

УДК 518.61:539.375

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ТОНКИХ ТЕЛ**С. Н. Коробейников¹, Ю. С. Худяков², А. В. Шутов³**

Предлагается модель хрупкого материала, позволяющая определять зарождение и рост трещин в тонкостенных конструкциях вплоть до их разрушения. Эта модель введена в библиотеку моделей материалов конечного элемента оболочки вычислительного комплекса PIONER. Представлены решения ряда задач, полученные с помощью этого комплекса, в частности, тестовых задач квазистатического деформирования, имеющих аналитическое решение: деформирование и разрушение пластин в условиях однородного напряженно-деформированного состояния; разрушение балки при чистом изгибе. Проведено исследование динамического деформирования и разрушения пластины сосредоточенной массой, имеющей различные начальные скорости. Эта задача моделирует воздействие стрелы на бронзовую пластину, представляющую элемент защитного панциря древних кочевых народов Центральной Азии. Определен диапазон начальных скоростей, при которых сосредоточенная масса способна разрушить эту пластину. Показано, что разрушение части материала пластины приводит к ее динамической потере устойчивости.

Ключевые слова: механика, разрушение, теория оболочек, метод конечных элементов, устойчивость, защитное вооружение.

Введение. В [1, 2] приведено описание археологических находок защитного вооружения номадов (кочевых народов и племен, обитавших на территории Центральной Азии с XII в. до н.э. по XIX в. н.э.), проведена классификация и отмечена эволюция во времени формы защитного вооружения. Рассмотрены как защитные панцири [1], так и головные шлемы [2]. Сделано предположение, что современные методы математического моделирования деформирования твердых тел позволят провести оценку эффективности защитных свойств этого вооружения при его эволюции во времени. Приведено описание иерархического подхода к моделированию поведения защитного вооружения при воздействии на него боевого оружия (копий и стрел). Одной из составляющих этого подхода является численное решение квазистатических и динамических задач о хрупком разрушении деформируемых тел.

Под хрупким разрушением понимается разрушение тел без учета вязкости и накопления микроповреждений [3], при этом предполагается, что материал тела при достижении предела прочности мгновенно переходит из чисто упругого в разрушенное состояние. К таким материалам можно отнести бронзу, из которой изготавливалось защитное вооружение номадов способом литья (предполагается, что это вооружение эксплуатировалось при обычной температуре).

В настоящее время существует несколько разных подходов к решению задач механики хрупкого разрушения тел. Первый, исторически более ранний, подход связан с решением задач *линейной механики разрушения* (ЛМР). При этом предполагается, что трещина в теле соответствует части (внутренней) граници с угловой точкой (кончиком трещины), в которой решение задачи линейной теории упругости имеет особенность. Для определения критической силы срагивания трещины служит или энергетический критерий Гриффитца, или критерий Черепанова–Райса (достижения J -интегралом своего критического значения) [3]. Наиболее подходящим методом решения задач ЛМР является, по-видимому, метод граничных элементов, позволяющий вводить особенность в кончике трещины в численное решение [4]. Для метода конечных элементов (МКЭ) при решении задач ЛМР появляются трудности, обусловленные тем, что особенность в решении трудно отобразить стандартными аппроксимационными полиномами. В окрестности кончика трещины нужно использовать либо густую сетку из элементов низкого порядка аппроксимации, либо более разреженную (но все равно достаточно густую) сетку элементов высокого порядка аппроксимации (при этом в общем случае особенность точно не воспроизводится). Тем не менее, при решении

¹ Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, просп. акад. Лаврентьева, 15, 630090, г. Новосибирск; e-mail: korob@hydro.nsc.ru

² Институт археологии и этнографии СО РАН, просп. акад. Лаврентьева, 17, 630090, г. Новосибирск; e-mail: alisa@bronze.archaeology.nsc.ru

³ Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет, ул. Пирогова, 2, 630090, г. Новосибирск; e-mail: shutov@ngs.ru

некоторых двумерных задач ЛМР особенность можно воспроизвести точно с помощью изопараметрических конечных элементов [5, 6], вводя ее в преобразование искомым функций при переходе от естественной криволинейной системы координат к декартовой. Однако в общем случае решения трехмерных задач ЛМР такой прием использовать довольно сложно.

Более практичный метод решения задач механики разрушения возник позднее [7] в связи с развитием вычислительной техники и численных методов решения задач математической физики. Этим методом решаются задачи *нелинейной механики разрушения* (НМР). Основное отличие уравнений ЛМР и НМР состоит в использовании разного вида определяющих соотношений. Если в ЛМР используется модель линейно упругого материала (тензоры напряжений и деформаций связаны законом Гука), то в НМР рассматривается физически нелинейная модель материала в предположении малости деформаций при хрупком разрушении [3]¹. В НМР предполагается, что тело при разрушении не теряет свою сплошность, а зоны разрушения моделируются ослабленными свойствами сопротивления материала деформированию. Предполагается, что максимальное главное напряжение не превышает предела прочности (в ЛМР допускается бесконечное значение такого напряжения в кончике трещины). Такое ограничение находится в соответствии с физическими основами явления разрушения (молекулы материала разъединяются при разрушении с конечными значениями сил межмолекулярного взаимодействия), т.е. уравнения НМР находятся в лучшем соответствии с физическими законами природы по сравнению с уравнениями ЛМР. В [9, 10] модель материала, учитывающая хрупкое разрушение, получила дальнейшее развитие: предполагается, что разрушение материала может происходить также в области сжимающих напряжений при их абсолютных критических значениях, на порядок превышающих предел прочности при растяжении.

В настоящей работе предлагается алгоритм численного решения задач НМР с моделью материала хрупкого разрушения, возникающего только при действии растягивающих напряжений. Рассматриваются задачи разрушения и деформирования тонкостенных конструкций, к которым принадлежит рассматриваемое в [1, 2] защитное вооружение. Кратко описывается алгоритм численного решения квазистатических и динамических задач нелинейного деформирования твердых тел при пространственной дискретизации уравнений МКЭ (более подробное описание можно найти, например, в [5, 11, 12]). Приводится описание модели хрупкого материала, введенной в библиотеку моделей материала изопараметрического элемента оболочки [13, 14]. Этот элемент входит в библиотеку конечных элементов вычислительного комплекса PIONER [15]. С помощью этого вычислительного комплекса получены и приведены решения как тестовых задач, так и новых задач о разрушении бронзовых пластин, составляющих защитные панцири древних номадов.

1. Численное решение нелинейных задач о деформировании тонких тел. Формулировки основных уравнений и их дискретных аналогов для нелинейных задач механики деформируемого твердого тела с учетом геометрической и физической нелинейностей приведены, например, в [5, 11, 12]. В настоящей работе используется формулировка уравнений, в которой рассматривается только физическая нелинейность, т.е. используются нелинейные определяющие соотношения, а эффекты геометрической нелинейности считаются пренебрежимо малыми.

Задачи о деформировании тонкостенных конструкций нецелесообразно решать численно непосредственно по трехмерным уравнениям механики деформируемого твердого тела, так как конечные элементы, линейный размер которых в одном направлении существенно меньше размеров в других направлениях, приводят к плохо обусловленной матрице жесткости [11]. В настоящее время для решения задач теории пластин и оболочек с помощью МКЭ сложилось два основных подхода [11].

1. *Традиционный подход.* Трехмерные уравнения механики деформируемого твердого тела при наложении некоторых статических и кинематических гипотез сводятся к двумерным уравнениям теории оболочек или пластин². Затем проводится дискретизация этих уравнений МКЭ.

2. *Более поздний подход.* Статические и кинематические гипотезы теории оболочек вводятся прямо в формулировку трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела. Далее проводится дискретизация уравнений МКЭ, учитывающая введенные гипотезы.

Хотя применение обоих подходов теоретически эквивалентно, второй подход предпочтительнее вследствие того, что его проще использовать для получения дискретных уравнений (особенно при решении геометрически нелинейных задач). Изложим основные положения постановки задач и вывода нелинейных дискретных уравнений теории оболочек, используемые в этом подходе. Более детальный вывод дискрет-

¹В [8] термин НМР используется в другом смысле: рассматривается разрушение тел из гиперупругого материала (резины) с особенностями решения в кончике трещины при учете больших (конечных) деформаций. Такие материалы нельзя отнести к хрупким.

