamma_\alpha}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda|\|(R(\lambda,A)-R(\lambda,A_h))A^m\|_{L(X)}\,|d\lambda| \leqslant c_{28}\|v\|_X\Delta_p(\alpha)\alpha^\mu h. \tag{5.15}$$

Объединяя оценки (5.8) и (5.10) – (5.15), окончательно находим

$$\|x_\alpha^{(h,\eta)}-x^*\|_X \leqslant c_{29}\Big(\frac{h+\eta}{\alpha}+(\Delta_p(\alpha)h+\alpha^p)\|v\|_X\Big). \tag{5.16}$$

Непосредственным следствием проведенных рассуждений является следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия* 4.1 – 4.3, 5.1 *и начальная невязка* $x^*-\xi$ *обладает истокообразным представлением* (4.10). *Предположим, что параметр регуляризации* $\alpha=\alpha(h,\eta)$ *согласован с погрешностями* h,η *так, что выполняется неравенство* (5.6) *и кроме того*

$$\alpha(h,\eta)\in(0,\alpha_0], \quad \lim_{h,\eta\to0}\alpha(h,\eta)=\lim_{h,\eta\to0}\frac{h+\eta}{\alpha(h,\eta)}=0. \tag{5.17}$$

Тогда для приближений (5.2) *имеет место оценка* (5.16) *и соотношение* (5.3).

В заключение этого раздела кратко обсудим возможности ослабления условия (4.10), представляющегося наряду с условием 4.1 наиболее трудно проверяемым среди предположений теорем 4.1 и 5.1. Будем считать, что для заданного приближенного оператора A_h и некоторого $p\in\mathbf{N}$ удалось подобрать такой элемент $v_h\in X$, что

$$x^*-\xi=A_h^pv_h+w_h, \quad \|w_h\|_X\leqslant\nu. \tag{5.18}$$

Здесь величина ν имеет смысл погрешности истокообразного представления невязки $x^*-\xi$ при помощи имеющегося в нашем распоряжении оператора A_h. Предположим, что невязка ν мала наряду с h,η. Из (5.2) следует неравенство

$$\|x_\alpha^{(h,\eta)}-x^*\|_X \leqslant c_{30}\|\Theta(A_h,\alpha)\|_{L(X)}(h+\eta)+\|(E-\Theta(A_h,\alpha)A_h)A_h^pv_h\|_X+\|E-\Theta(A_h,\alpha)A_h\|_{L(X)}\nu.$$

Отсюда по изложенной выше схеме получается оценка

$$\|x_\alpha^{(h,\eta)}-x^*\|_X \leqslant c_{31}\Big(\frac{h+\eta}{\alpha}+\alpha^p\|v_h\|_X+\nu\Big). \tag{5.19}$$

Тем самым доказана

Теорема 5.2. *Пусть выполняются условия* 4.1 – 4.3, 5.1 *и начальная невязка* $x^*-\xi$ *представима в виде* (5.18) *с показателем* $p\in\mathbf{N}$. *Предположим, что параметр регуляризации* $\alpha=\alpha(h,\eta)$ *согласован с погрешностями* h,η *так, что* $\alpha\in(0,\alpha_0]$ *и выполняется* (5.6). *Тогда имеет место оценка* (5.19).

Следствие. *Пусть выполняются условия теоремы* 5.2, *соотношения* (5.17) *и оценка* $\sup\limits_h\|v_h\|_X<\infty$. *Тогда*

$$\varlimsup_{h,\eta\to0}\|x_{\alpha(h,\eta)}^{(h,\eta)}-x^*\|_X\leqslant c_{31}\nu. \tag{5.20}$$

Неравенство (5.20) означает устойчивость регуляризующего алгоритма (5.2) к погрешностям в истокообразном представлении (4.10).

В качестве другого приложения теоремы 5.2 исследуем сходимость определяемых (5.2) приближений $x_{\alpha(h,\eta)}^{(h,\eta)}$, не делая никаких предположений относительно истокопредставимости начальной невязки. Будем предполагать, что X — рефлексивное пространство. Согласно [27, с. 637], при выполнении условия 4.1 пространство X разлагается в прямую сумму $X = \operatorname{cl} R(A) \oplus N(A)$. Таким образом, любой элемент $x \in X$ однозначно представим в виде $x = y + z$, где $y \in \operatorname{cl} R(A)$, $z \in N(A)$. Последнее означает, что для любого $\xi \in X$ найдется единственный элемент $x^* \in X^*$, для которого $x^* - \xi \in \operatorname{cl} R(A)$. Следовательно, для произвольно малого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такие элементы v_ε и w_ε, что $x^* - \xi = Av_\varepsilon + w_\varepsilon$, $\|w_\varepsilon\|_X < \varepsilon$. Полагая в (5.19) $\nu = h\|v_\varepsilon\|_X + \varepsilon$, заключаем, что

$$\|x_\alpha^{(h,\eta)} - x^*\|_X \leqslant c_{31}\Big(\frac{h+\eta}{\alpha} + (\alpha + h)\|v_\varepsilon\|_X + \varepsilon\Big).$$