²Область, занимаемая отсчетной поверхностью оболочки, принадлежит двумерному, в общем случае неевклидову, пространству.

ных уравнений теории оболочек, использующий второй подход, приведен, например, в [5, 11, 13, 14].

1.1. Уравнения деформирования твердых тел. Приведем уравнения, описывающие деформирование твердого тела в предположении малости деформаций, поворотов и перемещений (в то же время допускаются большие трансляционные перемещения тела как жесткого целого).

Пусть t — монотонно возрастающий параметр деформирования³. Приведем основные уравнения задачи, учитывающие физическую нелинейность деформирования [12].

1. Уравнения движения (без учета действия объемных сил):

$$\nabla \cdot \sigma = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{в } V. \tag{1}$$

Граничные и начальные условия:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{на } S_u, \quad \mathbf{N} \cdot \sigma = \mathbf{T}^* \quad \text{на } S_T, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0. \tag{2}$$

Здесь и далее σ — тензор напряжений Коши; $\nabla \cdot \sigma$ — дивергенция тензора напряжений (вектор); \mathbf{u} — вектор перемещений; V — область, занимаемая телом в начальной конфигурации; S — замкнутая поверхность, ограничивающая V ; S_u, S_T — части поверхности $S = S_u \cup S_T$, на которых заданы векторы перемещений \mathbf{u} и напряжений $\mathbf{T} \equiv \mathbf{N} \cdot \sigma$ соответственно; \mathbf{N} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S_T ; $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$ — заданные векторные поля (начальные значения векторов перемещения и скорости); ρ — массовая плотность материала; знак * обозначает заданную величину; точка между тензорами и/или векторами обозначает операцию их скалярного (внутреннего) произведения; точка над величиной обозначает частную производную этой величины по времени t .

2. Кинематические соотношения имеют вид

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \tag{3}$$

где ε — тензор деформаций Коши; $\nabla \mathbf{u}$ — тензор градиента перемещений; здесь и далее индекс “Т” обозначает операцию транспонирования.

3. Определяющие соотношения записываются в форме

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \dot{\varepsilon}, \tag{4}$$

где \mathbf{C} — тензор четвертого ранга, компоненты которого в общем случае зависят от компонент тензоров напряжений и деформаций (и, возможно, их скоростей) и обладают симметрией вида $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$ (C_{ijkl} — компоненты тензора в декартовой системе координат; здесь и далее индексы компонент тензоров и векторов пробегает значения 1, 2, 3). Здесь и далее знак “:” между тензорами обозначает операцию их двойного скалярного произведения (свертки по двум индексам). В настоящей работе рассматриваются материалы, определяющие соотношения которых записываются в виде (4); к таким материалам, в частности, относится и материал с возможностью хрупкого разрушения (см. раздел 2).

Уравнения квазистатического деформирования получаются из системы (1)–(4) пренебрежением инерционными членами в правой части (1).

Рассмотрим слабую форму уравнений движения (1), выражаемую уравнением принципа возможных перемещений

$$\int_V (\sigma : \delta \varepsilon + \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \int_{S_T} \mathbf{T}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \hat{R}_c \quad \forall \delta \mathbf{u}, \tag{5}$$

где знак δ обозначает вариацию, так что $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ на S_u (граничные условия на S_u являются главными, а на S_T — естественными); вариация тензора деформаций Коши определяется следующим образом:

$$\delta \varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla(\delta \mathbf{u}) + \nabla(\delta \mathbf{u})^T].$$

Виртуальная работа сосредоточенных сил \hat{R}_c определяется так⁴:

$$\hat{R}_c \equiv \sum_{k=1}^K R_i^k \delta u_i^k,$$

³В квазистатических задачах под параметром t понимается, как правило, внешняя сила, заданное перемещение, длина дуги интегральной кривой в пространстве “перемещение–параметр силы” и т.д., а в динамических задачах t всегда является естественным временем. Для краткости в дальнейшем параметр t называем временем.

⁴Отметим, что виртуальная работа сосредоточенных сил здесь введена только в слабой форме уравнений движения. Для того чтобы ввести сосредоточенные силы в дифференциальные уравнения движения (1), надо использовать δ -функции Дирака.

где R_i^k, u_i^k — i -е компоненты сосредоточенной силы и вектора перемещений соответственно в k -й точке⁵ ($k = \overline{1, K}$, K — общее число точек, в которых действуют сосредоточенные нагрузки).

Используем шаговую процедуру интегрирования по времени уравнения (5). Считаем шаг по времени Δt достаточно малым. Предполагаем, что в момент времени t все искомые величины определены, т.е. уравнения (1) и (5) выполнены тождественно. Требуется определить соответствующие величины в момент времени $t + \Delta t$. Зависимость исследуемых функций от времени показываем далее левым верхним индексом, например: ${}^t\sigma, {}^{t+\Delta t}\sigma$ — значения тензора напряжений Коши в моменты времени t и $t + \Delta t$ соответственно.

Рассматривая уравнение (5) в момент времени $t + \Delta t$ и вычитая из обеих частей этого уравнения член $\int_V {}^t\sigma : \delta\varepsilon dV$, получаем

$$\int_V (\Delta\sigma : \delta\varepsilon + \rho {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{u}) dV = \int_{S_T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^* \cdot \delta\mathbf{u} dS + {}^{t+\Delta t}\hat{R}_c - \int_V {}^t\sigma : \delta\varepsilon dV \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (\delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } S_u). \quad (6)$$

Здесь и далее знак Δ перед величиной означает ее приращение с момента времени t до момента времени $t + \Delta t$, например

$$\Delta\sigma = {}^{t+\Delta t}\sigma - {}^t\sigma, \quad \Delta\varepsilon = {}^{t+\Delta t}\varepsilon - {}^t\varepsilon.$$

Линеаризуя определяющие соотношения (4) относительно момента времени t , получаем

$$\Delta\sigma = {}^t\mathbf{C} : \Delta\varepsilon. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получаем линеаризованное уравнение принципа возможных перемещений, записанное в приращениях:

$$\int_V (\delta\varepsilon : {}^t\mathbf{C} : \Delta\varepsilon + \rho {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{u}) dV = \int_{S_T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^* \cdot \delta\mathbf{u} dS + {}^{t+\Delta t}\hat{R}_c - \int_V {}^t\sigma : \delta\varepsilon dV \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (\delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } S_u). \quad (8)$$

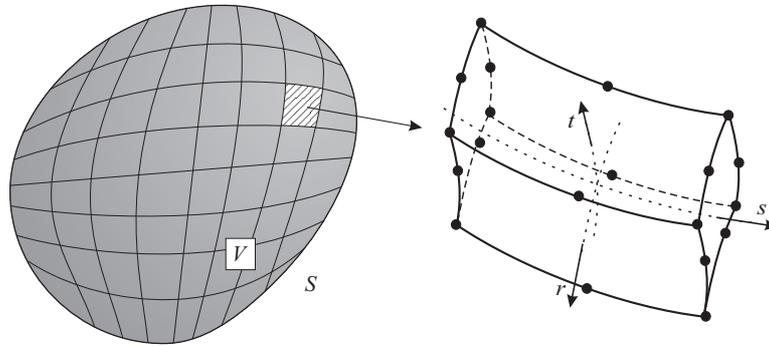


Рис. 1. Моделирование деформируемого тела конечными элементами (приведен конечный элемент с квадратичной аппроксимацией геометрии и перемещений)

1.2. Пространственная дискретизация трехмерных уравнений. Дискретный аналог уравнений движения получим с помощью МКЭ⁶, основываясь на линеаризованных уравнениях движения, записанных в слабой форме (8). Область $V \subset R^3$ с введенной декартовой системой координат x_1, x_2, x_3 аппроксимируем M восьмиугольными подобластями V^m ($m = \overline{1, M}$):

$$V \approx V^h \equiv V^1 \cup V^2 \cup \dots \cup V^M, \quad (9)$$

в каждой из которых вводится в общем случае криволинейная локальная (естественная) система координат r, s, t (рис. 1):

$$-1 \leq r \leq +1, \quad -1 \leq s \leq +1, \quad -1 \leq t \leq +1,$$

⁵Точки, в которых действуют сосредоточенные силы, могут принадлежать как границе S_T , так и внутренней области V .