Следовательно, при выполнении (5.17) справедливо неравенство $\overline{\lim\limits_{h,\eta\to 0}}\|x_{\alpha(h,\eta)}^{(h,\eta)} - x^*\|_X \leqslant c_{31}\varepsilon$. Отсюда ввиду произвольной малости $\varepsilon > 0$ вытекает

Теорема 5.3. *Пусть X^* — рефлексивное банахово пространство, выполняются условия* 4.1 –4.3, 5.1 *и неравенство* (4.14) *с $p = 1$. Тогда для определяемых согласно* (5.2) *приближений $x_{\alpha(h,\eta)}^{(h,\eta)}$ и элемента $x^* \in X^*$, такого, что $x^* - \xi \in \operatorname{cl} R(A)$, имеет место соотношение* (5.3).

6. Необходимость условия истокопредставимости. Обратимся к вопросу о необходимости условия (4.10) для степенной оценки скорости сходимости (4.17), ограничиваясь случаем $q = 0$. Ниже покажем, что представление (4.10), достаточное для выполнения оценки (4.17), близко к необходимому в том смысле, что при выполнении ряда дополнительных условий на порождающие функции $\Theta(\lambda, \alpha)$ следствием оценки (4.17) является включение

$$x^* - \xi \in R(A^{p-\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon \in (0, p) \tag{6.1}$$

(ср. с теоремами 3.1, 3.2 при $q = 0$).

В дальнейшем будет удобно считать, что порождающие функции $\Theta(\lambda, \alpha)$ определены для всех положительных значений параметра регуляризации, так что $\alpha \in (0, \infty)$. Условие 4.2 означает, что оператор

$$\Theta(A, \alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\alpha} \Theta(\lambda, \alpha) R(\lambda, A)\, d\lambda \tag{6.2}$$

определен при любом $\alpha \in (0, \infty)$. Из (4.3) и (6.2) с учетом равенства $Ax^* = f$ следует представление

$$x_\alpha - x^* = (E - \Theta(A, \alpha)A)(\xi - x^*) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\alpha} (1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda) R(\lambda, A)(\xi - x^*)\, d\lambda. \tag{6.3}$$

Будем считать также выполненными следующие технические условия 6.1, 6.2.

Условие 6.1. При всех $r \in (0, r_0]$ имеет место оценка

$$\sup_{\alpha \in [\alpha_0, \infty)} \alpha^{-r} \int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|}{|\lambda|}\, |d\lambda| < \infty. \tag{6.4}$$

Неравенство (6.4) — это ослабленный вариант условия 4.3, получающийся при $p = 0$, но в отличие от него распространяющийся на значения $\alpha \in [\alpha_0, \infty)$. Обозначим

$$D(R_0, d_0, \varphi_0) = \{(\lambda, \alpha) \colon \lambda \in K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0), \alpha \in (0, \infty)\}.$$

Условие 6.2. Функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ непрерывна по (λ, α) на множестве $D(R_0 + \varepsilon_0, d_0, \varphi_0)$, где $\varepsilon_0 > 0$.

В ходе дальнейших рассуждений на функции $\Theta(\lambda, \alpha)$ будут наложены и другие ограничения. Предположим, что для некоторой константы $l_0 > 0$ имеет место оценка

$$\|x_\alpha - x^*\|_X \; 6 \; l_0 \alpha^p (p > 0) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{6.5}$$

Из условия 6.2 и представления (6.2) следует, что элемент x_α непрерывно зависит от $\alpha \in (0,\infty)$. Кроме того, в силу (4.5) и (6.3) – (6.5) для всех κ, $0 < \kappa < \min\left\{\frac{2}{3}p, 2r_0\right\}$, справедливо неравенство

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa}\|x_\alpha - x^*\|_X d\alpha = \int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-p-1+\kappa}\|x_\alpha - x^*\|_X d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-p-1+\kappa}\|x_\alpha - x^*\|_X d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant l_0 \int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-1+\kappa} d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-p+1+\kappa}\|E - \Theta(A,\alpha)A\|_{L(X)}\|x^* - \xi\|_X d\alpha \leqslant \tag{6.6}$$

$$\leqslant l_0 \int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-1+\kappa} d\alpha + \frac{c_{10}}{2\pi}\,\|x^* - \xi\|_X \cdot \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-p-1+3\kappa/2}\Bigl(\alpha^{-\kappa/2}\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{|1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda|}{|\lambda|}\,|d\lambda|\Bigr)\,d\alpha < \infty.$$

Последнее означает, что определен элемент

$$w_\kappa = \int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa}(x^* - x_\alpha)\,d\alpha, \tag{6.7}$$

где $w_\kappa \in X$ и интеграл в правой части понимается в смысле Бохнера.

Наметим план дальнейших рассуждений. Наряду с оператором A рассмотрим его регуляризацию $A_\varepsilon = A + \varepsilon E$, $\varepsilon > 0$ и определим элемент

$$u_\kappa^{(\varepsilon)} = \int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa}(\Theta(A,\alpha)A - \Theta(A_\varepsilon,\alpha)A_\varepsilon)(x^* - \xi)\,d\alpha. \tag{6.8}$$

Убедившись в сходимости интеграла (6.8) и установив верхнюю оценку для $\|u_\kappa^{(\varepsilon)}\|_X$, мы тем самым докажем сходимость интеграла

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa}(E - \Theta(A_\varepsilon,\alpha)A_\varepsilon)(x^* - \xi)\,d\alpha = u_\kappa^{(\varepsilon)} + w_\kappa \overset{\text{def}}{=} w_\kappa^{(\varepsilon)} \tag{6.9}$$

с оценкой нормы $\left\|w_\kappa^{(\varepsilon)} - w_\kappa\right\|_X = \left\|u_\kappa^{(\varepsilon)}\right\|_X$. На завершающем этапе прямым вычислением покажем, что для некоторой ненулевой константы $C(p,\kappa)$ справедливо равенство

$$A_\varepsilon^{p-\kappa} w_\kappa^{(\varepsilon)} = C(p,\kappa)(x^* - \xi). \tag{6.10}$$

С другой стороны, с использованием упомянутой оценки установим, что $A_\varepsilon^{p-\kappa} w_\kappa^{(\varepsilon)} = A^{p-\kappa} w_\kappa$ для сколь угодно малых $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$. Отсюда будет непосредственно следовать требуемое представление (6.1).

В дальнейшем будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 6.3. Для всех $\alpha \in (0,\infty)$ имеет место соотношение

$$1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda \neq 0 \quad \forall \lambda \in K_\alpha(R_0, d_0, \varphi_0).$$

Согласно теореме об отображении спектра [28, с. 220], при выполнении условия 6.3 оператор $E - \Theta(A,\alpha)A$ непрерывно обратим для всех $\alpha \in (0,\infty)$. С учетом этого запишем

$$u_\kappa^{(\varepsilon)} = \int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa}\psi(A,\alpha,\varepsilon)(E - \Theta(A,\alpha)A)(x^* - \xi)\,d\alpha, \tag{6.11}$$

где

$$\psi(\lambda,\alpha,\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \frac{\Theta(\lambda,\alpha)\lambda - \Theta(\lambda+\varepsilon,\alpha)(\lambda+\varepsilon)}{1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda}.$$

В силу условий 6.2, 6.3, при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функция $\psi(\lambda, \alpha, \varepsilon)$ непрерывна по (λ, α) на множестве $D(R_0, d_0, \varphi_0)$. Следовательно, оператор $\psi(A, \alpha, \varepsilon)$ непрерывно зависит от α при $\alpha \in (0, \infty)$ в смысле нормы $L(X)$. Для доказательства сходимости интеграла Бохнера в (6.11) достаточно установить сходимость интеграла в правой части неравенства

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa} \|\psi(A, \alpha, \varepsilon)(E - \Theta(A, \alpha)A)(x^* - \xi)\|_X d\alpha \leqslant \int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa} \|\psi(A, \alpha, \varepsilon)\|_{L(X)} \|x_\alpha - x^*\|_X d\alpha. \tag{6.12}$$

Из (4.5) следует, что

$$\|\psi(A, \alpha, \varepsilon)\|_{L(X)} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_\alpha} |\psi(\lambda, \alpha, \varepsilon)| \|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \, |d\lambda| \leqslant \frac{c_{10}}{2\pi} \int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{|\psi(\lambda, \alpha, \varepsilon)|}{|\lambda|} \, |d\lambda|. \tag{6.13}$$

Дополним ранее введенные предположения относительно порождающих функций $\Theta(\lambda, \alpha)$ следующим условием.