⁶Здесь МКЭ рассматривается как вариант метода Бубнова–Галеркина с базисными функциями, определенными на локальных подобластях области V (конечных элементах).

так что каждая из подобластей V^m отображается на стандартный куб с длиной ребра, равной двум. Подобласти V^m с введенными полиномами $h_k(r, s, t)$, обладающими свойствами

$$h_k(r_l, s_l, t_l) = \delta_{kl}, \quad \sum_{k=1}^N h_k(r, s, t) = 1 \quad (k, l = \overline{1, N}), \quad \delta_{kl} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } k = l, \\ 0, & \text{если } k \neq l, \end{cases}$$

называются конечными элементами. Здесь $N \geq 8$ — число узловых точек в элементе (на рис. 1 приведен криволинейный конечный элемент с $N = 20$); r_l, s_l, t_l — локальные координаты l -ой узловой точки элемента. Рассматриваются изопараметрические конечные элементы, радиус-вектор материальных точек которых $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)^T$ и вектор перемещений $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)^T$ аппроксимируются одним и тем же набором полиномов h_k :

$$\mathbf{x}(r, s, t) = \sum_{k=1}^N h_k(r, s, t) \mathbf{x}^k, \quad \mathbf{u}(r, s, t) = \sum_{k=1}^N h_k(r, s, t) \mathbf{u}^k. \quad (10)$$

Здесь верхний правый индекс k указывает на то, что данные величины определяются в k -й узловой точке элемента:

$$\mathbf{x}^k \equiv \mathbf{x}(r_k, s_k, t_k), \quad \mathbf{u}^k \equiv \mathbf{u}(r_k, s_k, t_k).$$

Разбивая область V на конечные элементы в соответствии с (9), перепишем (8) в виде⁷

$$\sum_{m=1}^M \int_{V^m} (\delta \boldsymbol{\varepsilon} : {}^t \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \sum_{m=1}^M \int_{S_T^m} {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + {}^{t+\Delta t} \hat{R}_c - \sum_{m=1}^M \int_{V^m} {}^t \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (11)$$

Здесь S_T^m обозначает поверхность m -го элемента, пересекающуюся с поверхностью S^h ($S^h = S_u^h \cup S_T^h$, где S_u^h, S_T^h — части поверхности S^h , аппроксимирующие поверхности S_u и S_T соответственно).

Рассмотрим m -й конечный элемент. Введем векторы⁸

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23})^T, \quad \mathbf{T}^* = (T_1^*, T_2^*, T_3^*)^T, \quad (12)$$

а также вектор узловых перемещений элемента

$$\mathbf{U}^m = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \dots, u_1^N, u_2^N, u_3^N)^T, \quad (13)$$

где u_i^k — i -й компонент вектора перемещений в k -й узловой точке элемента. Линеаризованные определяющие соотношения представим в векторно-матричной записи:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = {}^t \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (14)$$

где ${}^t \mathbf{C}$ — симметричная матрица размерности 6×6 , элементы которой составлены из компонент одноименного тензора четвертого ранга. Введем такие матрицы \mathbf{B} и \mathbf{H} элемента, что в подобласти V^m выполняются соотношения

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{U}^m, \quad \mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{U}^m. \quad (15)$$

Матрицы \mathbf{B} и \mathbf{H} зависят только от геометрических характеристик элемента и не изменяются при его деформировании, поэтому

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U}^m, \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{H} \delta \mathbf{U}^m. \quad (16)$$

Тензорную запись подынтегральных выражений в левой и правой частях (11) представляем в векторно-матричном виде

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : {}^t \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &\equiv \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T {}^t \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, & {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} &\equiv \delta \mathbf{u}^T {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}, \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^* \cdot \delta \mathbf{u} &\equiv \delta \mathbf{u}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^*, & {}^t \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} &\equiv \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T {}^t \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (17)$$

⁷В общем случае равенство (11) выполняется приблизительно вследствие замены области V на V^h и границы S на S^h (S^h — замкнутая поверхность, ограничивающая область V^h).

⁸Мы оставили для векторов $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ те же обозначения, что и для тензоров напряжений и деформаций, так как элементы этих векторов составляются из компонент упомянутых выше тензоров.

Пользуясь (13)–(17), имеем⁹

$$\begin{aligned} \int_{V^m} \delta \varepsilon : {}^t \mathbf{C} : \Delta \varepsilon dV &= \delta \mathbf{U}^{m \tau} {}^t \mathbf{K}^m \Delta \mathbf{U}^m, & \int_{V^m} {}^t \boldsymbol{\sigma} : \delta \varepsilon dV &= \delta \mathbf{U}^{m \tau} {}^t \mathbf{F}^m, \\ \int_{V^m} \rho {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV &= \delta \mathbf{U}^{m \tau} \mathbf{M}^m {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^m, & \int_{S_T^m} {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS &= \delta \mathbf{U}^{m \tau} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_T^m. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь для элемента введены касательная матрица жесткости ${}^t \mathbf{K}^m$, матрица масс \mathbf{M}^m , вектор поверхностных сил ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^m$ и вектор внутренних сил ${}^t \mathbf{F}^m$:

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{K}^m &\equiv \int_{V^m} \mathbf{B}^T {}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV, & \mathbf{M}^m &\equiv \int_{V^m} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV, \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_T^m &\equiv \int_{S_T^m} \mathbf{H}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}^* dS, & {}^t \mathbf{F}^m &\equiv \int_{V^m} \mathbf{B}^T {}^t \boldsymbol{\sigma} dV. \end{aligned} \quad (19)$$

Интегралы в (19) вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса–Лежандра приближенного интегрирования.

Введем вектор глобальных степеней свободы ансамбля элементов

$$\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_{NEQ})^T, \quad (20)$$

где U_i ($i = \overline{1, NEQ}$) — одна из компонент вектора перемещений в некоторой узловой точке, NEQ — общее число независимых компонент вектора перемещений ансамбля узловых точек. Компоненты векторов \mathbf{U}^m каждого m -го элемента состоят из компонент глобального вектора \mathbf{U} (см. (20)). Векторы ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^m$, $\Delta \mathbf{U}^m$, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_T^m$, ${}^t \mathbf{F}^m$ и матрицы ${}^t \mathbf{K}^m$, \mathbf{M}^m каждого из элементов приводятся к размерностям NEQ и $NEQ \times NEQ$ соответственно с помощью булевых матриц \mathbf{A}^m с элементами из нулей и единиц, которые вводятся для m -го элемента с помощью связи¹⁰

$$\mathbf{U}^m = \mathbf{A}^m \mathbf{U}.$$

Введем модифицированные матрицы и векторы элементов

$$\begin{aligned} {}^t \tilde{\mathbf{K}}^m &\equiv \mathbf{A}^{m \tau} {}^t \mathbf{K}^m \mathbf{A}^m, & \tilde{\mathbf{M}}^m &\equiv \mathbf{A}^{m \tau} \mathbf{M}^m \mathbf{A}^m, \\ {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{R}}_T^m &\equiv \mathbf{A}^{m \tau} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_T^m, & {}^t \tilde{\mathbf{F}}^m &\equiv \mathbf{A}^{m \tau} {}^t \mathbf{F}^m. \end{aligned}$$

Дискретный аналог уравнения (11) имеет следующий вид:

$$\delta \mathbf{U}^T ({}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} + \mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}) = \delta \mathbf{U}^T ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}), \quad (21)$$

где введены глобальные касательная матрица жесткости ${}^t \mathbf{K}$, матрица масс \mathbf{M} , векторы внешних ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$ и внутренних ${}^t \mathbf{F}$ сил ансамбля элементов:

$${}^t \mathbf{K} \equiv \sum_{m=1}^M {}^t \tilde{\mathbf{K}}^m, \quad \mathbf{M} \equiv \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{M}}^m, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \equiv \sum_{m=1}^M {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{R}}_T^m + {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c, \quad {}^t \mathbf{F} \equiv \sum_{m=1}^M {}^t \tilde{\mathbf{F}}^m.$$

Вектор сосредоточенных сил ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c$ вводится при следующем представлении виртуальной работы сосредоточенных сил¹¹:

$${}^{t+\Delta t} \hat{R}_c = \delta \mathbf{U}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c.$$

Пользуясь произвольностью вектора $\delta \mathbf{U}$, получаем из (21) дискретный аналог уравнений движения: систему обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}, \quad {}^0 \mathbf{U} = \mathbf{U}_0, \quad {}^0 \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{V}_0. \quad (22)$$

⁹Равенства в (18) являются приближенными в силу ошибок аппроксимации величин с помощью полиномов.