Условие 6.4. Найдутся такие постоянные $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ и $s_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ имеет место оценка

$$\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{|\psi(\lambda, \alpha, \varepsilon)|}{|\lambda|} \, |d\lambda| \stackrel{\mathrm{def}}{=} M(\alpha, \varepsilon) < \infty. \tag{6.14}$$

При этом для всех $s \in (0, s_0]$

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} (\alpha^s M(\alpha, \varepsilon)) + \sup_{\alpha \in [\alpha_0, \infty)} (\alpha^{-s} M(\alpha, \varepsilon)) < \infty \tag{6.15}$$

и

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \Big(\alpha^s \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{M(\alpha, \varepsilon)}{\varepsilon} \, d\varepsilon \Big) + \sup_{\alpha \in [\alpha_0, \infty)} \Big(\alpha^{-s} \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{M(\alpha, \varepsilon)}{\varepsilon} \, d\varepsilon \Big) < \infty. \tag{6.16}$$

Из оценок (6.4) – (6.6) и (6.12) – (6.15) сразу следует сходимость интеграла в (6.11) с произвольным $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и $0 < \kappa < \min\left\{\frac{1}{2}p, 2r_0, 2s_0\right\}$, поскольку

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa} \|\psi(A, \alpha, \varepsilon)\|_{L(X)} \|x_\alpha - x^*\|_X d\alpha \leqslant \\ &\leqslant \frac{c_{10}}{2\pi} \Big(\int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-p-1+\kappa} M(\alpha, \varepsilon) \|x_\alpha - x^*\|_X d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-p-1+\kappa} M(\alpha, \varepsilon) \|x_\alpha - x^*\|_X d\alpha \Big) \leqslant \\ &\leqslant \frac{c_{10}}{2\pi} \Big(l_0 \int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-1+\kappa/2} \left(\alpha^{\kappa/2} M(\alpha, \varepsilon) \right) d\alpha + \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-p-1+3\kappa/2} \left(\alpha^{-\kappa/2} M(\alpha, \varepsilon) \right) \|x_\alpha - x^*\|_X d\alpha \Big) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ интеграл (6.9) определяет элемент $w_\kappa^{(\varepsilon)} \in X$. На основании (6.11), (6.13) и (6.14) с использованием теоремы Фубини [19, с. 318] получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{\|w_\kappa^{(\varepsilon)} - w_\kappa\|_X}{\varepsilon} \, d\varepsilon = \int\limits_0^{\varepsilon_1} \alpha^{-p-1+\kappa} \, \frac{\|\psi(A, \alpha, \varepsilon)\|_{L(X)}}{\varepsilon} \, \|x_\alpha - x^*\|_X d\alpha \leqslant \\ &\leqslant \frac{c_{10}}{2\pi} \Big(\int\limits_0^{\alpha_0} \alpha^{-p-1+\kappa/2} \|x_\alpha - x^*\|_X \cdot \Big(\alpha^{\kappa/2} \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{M(\alpha, \varepsilon)}{\varepsilon} \, d\varepsilon \Big) d\alpha + \\ &+ \int\limits_{\alpha_0}^\infty \alpha^{-p-1+3\kappa/2} \|x_\alpha - x^*\|_X \cdot \Big(\alpha^{-\kappa/2} \int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{M(\alpha, \varepsilon)}{\varepsilon} \, d\varepsilon \Big) d\alpha \Big), \quad 0 < \kappa < \min\left\{\frac{1}{2}p, 2r_0, 2s_0\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (6.5), (6.6) и (6.16) вытекает

$$\int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{\|w_\kappa^{(\varepsilon)} - w_\kappa\|_X}{\varepsilon}\, d\varepsilon < \infty. \tag{6.17}$$

Из (6.17) следует: найдется такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|w_\kappa^{(\varepsilon_n)} - w_\kappa\|_X = 0$. Действительно, предположив противное, для некоторого $c_{32} > 0$ имеем $\|w_\kappa^{(\varepsilon)} - w_\kappa\|_X$ ¿ c_{32} $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$, ε_2 6 ε_1, так что

$$\int\limits_0^{\varepsilon_1} \frac{\|w_\kappa^{(\varepsilon)} - w_\kappa\|_X}{\varepsilon}\, d\varepsilon \;\text{¿}\; \int\limits_0^{\varepsilon_2} \frac{c_{32}}{\varepsilon}\, d\varepsilon = \infty$$

вопреки (6.17).

Считая величину $\kappa > 0$ достаточно малой, зафиксируем такое $m \in \mathbf{N}$, что $p - \kappa \in (m, m+1)$. В соответствии с определением 4.1 запишем представление

$$A_\varepsilon^{p-\kappa} = \frac{(-1)^m \sin \pi(p-\kappa)}{\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty t^{p-\kappa-m-1} (tE + A_\varepsilon)^{-1} A_\varepsilon^{m+1}\, dt.$$

Таким образом, согласно (6.9) имеем

$$A_\varepsilon^{p-\kappa} w_\kappa^{(\varepsilon)} = \\ = \frac{(-1)^m \sin \pi(p-\kappa)}{\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty t^{p-\kappa-m-1} \alpha^{-p-1+\kappa} (tE + A_\varepsilon)^{-1} A_\varepsilon^{m+1} (E - \Theta(A_\varepsilon, \alpha) A_\varepsilon)(x^* - \xi)\, d\alpha\, dt. \tag{6.18}$$

Для произвольных $r, r_1, r_2 > 0$ и $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, таких, что r_1 6 r_2, $z \neq 0$, $\arg z_1$ 6 $\arg z_2$, обозначим

$$\Gamma_r(z_1, z_2) = \{\zeta \in \mathbf{C} \colon |\zeta| = r, \arg z_1 \; 6 \; \arg \zeta \; 6 \; \arg z_2\},$$

$$\Gamma_{(r_1, r_2)}(z) = \{\zeta \in \mathbf{C} \colon r_1 \; 6 \; |\zeta| \; 6 \; r_2, \arg \zeta = \arg z\}.$$

Положим

$$\eta(\lambda, t, \alpha) = (t + \lambda)^{-1} \lambda^{m+1} (1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda)$$

и запишем для оператора $\eta(A_\varepsilon, t, \alpha)$ представление (4.2), выбрав в качестве Γ контур

$$\Gamma = \Gamma^{(\varepsilon)} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}(e^{-i\varphi_0}, e^{i\varphi_0}) \cup \Gamma_{R_0}(e^{-i\varphi_0}, e^{i\varphi_0}) \cup \Gamma_{(\frac{\varepsilon}{2}, R_0)}(e^{i\varphi_0}) \cup \Gamma_{(\frac{\varepsilon}{2}, R_0)}(e^{-i\varphi_0}),$$

проходимый в положительном направлении. Нетрудно видеть, что контур $\Gamma^{(\varepsilon)}$ полностью охватывает спектр $\sigma(A_\varepsilon) = \{\lambda + \varepsilon \colon \lambda \in \sigma(A)\}$ и при всех $t, \alpha \in (0, \infty)$ целиком лежит в области аналитичности по λ функции $\eta(\lambda, t, \alpha)$. Согласно (4.2) и (6.18), справедливо представление

$$A_\varepsilon^{p-\kappa} w_\kappa^{(\varepsilon)} = D(p, \kappa) \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}} \alpha^{-p-1+\kappa} t^{p-\kappa-m-1} (t+\lambda)^{-1} \lambda^{m+1} (1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda) R(\lambda, A_\varepsilon)(x^* - \xi)\, d\lambda\, d\alpha\, dt, \tag{6.19}$$

где $D(p, \kappa) = \dfrac{(-1)^m \sin \pi(p-\kappa)}{2\pi^2 i}$. Для обоснования перестановки интегралов в (6.19) покажем, что

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}} \Big(\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa} t^{p-\kappa-m-1} |t+\lambda|^{-1} |\lambda|^{m+1} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \|R(\lambda, A_\varepsilon)(x^* - \xi)\|_X\, d\alpha dt \Big) |d\lambda| < \infty. \tag{6.20}$$

Поскольку для фиксированного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ выполняется $\sup\limits_{\lambda \in \Gamma^{(\varepsilon)}} \|R(\lambda, A_\varepsilon)(x^* - \xi)\|_X \stackrel{\text{def}}{=} E(\varepsilon) < \infty$, то имеет место оценка

$$J \; 6 \; E(\varepsilon) \cdot \int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}} |\lambda|^{m+1} \Big(\int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|\, d\alpha \Big) \Big(\int\limits_0^\infty t^{p-\kappa-m-1} |t+\lambda|^{-1} dt \Big) |d\lambda|. \tag{6.21}$$

Будем предполагать, что функции $\Theta(\lambda,\alpha)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 6.5. Функция $g(\zeta) \overset{\text{def}}{=} 1-\Theta(\lambda,\lambda\zeta)\lambda$ не зависит от λ при $\lambda \in K(\varphi_0)\backslash\{0\}$ и аналитична на открытом множестве $D_0 \supset K(\varphi_0)\backslash\{0\}$. При этом для всех $t\in(0,p)$ выполняется

$$\sup_{|\varphi|\leqslant\varphi_0}\int\limits_0^\infty \tau^{-t-1}|g(e^{i\varphi}\tau)|\,d\tau \overset{\text{def}}{=} N(t)<\infty. \tag{6.22}$$