¹⁰В вычислительном комплексе PIONER [15] вместо булевых матриц используются таблицы соответствия локальной и глобальной нумераций.

¹¹Предполагается, что конечно-элементное разбиение области V проведено таким образом, что геометрические точки, в которых действуют сосредоточенные силы, совпадают с узлами конечно-элементной сетки. В этом случае компоненты вектора ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c$ будут либо нулевыми, либо совпадать с одной из величин ${}^{t+\Delta t} R_i^k$.

Отметим, что граничные условия учтены следующим образом: главные условия (на S_u) наложены заранее на вектор \mathbf{U} , а естественные (на S_T) выполняются приближенно в результате решения системы (22).

1.3. Алгоритм численного решения системы уравнений. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (22) решается шаговым интегрированием по двухшаговой двухпараметрической схеме Ньюмарка [5, 11, 12]. В зависимости от значений двух параметров (α и δ) эта схема может быть как условно устойчивой, так и безусловно устойчивой, а также недиссипативной второго порядка точности или диссипативной первого порядка точности. Так как система уравнений (22) является линеаризованной (линеаризация произошла при замене исходных определяющих соотношений (4), записанных в скоростях, на их линеаризованный аналог (14), записанный относительно приращений), то решение задачи (22) можно уточнять с помощью какой-либо итерационной процедуры (в комплексе PIONER [15] предусмотрено использование стандартного и модифицированного методов Ньютона–Рафсона и BFGS-квазиньютонова метода [5, 11, 12]). Отметим, что ошибку дискретизации по времени, внесенную использованием схемы Ньюмарка с заменой производных по времени их конечно-разностными аналогами, можно уменьшить только уменьшением шага интегрирования Δt .

Система уравнений для решения задачи квазистатического деформирования получается из системы (22) отбрасыванием инерционного члена (первого члена в левой части). Тогда на каждом шаге по времени решается алгебраическая система уравнений

$${}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}, \quad {}^0\mathbf{U} = \mathbf{U}_0. \quad (23)$$

В силу симметрии и положительной определенности матрицы ${}^t\mathbf{K}$ решение этой системы проводится методом Гаусса без определения ведущих элементов, точнее говоря, методом \mathbf{LDL}^T -факторизации, учитывающим разреженность элементов матрицы и ее переменный профиль (этот метод подробно документирован в [5], там же приведены тексты программы его реализации на языке FORTRAN-IV). После определения вектора $\Delta\mathbf{U}$ из (23) решение ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ в момент времени $t + \Delta t$ определяется по формуле

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}. \quad (24)$$

Это решение можно уточнять одним из упомянутых ранее итерационных методов, пока вектор невязки ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)}$ на i -й итерации не станет близок к нулевому (в смысле евклидовой нормы) в пределах заданной относительной погрешности сходимости решения при использовании итерационной процедуры. Подчеркнем, что эта итерационная процедура не позволяет избавиться от погрешности интегрирования по времени исходной системы (1)–(4), зависящей от величины шага Δt . Для ее уменьшения надо уменьшить этот шаг по времени.

При решении динамических задач с использованием неявной схемы Ньюмарка на каждом шаге по времени приходим к решению алгебраической системы уравнений

$${}^t\hat{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}, \quad (25)$$

где введены *эффективная касательная матрица жесткости* ${}^t\hat{\mathbf{K}}$ и *эффективный вектор внешних сил* ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}$:

$${}^t\hat{\mathbf{K}} \equiv {}^t\mathbf{K} + a_1\mathbf{M}, \quad {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} \equiv {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M}(a_2{}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3{}^t\ddot{\mathbf{U}}) - {}^t\mathbf{F}. \quad (26)$$

Векторы узловых скоростей $\dot{\mathbf{U}}$ и ускорений $\ddot{\mathbf{U}}$, используемые в (26), при переходе от момента времени t к моменту времени $t + \Delta t$ определяются следующим образом:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = a_1\Delta\ddot{\mathbf{U}} - a_2{}^t\dot{\mathbf{U}} - a_3{}^t\ddot{\mathbf{U}}, \quad {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_4{}^t\ddot{\mathbf{U}} + a_5{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}.$$

Здесь введены константы интегрирования¹²

$$a_1 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad a_4 = \Delta t(1 - \delta), \quad a_5 = \delta\Delta t.$$

Параметры α и δ выбираются из условия устойчивости и точности интегрирования уравнений движения. Если $\alpha = 0,25$ и $\delta = 0,5$, то схема Ньюмарка имеет второй порядок точности интегрирования по времени и схемная диссипация отсутствует. При других значениях α и δ схема Ньюмарка имеет первый порядок точности и появляется схемная диссипация при интегрировании уравнений движения. Диссипативные схемы интегрирования оказываются полезными при решении задач о распространении ударных волн и

¹²При изменении шага по времени Δt эти “константы” надо перевычислять.

при решении динамических контактных задач. Для линейных задач схема Ньюмарка является безусловно устойчивой при $\delta \geq 0,5$ и $\alpha \geq 0,25(\delta + 0,5)^2$.

Отметим, что алгебраическая система уравнений (25) при удалении инерционных сил ($\rho = 0$, следовательно, и $\mathbf{M} = \mathbf{0}$) сводится к системе (23) квазистатического деформирования. После решения системы (25) значение вектора ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ получается из (24). Это решение можно точно так же, как и при решении задач квазистатического деформирования, уточнять, используя одну из итерационных процедур (учитывая то, что ошибку конечно-разностной аппроксимации по времени можно уменьшать только уменьшением шага Δt).

1.4. Конечные элементы для расчета тонких тел. Приведенную в подразделе 1.2 пространственную дискретизацию трехмерными конечными элементами можно использовать для решения задач о деформировании тонкостенных конструкций (например, для решения задач об изгибе пластинки можно использовать дискретизацию, приведенную на рис. 2, а). Однако при решении систем (23), (25) с помощью

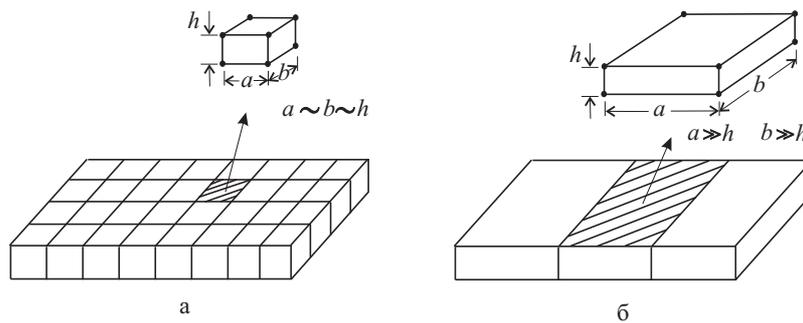


Рис. 2. Варианты дискретизации пластинки трехмерными конечными элементами: а — дискретизация, которую можно использовать для решения задачи о деформировании пластинки; б — дискретизация, которая может привести к недостоверному решению

дискретизации трехмерными конечными элементами, приведенной на рис. 2, б, встречаются трудности, связанные с тем, что если один линейный размер элемента существенно превосходит другой (другие), то матрица ${}^t\mathbf{K}$ (или ${}^t\hat{\mathbf{K}}$) становится плохо обусловленной [11]. Плохой обусловленности можно избежать, вводя статическую гипотезу Кирхгофа–Лява: напряжения, действующие вдоль волокна, нормального к срединной поверхности оболочки, пренебрежимо малы [11]. Техника введения этой гипотезы в криволинейные трехмерные конечные элементы приведена в [13, 14] и состоит в следующем. Локальная система координат в элементе всегда ориентируется таким образом, что координата t направлена по “нормали” к срединной поверхности оболочки¹³ (см. рис. 3). В каждой точке интегрирования вводится собственная

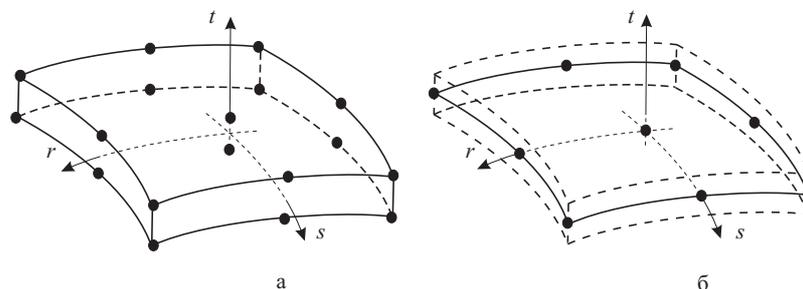


Рис. 3. Естественная система координат: а — тонкостенный элемент, б — элемент оболочки

система координат слоя. Слой определяется поверхностью $t = t_{\text{int}}$, где t_{int} — значение локальной координаты t в точке интегрирования. В этой точке вводятся два касательных к слою вектора единичной длины $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, ортогональных друг другу. Третий вектор единичной длины $\hat{\mathbf{e}}_3$ вводится как нормальный к слою вектор, ортогональный первым двум. Локальную декартову систему координат с ортонормальными

¹³Слово “нормаль” заключено в кавычки, так как требуется лишь близость этого вектора к “настоящему” вектору нормали к срединной поверхности.