Кроме того, для указанных значений t справедливы соотношения

$$\lim_{r\to 0+} r^{-t-1}\int\limits_{\Gamma_r(e^{-i\varphi_0},e^{i\varphi_0})}|g(\zeta)|\,|d\zeta|=0, \tag{6.23}$$

$$\lim_{R\to \infty} R^{-t-1}\int\limits_{\Gamma_R(e^{-i\varphi_0},e^{i\varphi_0})}|g(\zeta)|\,|d\zeta|=0. \tag{6.24}$$

Рассмотрим по отдельности внутренние интегралы в (6.21). С использованием замен переменных $\alpha = |\lambda|\tau$, $t=|\lambda|\tau$ и неравенства (6.22) оценим упомянутые интегралы следующим образом:

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa}|1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda|\,d\alpha = |\lambda|^{-p+\kappa}\int\limits_0^\infty \tau^{-p-1+\kappa}|g(e^{-i\arg\lambda}\tau)|\,d\tau \leqslant N(p-\kappa)|\lambda|^{-p+\kappa}, \tag{6.25}$$

$$\int\limits_0^\infty t^{p-\kappa-m-1}|t+\lambda|^{-1}dt = |\lambda|^{p-\kappa-m-1}\int\limits_0^\infty \tau^{p-\kappa-m-1}|\tau+|\lambda|^{-1}\lambda|^{-1}d\tau \leqslant P(p,\kappa)|\lambda|^{p-\kappa-m-1}\quad \forall\lambda\in\Gamma^{(\varepsilon)}. \tag{6.26}$$

Здесь $P(p,\kappa)$ — положительная постоянная, не зависящая от λ, $0<\kappa<\min\left\{\frac{1}{2}p, 2r_0, 2s_0, t_0\right\}$. Соотношение (6.20) вытекает непосредственно из (6.21), (6.25), (6.26). Следовательно, в (6.19) возможно изменение порядка интегрирования. Для $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ имеем

$$\begin{gathered} A_\varepsilon^{p-\kappa}w_\kappa^{(\varepsilon)} = \\ = D(p,\kappa)\int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}}\lambda^{m+1}\Big(\int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa}(1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda)\,d\alpha\Big)\Big(\int\limits_0^\infty t^{p-\kappa-m-1}(t+\lambda)^{-1}dt\Big)R(\lambda,A_\varepsilon)(x^*-\xi)\,d\lambda. \end{gathered} \tag{6.27}$$

Положив $\alpha=\lambda\zeta$, представим первый из внутренних интегралов в (6.27) в виде

$$\int\limits_0^\infty \alpha^{-p-1+\kappa}(1-\Theta(\lambda,\alpha)\lambda)\,d\alpha = \lambda^{-p+\kappa}\int\limits_{\Lambda(\bar\lambda)}\zeta^{-p-1+\kappa}g(\zeta)\,d\zeta, \tag{6.28}$$

где $\Lambda(z)\overset{\text{def}}{=}\{\zeta\in\mathbf{C}\colon \zeta=tz, t\geqslant 0\}$, $z\in\mathbf{C}$; через $\bar z$ обозначается комплексное сопряжение для z, и интегрирование по $\Lambda(\bar\lambda)$ ведется в направлении от $\zeta=0$ к $\zeta=\infty$. Покажем, что величина $G(p,\kappa)$ интеграла в правой части (6.28) не зависит от $\lambda\in\Gamma^{(\varepsilon)}$. Пусть $\lambda_1,\lambda_2\in\Gamma^{(\varepsilon)}$ таковы,что $\arg\bar\lambda_1<\arg\bar\lambda_2$. Выберем положительно ориентированный контур

$$\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)=\Gamma_r(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)\cup\Gamma_R(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)\cup\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_1)\cup\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_2),$$

где $0<r<R$. В силу аналитичности функции $g(\zeta)$ на $K(\varphi_0)\backslash\{0\}\supset\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)}\zeta^{-p-1+\kappa}g(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{\Gamma_r(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)}\zeta^{-p-1+\kappa}g(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{\Gamma_R(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2)} + \int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_1)} + \int\limits_{\Gamma_{(r,R)}(\bar\lambda_2)}.$$

Переходя здесь к пределу при $r\to 0$, $R\to\infty$ и используя соотношения (6.23), (6.24), получаем

$$\int\limits_{\Lambda(\bar\lambda_1)}\zeta^{-p-1+\kappa}g(\zeta)\,d\zeta = \int\limits_{\Lambda(\bar\lambda_2)}\zeta^{-p-1+\kappa}g(\zeta)\,d\zeta.$$

Аналогично для второго внутреннего интеграла в (6.27) находим

$$\int\limits_0^\infty t^{p-\kappa-m-1}(t+\lambda)^{-1}dt = \lambda^{p-\kappa-m-1} \int\limits_{\Lambda(\bar\lambda)} \zeta^{p-\kappa-m-1}(1+\zeta)^{-1}d\zeta, \qquad (6.29)$$