базисными векторами $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ назовем системой координат слоя. Компоненты тензоров в этой системе координат обозначим крышкой сверху. Введение статической гипотезы Кирхгофа–Лява соответствует предположению $\hat{\sigma}_{33} = 0$. Вместо векторов σ и ε , определенных в (12) шестью компонентами, вводим векторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$ длины пять:

$$\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{13}, \hat{\sigma}_{23})^T, \quad \hat{\varepsilon} = (\hat{\varepsilon}_{11}, \hat{\varepsilon}_{22}, 2\hat{\varepsilon}_{12}, 2\hat{\varepsilon}_{13}, 2\hat{\varepsilon}_{23})^T.$$

Вместо определяющих соотношений (14) используются определяющие соотношения вида

$$\Delta \hat{\sigma} = {}^t \hat{C} \Delta \hat{\varepsilon},$$

где матрица ${}^t \hat{C}$ получается из матрицы ${}^t C$ при введении ограничения $\hat{\sigma}_{33} = 0$.

В направлении t в этом элементе используем линейную интерполяцию. При наложении некоторых граничных условий на оболочку использование такого элемента позволяет избежать плохой обусловленности касательной матрицы жесткости и получить решение задачи. Тем не менее в общем случае применение этого элемента не приводит к желаемому результату вследствие наличия нулевой паразитической собственной моды (ранг касательной матрицы жесткости ${}^t K^m$ для тонкостенного элемента меньше, чем для обычного трехмерного элемента). Эта ситуация обусловлена слишком большой “мягкостью” элемента в нормальном направлении.

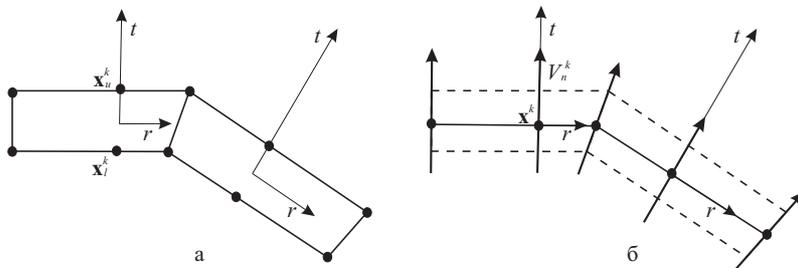


Рис. 4. Моделирование тонкого тела с изломом срединной поверхности: *a* — тонкостенными элементами, *б* — элементами оболочки

Для увеличения “жесткости” элемента в нормальном направлении кроме статической гипотезы введем кинематическую гипотезу Тимошенко: волокно, направленное вдоль вектора нормали к срединной поверхности оболочки, не искривляется и не изменяет своей длины в процессе деформирования¹⁴. В силу того, что в направлении координаты t используются два узла и вводится линейная интерполяция геометрии и неизвестных по “толщине” элемента, первая часть гипотезы Тимошенко (в процессе деформирования волокно, направленное по нормали, остается прямым) выполняется автоматически. Более того, эта часть гипотезы Тимошенко ослабляется: вместо волокна, направленного по нормали к срединной поверхности, используем волокно, соединяющее два узла: на нижней ($t = -1$) и верхней ($t = +1$) поверхностях элемента. Такое ослабление позволяет существенно упростить конечно-элементное моделирование тонкостенных конструкций, например, при моделировании тонких оболочек с изломом срединной поверхности (рис. 4).

Интерполяцию геометрии элемента, выраженную первой формулой в (10), можно представить в виде

$$\mathbf{x}(r, s, t) = \sum_{k=1}^N h'_k(r, s) \bar{\mathbf{x}}^k(t), \tag{27}$$

где N — число пар “верхних” и “нижних” узлов элемента, k — текущий номер пары узлов, $h'_k(r, s)$ — интерполяционные функции слоя, $\bar{\mathbf{x}}^k(t)$ — интерполяция радиус-вектора \mathbf{x} для k -ой пары узлов в t -направлении:

$$\bar{\mathbf{x}}^k(t) \equiv \frac{1+t}{2} \mathbf{x}_u^k + \frac{1-t}{2} \mathbf{x}_l^k. \tag{28}$$

¹⁴Иногда накладывается и более сильная кинематическая гипотеза Кирхгофа–Лява: в дополнение к гипотезе Тимошенко принимается, что волокно, направленное по нормали к срединной поверхности оболочки, в процессе деформирования остается направленным по нормали. Это предположение накладывает усиленные условия на гладкость исследуемых функций и создает математические трудности, связанные с обеспечением сходимости решения при применении МКЭ [11, 16].

Здесь $\mathbf{x}_u^k, \mathbf{x}_l^k$ — радиус-векторы “верхнего” и “нижнего” узла k -й пары узлов. Определим радиус-вектор k -й узловой точки срединной поверхности соответствующей k -й пары, полагая $t = 0$ в (28):

$$\mathbf{x}^k \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{x}_u^k + \mathbf{x}_l^k). \quad (29)$$

Вектор “нормали” единичной длины \mathbf{V}_n^k и “толщина” оболочки в k -м узле определяются следующим образом:

$$\mathbf{x}_u^k - \mathbf{x}_l^k = a_k \mathbf{V}_n^k, \quad \|\mathbf{V}_n^k\|_2 = 1. \quad (30)$$

Здесь и далее $\|\mathbf{a}\|_2 \equiv \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ — евклидова норма вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$. Подставляя (29) и (30) в (28), получим

$$\bar{\mathbf{x}}^k(t) \equiv \mathbf{x}^k + \frac{t}{2} a_k \mathbf{V}_n^k. \quad (31)$$

Элемент с аппроксимацией по толщине функцией $\bar{\mathbf{x}}^k(t)$, представленной формулой (28), назовем *тонкостенным элементом*, а формулой (31) — *элементом оболочки*. В первом случае для описания геометрии используются координаты радиус-векторов “верхнего” \mathbf{x}_u^k и “нижнего” \mathbf{x}_l^k узлов элемента, а во втором — координаты радиус-вектора срединной поверхности оболочки \mathbf{x}^k , вектора “нормали” единичной длины \mathbf{V}_n^k и “толщины” a_k оболочки в узле с локальным номером k .