причем величина $H(p,\kappa)$ интеграла в правой части не зависит от $\lambda \in \Gamma^{(\varepsilon)}$. Объединяя полученные равенства (6.27) – (6.29), для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ окончательно получаем

$$A_\varepsilon^{p-\kappa} w_\kappa^{(\varepsilon)} = D(p,\kappa)G(p,\kappa)H(p,\kappa) \int\limits_{\Gamma^{(\varepsilon)}} R(\lambda, A_\varepsilon)(x^*-\xi)\,d\lambda = C(p,\kappa)(x^*-\xi),$$

где $C(p,\kappa) = 2\pi i D(p,\kappa)G(p,\kappa)H(p,\kappa) \neq 0$. Таким образом, равенство (6.10) доказано.

Сформулируем теперь основной результат раздела.

Теорема 6.1. *Пусть для вырабатываемых согласно* (4.3) *приближений* x_α *имеет место оценка* (6.5). *Предположим, что выполняются условия* 4.1 – 4.3 *и* 6.1 – 6.5. *Тогда для всех* $\varepsilon \in (0,p)$ *начальная невязка* $x^*-\xi$ *допускает истокообразное представление* $x^*-\xi \in R(A^{p-\varepsilon})$.

Доказательство. Покажем, что при выполнении сделанных предположений $A_{\varepsilon_n}^{p-\kappa} w_\kappa^{(\varepsilon_n)} = A^{p-\kappa}w_\kappa$, где элемент w_κ определен в (6.7) и $\{\varepsilon_n\}$ — расмотренная выше последовательность, такая, что

$$\varepsilon_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|w_\kappa^{(\varepsilon_n)} - w_\kappa\|_X = 0.$$

Полагаем $m = [p-\kappa]$, $\mu = p-\kappa-m$, так что $p-\kappa = m+\mu$, $\mu \in (0,1)$. Имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|A_{\varepsilon_n}^{p-\kappa} w_\kappa^{(\varepsilon_n)} - A^{p-\kappa}w_\kappa\|_X &= \|A_{\varepsilon_n}^{m+\mu} w_\kappa^{(\varepsilon_n)} - A^{m+\mu}w_\kappa\|_X \leqslant \\ &\leqslant \|A_{\varepsilon_n}^{m+\mu} - A^{m+\mu}\|_{L(X)} \|w_\kappa^{(\varepsilon_n)}\|_X + \|A^{m+\mu}\|_{L(X)} \|w_\kappa^{(\varepsilon_n)} - w_\kappa\|_X. \end{aligned} \qquad (6.30)$$

Здесь

$$\|A_{\varepsilon_n}^{m+\mu} - A^{m+\mu}\|_{L(X)} \leqslant \|A_{\varepsilon_n}^m - A^m\|_{L(X)} \|A^\mu\|_{L(X)} + \|A_{\varepsilon_n}\|_{L(X)}^m \|A_{\varepsilon_n}^\mu - A^\mu\|_{L(X)}. \qquad (6.31)$$

Нетрудно получить оценку

$$\|A_\varepsilon^m - A^m\|_{L(X)} \leqslant c_{33}\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_1]. \qquad (6.32)$$

Кроме того, согласно лемме 4.1

$$\|A_\varepsilon^\mu - A^\mu\|_{L(X)} \leqslant c_{11}\varepsilon^\mu \quad \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_1]. \qquad (6.33)$$

Константы c_{11}, c_{33} в (6.32) и (6.33) зависят лишь от A, p, κ. Из (6.30) – (6.33) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \|A_{\varepsilon_n}^{p-\kappa} w_\kappa^{(\varepsilon_n)} - A^{p-\kappa}w_\kappa\|_X = 0. \qquad (6.34)$$

Поскольку согласно (6.10) элемент $A_\varepsilon^{p-\kappa} w_\kappa^{(\varepsilon)}$ не зависит от ε, из соотношения (6.34) получаем, что $A^{p-\kappa}w_\kappa = C(p,\kappa)(x^*-\xi)$. Следовательно, для элемента $v_\kappa = C(p,\kappa)^{-1}w_\kappa$ выполняется равенство $A^{p-\kappa}v_\kappa = x^*-\xi$.

Таким образом, для достаточно малых $\kappa > 0$ выполняется $x^*-\xi \in R(A^{p-\kappa})$. Поскольку $A^{p_1+p_2} = A^{p_1}A^{p_2}$, где $p_1, p_2 > 0$, то отсюда следует, что для всех $\varepsilon \in (0,p)$ имеет место включение $x^*-\xi \in R(A^{p-\varepsilon})$. Теорема доказана.

В заключение рассмотрим некоторые примеры процедур вида (4.3), к которым применимы полученные выше результаты.

Пример 6.1. Функция (2.17) удовлетворяет условию 4.2 с $D_\alpha = \mathbf{C}\backslash\{-\alpha\}$. При проверке условий 4.3 и 5.1 удобно полагать (см. [4, с. 53])

$$\Gamma_\alpha = \mathrm{fr}(S_{R_0}(0)\backslash S_{(1-d_0)\alpha}(-\alpha)), \quad \alpha > 0. \qquad (6.35)$$

Элементарные вычисления показывают, что неравенство (4.14) имеет место при всех $p_0 \in (0,1]$; при этом условия 6.1 – 6.5 также выполняются.

Пример 6.2. В случае функции (2.18) условие 4.2 также выполняется с $D_\alpha = \mathbf{C}\backslash\{-\alpha\}$. Выбирая контур Γ_α в соответствии с (6.35) и проводя несложные выкладки, убеждаемся, что условия 4.3 и 5.1 выполняются для любого $p_0 \in (0,N]$. Выполнение условий 6.1 – 6.5 проверяется непосредственно.

Пример 6.3. Функция (2.22) аналитична во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$. В рассматриваемом случае выберем $\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha$, $\alpha > 0$. Рассуждения, аналогичные [4, с. 51 – 53], показывают, что если условие 4.1 выполняется с $\varphi_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то условие 4.3 имеет место для любого $p_0 > 0$. Условия 5.1 и 6.1 – 6.5 при этом также выполняются.

Пример 6.4. Функция (2.25) при $g(\lambda) \equiv \mu_0$ аналитична всюду в $\mathbf{C}$. Предположим, что условие 4.1 выполняется с некоторым $\varphi_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ и кроме того $0 < \mu_0 < \|A\|^{-1}_{L(X)}\sqrt{2\cos 2\varphi_0}$. Как и в примере 6.3, выберем $\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha$, $\alpha > 0$. Аналогично [4, с. 51 − 52] убеждаемся, что рассматриваемая функция удовлетворяет условиям 4.3 и 5.1 при любом $p_0 > 0$.

Замечание 6.1. Процедуры (4.3), (5.2) для функций $\Theta(\lambda, \alpha)$ из примеров 6.1 − 6.4 могут быть практически реализованы аналогично примерам 2.1, 2.2, 2.4 и 2.5.

Замечание 6.2. Поскольку условие 4.3 в примерах 6.3 и 6.4 выполняется без верхних ограничений на p_0, соответствующие процедуры (4.3) свободны от насыщения.

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ № 99–01–00055.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
3. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
4. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
5. *Bakushinsky A., Goncharsky A.* Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer, 1994.
6. *Engl H.W, Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer, 1996.
7. *Бакушинский А.Б.* Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. **7**, № 3. 672–677.
8. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итеративные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
9. *Vainikko G.* On the discretization and regularization of ill-posed problems with noncompact operators // Numer. Funct. Anal. Optim. 1992. **13**, N 3–4. 381–396.
10. *Бакушинский А.Б.* К проблеме построения линейных регуляризующих алгоритмов в банаховых пространствах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. **13**, № 1. 204–210.
11. *Бакушинский А.Б.* Оптимальные и квазиоптимальные методы решения линейных задач, порожденные регуляризующими алгоритмами // Изв. вузов. Матем. 1978. № 11. 6–10.
12. *Plato R., Hämarik U.* On pseudo-optimal parameter choices and stopping rules for regularization methods in Banach spaces // Numer. Funct. Anal. Optim. 1996. 17, N1–2. 181–195.
13. *Бакушинский А.Б.* Итерационные методы без насыщения для решения вырожденных нелинейных операторных уравнений // Докл. РАН. 1995. **344**, № 1. 7–8.
14. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы для решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. **3**, № 3. 685–692.
15. *Бакушинский А.Б.* О скорости сходимости итерационных процессов для нелинейных операторных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. **38**, № 4. 559–663.
16. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
17. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
18. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
19. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
20. *Кокурин М.Ю.* Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач. Йошкар-Ола: МарГУ, 1998.
21. *Немировский А.С., Поляк Б.Т.* Итеративные методы решения линейных некорректных задач при точной информации // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибер. I. 1984. № 2. 13–25; II. 1984. № 3. 18–25.
22. *Balakrishnan A.V.* Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them // Pacif. J. Math. 1960. **10**, № 2. 419–437.
23. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
24. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
25. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974.
26. Однопараметрические полугруппы / Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С. и др. М.: Мир, 1992.
27. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962.
28. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
29. *Бурбаки Н.* Интегрирование (меры, интегрирование мер). М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
29.11.2000