Вектор перемещений изопараметрического конечного элемента определяется из (27) по формуле

$${}^t \mathbf{u} = {}^t \mathbf{x} - {}^0 \mathbf{x} = \sum_{k=1}^N h'_k(r, s) {}^t \bar{\mathbf{u}}^k(t),$$

где

$${}^t \bar{\mathbf{u}}^k(t) \equiv {}^t \bar{\mathbf{x}}^k(t) - {}^0 \bar{\mathbf{x}}^k(t). \quad (32)$$

Для тонкостенного элемента вектор ${}^t \bar{\mathbf{u}}^k(t)$ определяется из (28), (32):

$${}^t \bar{\mathbf{u}}^k(t) \equiv \frac{1+t}{2} {}^t \mathbf{u}_u^k + \frac{1-t}{2} {}^t \mathbf{u}_l^k, \quad (33)$$

а для элемента оболочки — из (31), (32) с учетом неизменности “толщины” оболочки a_k :

$${}^t \bar{\mathbf{u}}^k(t) \equiv {}^t \mathbf{u}^k + \frac{t}{2} a_k {}^t \tilde{\mathbf{V}}_n^k. \quad (34)$$

Здесь введены обозначения

$${}^t \mathbf{u}_u^k \equiv {}^t \mathbf{x}_u^k - {}^0 \mathbf{x}_u^k, \quad {}^t \mathbf{u}_l^k \equiv {}^t \mathbf{x}_l^k - {}^0 \mathbf{x}_l^k, \quad {}^t \mathbf{u}^k \equiv {}^t \mathbf{x}^k - {}^0 \mathbf{x}^k, \quad {}^t \tilde{\mathbf{V}}_n^k \equiv {}^t \mathbf{V}_n^k - {}^0 \mathbf{V}_n^k.$$

Из (34) следует, что вектор перемещения любой материальной точки волокна, совпадающего с вектором “нормали” к срединной поверхности оболочки в узловой точке k элемента, можно представить в виде суммы вектора перемещений ${}^t \mathbf{u}^k$ этой узловой точки, находящейся на срединной поверхности оболочки, и вклада вектора ${}^t \tilde{\mathbf{V}}_n^k$, характеризующего поворот вектора ${}^0 \mathbf{V}_n^k$ в новое положение ${}^t \mathbf{V}_n^k$. Обозначим через $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ ортонормальные базисные векторы декартовой системы координат. Для описания поворота вектора “нормали” рассмотрим две возможные системы координат.

(1) В каждой узловой точке k вводится местная система координат с ортонормальным базисом ${}^0 \mathbf{V}_1^k, {}^0 \mathbf{V}_2^k, {}^0 \mathbf{V}_n^k$, где векторы ${}^0 \mathbf{V}_1^k, {}^0 \mathbf{V}_2^k$ определяются, следуя [5, 11]:

$${}^0 \mathbf{V}_1^k = \begin{cases} \mathbf{k}_2 \times {}^0 \mathbf{V}_n^k / \|\mathbf{k}_2 \times {}^0 \mathbf{V}_n^k\|_2, & \text{если } \|\mathbf{k}_2 \times {}^0 \mathbf{V}_n^k\|_2 \neq 0, \\ \mathbf{k}_3, & \text{если } \|\mathbf{k}_2 \times {}^0 \mathbf{V}_n^k\|_2 = 0, \end{cases} \quad {}^0 \mathbf{V}_2^k = {}^0 \mathbf{V}_n^k \times {}^0 \mathbf{V}_1^k.$$

Знак \times обозначает операцию векторного произведения.

(2) Используется общая декартова система координат с базисными векторами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$.

В линейном приближении (малые углы поворота) получаем для каждой из введенных выше систем координат формулы, описывающие поворот вектора “нормали”.

(1) Местная система координат:

$${}^t \tilde{\mathbf{V}}_n^k = {}^t \beta^k {}^0 \mathbf{V}_1^k - {}^t \alpha^k {}^0 \mathbf{V}_2^k.$$

Здесь α^k, β^k — углы поворотов вектора “нормали” относительно осей, совпадающих по направлению с векторами ${}^0\mathbf{V}_1^k, {}^0\mathbf{V}_2^k$.

(2) Глобальная система координат:

$${}^t\tilde{\mathbf{V}}_n^k = {}^t\mathbf{S}^k {}^0\mathbf{V}_n^k.$$

Здесь \mathbf{S}^k — матрица углов поворота

$$\mathbf{S}^k \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3^k & \alpha_2^k \\ \alpha_3^k & 0 & -\alpha_1^k \\ -\alpha_2^k & \alpha_1^k & 0 \end{bmatrix},$$

где $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k$ — углы поворотов вектора “нормали” относительно осей, совпадающих по направлению с векторами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ соответственно.

Таким образом, для элемента оболочки получили две альтернативных записи вектора ${}^t\bar{\mathbf{u}}^k(t)$.

(1) В местной системе координат, служащей для описания поворота вектора “нормали”, получим

$${}^t\bar{\mathbf{u}}^k(t) = {}^t\mathbf{u}^k + \frac{t}{2} a_k (-{}^t\alpha^k {}^0\mathbf{V}_2^k + {}^t\beta^k {}^0\mathbf{V}_1^k).$$

Число степеней свободы в узловой точке k равно пяти: $u_1^k, u_2^k, u_3^k, \alpha^k, \beta^k$.

(2) В общей декартовой системе координат имеем

$${}^t\bar{\mathbf{u}}^k(t) = {}^t\mathbf{u}^k + \frac{t}{2} a_k {}^t\mathbf{S}^k {}^0\mathbf{V}_n^k.$$

Число степеней свободы в узловой точке k равно шести: $u_1^k, u_2^k, u_3^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k$.

Для тонкостенного элемента вектор узловых перемещений записывается в виде

$$\mathbf{U}^m = (u_{u1}^1, u_{u2}^1, u_{u3}^1, u_{l1}^1, u_{l2}^1, u_{l3}^1, \dots, u_{u1}^N, u_{u2}^N, u_{u3}^N, u_{l1}^N, u_{l2}^N, u_{l3}^N)^T. \quad (35)$$

Для элемента оболочки с пятью степенями свободы в узле вектор узловых перемещений имеет вид

$$\mathbf{U}^m = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \alpha^1, \beta^1, \dots, u_1^N, u_2^N, u_3^N, \alpha^N, \beta^N)^T, \quad (36)$$

а для элемента оболочки с шестью степенями свободы получаем

$$\mathbf{U}^m = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1, \dots, u_1^N, u_2^N, u_3^N, \alpha_1^N, \alpha_2^N, \alpha_3^N)^T. \quad (37)$$

При определении матриц и векторов тонкостенного элемента или элемента оболочки под вектором узловых перемещений \mathbf{U}^m понимаем одно из выражений (35)–(37).

При формулировке матриц и векторов тонкостенного элемента и элемента оболочки можно использовать два подхода.

(1) Матрицы и векторы элементов вычисляются в декартовой системе координат. Матрица определяющих соотношений сначала записывается в системе координат слоя (т.е. определяются элементы матрицы $\hat{\mathbf{C}}$) и дополняется до матрицы размерностью 6×6 с учетом статической гипотезы Кирхгофа–Лява, затем преобразуется поворотом к выражению ее элементов в декартовой системе координат (т.е. к матрице \mathbf{C}). Затем элементы всех матриц и векторов элементов формируются в декартовой системе координат. Такой подход к определению матриц и векторов элементов оболочки используется, например, в [5].

(2) Элементы матрицы \mathbf{B} вычисляются в декартовой системе координат, т.е. справедливо выражение, записанное первой формулой в (15) с учетом одного из выражений (35)–(37). Далее эта матрица преобразуется к матрице $\hat{\mathbf{B}}$, записанной в системе координат слоя, так что справедливо выражение

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{U}^m.$$

Матрицы ${}^t\mathbf{K}^m$ и векторы ${}^t\mathbf{F}^m$ вычисляются по формулам

$${}^t\mathbf{K}^m = \int_{V^m} \hat{\mathbf{B}}^T {}^t\hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{B}} dV, \quad {}^t\mathbf{F}^m \equiv \int_{V^m} \hat{\mathbf{B}}^T {}^t\hat{\boldsymbol{\sigma}} dV. \quad (38)$$

Матрицы ${}^t\mathbf{M}^m$ и векторы ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_T^m$ можно по-прежнему определять в декартовой системе координат по формулам (19). Такой подход к формированию матриц и векторов элементов принят, например, в [11].

Использование обоих подходов теоретически эквивалентно, при этом первый подход требует меньше числа операций при определении матриц и векторов элементов. Однако он не позволяет проводить раздельное численное интегрирование сдвиговых и мембранных элементов матриц и векторов [11]. В настоящей работе предполагается, что матрицы ${}^t\mathbf{K}^m$ и векторы ${}^t\mathbf{F}^m$ могут вычисляться по правилу раздельного численного интегрирования, поэтому используется второй подход к определению матриц и векторов элементов.

Обсудим определение интегралов в (19), (38). В общем случае интегрирование проводится численно (как уже оговаривалось, по квадратурным формулам Гаусса–Лежандра [5, 11])¹⁵. Важным вопросом при использовании формул интегрирования является порядок численного интегрирования (число точек интегрирования). Порядок численного интегрирования нужно согласовывать с порядком используемых интерполяционных полиномов, т.е. с числом узлов в элементе [5, 11] во избежание появления паразитических собственных форм.

Для тонкостенных элементов и элементов оболочки при упругом деформировании достаточно по направлению t (т.е. по “толщине” элемента) использовать две точки интегрирования вследствие линейной аппроксимации (28), (31), (33), (34). Для неупругих моделей материала нужно использовать увеличенный порядок интегрирования по “толщине” элемента для лучшего воспроизведения изгибных деформаций оболочки (см. подраздел 3.2).

Что касается интегрирования по слою элемента оболочки в координатной поверхности (r, s) при $t = t_{\text{int}}$, здесь дело обстоит не так просто. Для элементов оболочки, матрицы и векторы которых получены с использованием кинематической гипотезы Тимошенко, известен эффект “запирания” элемента [5, 11], который заключается в следующем. При уменьшении толщины элемента влияние сдвиговых деформаций должно уменьшаться и решение должно приближаться к решению, в котором используется кинематическая гипотеза Кирхгофа–Лява. Однако дискретная модель это свойство решения не воспроизводит и для достаточно тонких конечных элементов решение теряет достоверность. Установлено [17], что для элементов с высоким порядком аппроксимации ($N = 9$ или $N = 16$, т.е. для биквадратичных или бикубических полиномов) этот дефект уменьшается по сравнению с четырехузловыми элементами ($N = 4$), но не исчезает совсем.

Наиболее известным способом обхода этой трудности стало использование пониженного порядка интегрирования в (r, s) -поверхности ($t = t_{\text{int}}$). Однако использование пониженных порядков интегрирования приводит к тому, что появляются паразитические собственные моды (перемещения тела как жесткого целого запрещены, но касательная матрица жесткости остается вырожденной) [5, 11]. Решение задачи при использовании пониженных порядков интегрирования при некоторых граничных условиях на S_u можно вообще не получить вследствие того, что ранг касательной матрицы жесткости в этом случае оказывается ниже, чем ранг этой матрицы при использовании полного порядка интегрирования. Для комбинирования эффекта пониженного порядка интегрирования и сохранения ранга матрицы при полном порядке интегрирования элемента используется раздельный порядок интегрирования, когда сдвиговые члены в касательной матрице жесткости интегрируются с уменьшенным порядком, а несдвиговые — с полным порядком.

Выше приведены формулировки матриц и векторов элементов оболочки с пятью и шестью степенями свободы на узел. У каждой из этих формулировок есть свои преимущества и недостатки. Так как поворот вектора “нормали” полностью описывается двумя углами поворота, то шестая степень свободы в общем случае является лишней. С этой точки зрения использование пяти степеней свободы в узле представляется более логичным по сравнению с использованием шести степеней свободы. Недостатком же формулировки матриц элементов с пятью степенями свободы в узле является использование поворотных степеней свободы α^k и β^k относительно векторов ${}^0\mathbf{V}_1^k$ и ${}^0\mathbf{V}_2^k$, которые определяются через вектор “нормали” ${}^0\mathbf{V}_n^k$. Так как при восстановлении векторов “нормали” в узлах, где стыкуются элементы, происходит разрыв, то эти векторы должны вводиться независимо от геометрии элементов (или осредняться в узлах стыковки элементов). Это создает определенные трудности при автоматизации задания входной информации для описания элементов оболочки в практических расчетах. Для элементов с шестью степенями свободы на узел поворотные степени свободы $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k$ рассматриваются относительно осей глобальной системы координат x_1, x_2, x_3 с базисными векторами $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. Поэтому можно в местах соединения элементов независимо для каждого элемента восстановить свой собственный вектор “нормали”. Повороты всех векторов “нормали”, приписанных к одной и той же узловой точке, описываются одними и теми же степенями свободы. Это позволяет ограничиться только вводом координат узловых точек срединной

¹⁵Интересно отметить, что численное интегрирование позволяет в большинстве случаев получить даже более точное решение задачи, чем точное интегрирование [16].

поверхности элементов. Недостатком этих элементов является одна лишняя поворотная степень свободы на гладких участках оболочки (соответствующая повороту вектора нормали вокруг себя). Возникающая при этом сингулярность в касательной матрице жесткости обычно регуляризуется введением штрафа [11, 18]. В вычислительном комплексе PIONER [15] используются формулировки как тонкостенного элемента, так и элемента оболочки с пятью или шестью степенями свободы в узлах [13, 14].

2. Модель хрупкого материала тонкого тела. Рассмотрим материал с возможностью разрушения при действии растягивающих напряжений. Для этого материала компоненты тензора напряжений вычисляются непосредственно через компоненты тензора деформаций. Однако модель хрупкого материала не принадлежит к классу нелинейно упругих вследствие того, что в зависимость компонент тензора напряжений от компонент тензора деформаций входит набор некоторых внутренних параметров, зависящих от истории деформирования.

Модель хрупкого материала определяется тремя константами: E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона и σ_t — предел прочности материала при растяжении, а также двумя внутренними параметрами, определяемыми в каждой материальной точке тела (при численных расчетах — в каждой точке интегрирования) для каждого момента времени t :

- n_c^i — параметр i -ой ($i = 1, 2$) трещины¹⁶:

$$n_c^i = \begin{cases} 0, & \text{материал неповрежден,} \\ 1, & \text{трещина открыта,} \\ 2, & \text{трещина закрыта.} \end{cases}$$

- φ — угол, который образует первое главное направление с осью, направленной вдоль вектора \hat{e}_1 на поверхности слоя в момент возникновения трещины.

В начальный момент интегрирования уравнений движения или квазистатического деформирования ($t = 0$) материал предполагается неповрежденным и во всех точках интегрирования по пространственным координатам полагается ${}^0n_c^i = 0$ ($i = 1, 2$), параметр φ не определяется. Для неповрежденного материала используются определяющие соотношения закона Гука с матрицей, учитывающей статическую гипотезу Кирхгофа–Лява¹⁷:

$$\hat{C}^E = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \text{симм.} & & & k \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & & & & k \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Пусть в момент времени t известны значения внутренних параметров ${}^t n_c^i$, φ , а в момент времени $t + \Delta t$ — значения компонент вектора деформаций ${}^{t+\Delta t} \hat{\epsilon}$ ¹⁸. Приведем алгоритм определения матрицы ${}^{t+\Delta t} \hat{C}$ и вектора ${}^{t+\Delta t} \hat{\sigma}$.

1) Материал не поврежден (${}^t n_c^i = 0$, $i = 1, 2$). По заданным значениям компонент вектора ${}^{t+\Delta t} \hat{\epsilon}$ определяются пробные значения компонент вектора напряжений

$$\tilde{\hat{\sigma}} = \hat{C}^E {}^{t+\Delta t} \hat{\epsilon}.$$

Влиянием сдвиговых компонент тензора напряжений $\hat{\sigma}_{13}$, $\hat{\sigma}_{23}$ на образование трещины пренебрегаем, т.е. предполагается, что плоскость трещины ортогональна поверхности слоя¹⁹. Для определения возможности возникновения трещины (трещин) находим главные значения и главные направления компонент тензора напряжений $\tilde{\hat{\sigma}}$ в поверхности слоя и угол φ между первым главным направлением и осью, соответствующей базисному вектору \hat{e}_1 . Обозначим компоненты главных пробных напряжений в поверхности слоя через $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$, для которых справедливо неравенство $\tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2$. Сравниваем значение $\tilde{\sigma}_1$ с пределом прочности $\sigma_t > 0$.

¹⁶Предполагается, что в каждой материальной точке тела одновременно могут существовать одна трещина $n_c^1 \neq 0$, $n_c^2 = 0$ или две трещины $n_c^1 \neq 0$, $n_c^2 \neq 0$.

¹⁷Коэффициент k в (39) используется для наилучшего приближения по энергии (при упругом деформировании) к параболическому закону распределения по толщине оболочки касательных компонент тензора напряжений $\hat{\sigma}_{13}$, $\hat{\sigma}_{23}$. Обычно используется значение $k = 5/6$.

¹⁸Компоненты вектора ${}^{t+\Delta t} \hat{\epsilon}$ получены по известным значениям матрицы ${}^t \hat{C}$ и вектора ${}^t \hat{\sigma}$ после решения системы (23) или (25) и использования (24).

¹⁹Это допущение выполняется точно при использовании кинематической гипотезы Кирхгофа–Лява.

1.1) Если $\tilde{\sigma}_1 < \sigma_t$, то в данной материальной точке материал предполагается неповрежденным. Окончательно определяем

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}}^E, \quad {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Полагаем ${}^{t+\Delta t}n_c^i = 0$ ($i = 1, 2$), угол φ не запоминаем.

1.2) Если $\tilde{\sigma}_1 \geq \sigma_t$ и $\tilde{\sigma}_2 < \sigma_t$, то предполагается, что в данной материальной точке образовалась трещина, плоскость которой ортогональна поверхности слоя и оси первого главного направления. Трещина моделируется ортотропным упругим материалом, ослабленным в первом главном направлении. Корректируем главные напряжения

$$\check{\sigma}_1 = 0, \quad \check{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_2, \quad \check{\sigma}_{12} = 0.$$

Компоненты вектора напряжений ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ в системе координат слоя получаются обратным преобразованием компонент, определенных в главных осях, к компонентам, определенным в системе координат слоя:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}_{11} &= \check{\sigma}_2 \sin^2 \varphi, & {}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}_{22} &= \check{\sigma}_2 \cos^2 \varphi, & {}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}_{12} &= -\check{\sigma}_2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ {}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}_{13} &= k \frac{E}{1+\nu} {}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}_{13}, & {}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}_{23} &= k \frac{E}{1+\nu} {}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}_{23}. \end{aligned}$$

Для ортотропного материала, моделирующего трещину, матрица $\check{\mathbf{C}}$ определяется в виде

$$\check{\mathbf{C}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} k_1 & \nu k_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} k_2 & 0 & 0 \\ \text{симм.} & & & k \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & & & & k \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

и преобразуется операцией поворота к матрице, элементы которой определены в системе координат слоя ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{C}}$. В (40) введены константы k_1, k_2 (малые положительные числа [9, 10]), требуемые для регуляризации касательной матрицы жесткости ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}$ (при $k_1 = k_2 = 0$ положительная определенность матрицы ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}$ не гарантируется, матрица может стать сингулярной). Полагаем ${}^{t+\Delta t}n_c^1 = 1, {}^{t+\Delta t}n_c^2 = 0$ и запоминаем значение угла φ , которое далее не изменяется (т.е. предполагается, что ориентация плоскости трещины относительно базисных векторов $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ системы координат слоя при дальнейшем деформировании пластины не изменяется), поэтому левый верхний индекс угла φ не фиксируется.

1.3) Если $\tilde{\sigma}_1 \geq \sigma_t$ и $\tilde{\sigma}_2 \geq \sigma_t$, то в данной точке материал предполагается полностью разрушенным, так что

$${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}, \quad \check{\mathbf{C}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} k_1 & \nu k_1 & 0 & 0 & 0 \\ & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} k_2 & 0 & 0 \\ \text{симм.} & & & k \frac{1-\nu}{2} k_2 & 0 \\ & & & & k \frac{1-\nu}{2} k_2 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Так же, как и в предыдущем случае, константы k_1, k_2 используются для регуляризации задачи. Матрица ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{C}}$ получается преобразованием поворота из матрицы $\check{\mathbf{C}}$. Полагается ${}^{t+\Delta t}n_c^i = 1$ ($i = 1, 2$), значение угла φ запоминается.

2) Материал имеет только одну трещину (${}^t n_c^1 \neq 0, {}^t n_c^2 = 0$). Определяем несдвиговые компоненты тензора деформаций ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ в системе координат, связанной с ориентацией трещины, преобразованием поворота компонент этого тензора от системы координат слоя вокруг оси, ориентированной вектором $\hat{\mathbf{e}}_3$, на угол φ :

$$\begin{aligned} \check{\epsilon}_{11} &= {}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}_{11} \cos^2 \varphi + {}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}_{22} \sin^2 \varphi + 2 {}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}_{12} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \check{\epsilon}_{22} &= {}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}_{11} \sin^2 \varphi + {}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}_{22} \cos^2 \varphi - 2 {}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}_{12} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Находим пробное значение компоненты $\check{\sigma}_2$ тензора напряжений в этой системе координат из закона Гука:

$$\check{\sigma}_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \check{\epsilon}_{11} + \check{\epsilon}_{22}).$$

Проверяем возможность возникновения трещины, плоскость которой ортогональна плоскости первой трещины, сравнивая значение $\check{\sigma}_2$ с пределом прочности σ_t .

2.1) Если $\tilde{\sigma}_2 \geq \sigma_t$, то в данной материальной точке ортогонально первой трещине возникает вторая трещина, выполнены равенства (41), матрица ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{C}}$ получается преобразованием поворота из матрицы $\hat{\mathbf{C}}$. Полагается ${}^{t+\Delta t}n_c^i = 1$ ($i = 1, 2$), значение угла φ не изменяется.

2.2) Если $\tilde{\sigma}_2 < \sigma_t$, то в материальной точке остается одна трещина. Устанавливаем состояние трещины: является ли трещина открытой или она закрылась. Для этого значение компоненты тензора деформации $\tilde{\epsilon}_{11}$ в направлении, ортогональном плоскости трещины, сравнивается с нулем.

2.2.1) Если $\tilde{\epsilon}_{11} < 0$, то предполагается, что трещина закрыта (“залечена”). Вектор напряжений ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ и матрица ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{C}}$ определяются из закона Гука

$${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}}^E {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}}^E.$$

Полагается ${}^{t+\Delta t}n_c^1 = 2$, ${}^{t+\Delta t}n_c^2 = 0$, значение угла φ не изменяется.

2.2.2) Если $\tilde{\epsilon}_{11} \geq 0$, то предполагается, что трещина открыта. Определение вектора напряжений ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ и матрицы ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{C}}$ проводится точно так же, как и в случае 1.2; полагается ${}^{t+\Delta t}n_c^1 = 1$, ${}^{t+\Delta t}n_c^2 = 0$, значение угла φ не изменяется.

3) Материал разрушен с потерей несущей способности (${}^t n_c^i \neq 0$, $i = 1, 2$). Предполагается, что при полном разрушении материал уже ни при каких условиях не может восстановить несущую способность. Вектор напряжений ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ и матрица ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{C}}$ определяются точно так же, как и в случае 1.3; полагается ${}^{t+\Delta t}n_c^i = 1$ ($i = 1, 2$), значение угла φ не изменяется.

Вектор напряжений ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ и матрица определяющих соотношений ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{C}}$ могут корректироваться при использовании итерационной процедуры. При этом промежуточные значения ${}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}$ и ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{C}}^{(i)}$ (i — номер итерации) не запоминаются и каждый раз вычисляются начиная от момента времени t , при котором сходимость итерационной процедуры достигнута, а не от значений, полученных на предыдущей итерации.

3. Результаты численных расчетов. Приведенный в разделе 2 алгоритм решения задач разрушения тонких тел реализован в модели хрупкого материала, введенной в библиотеку моделей материалов для конечных элементов оболочки вычислительного комплекса PIONER [15]. В этом элементе объединены как собственно элементы оболочки, так и тонкостенные элементы, формулировки матриц и векторов которых представлены в подразделе 1.4. Более того, часть узлов одного элемента можно рассматривать как узлы оболочки (расположены на срединной поверхности), а другую часть — тонкостенного элемента (расположены на “нижней” и “верхней” лицевых поверхностях элемента). Такие элементы называются переходными [13, 14]. Они позволяют достаточно гибко моделировать геометрию составных тонкостенных конструкций. Число узлов в элементе варьируется от 4 до 16 (допускается билинейная, биквадратичная и бикубическая аппроксимации радиус-вектора геометрии и вектора перемещений оболочки).

Приведем результаты расчетов как тестовых задач механики разрушения, имеющих аналитическое решение (подразделы 3.1, 3.2), так и задачи, моделирующей разрушение бронзовой пластинки при воздействии на нее сосредоточенной массы (подраздел 3.3). Решения всех задач получены с использованием вычислительного комплекса PIONER шаговым интегрированием уравнений движения или равновесия с уточнением решения стандартным методом Ньютона–Рафсона [12]. Для ввода узловой и элементной информации и визуализации результатов расчетов, полученных в подразделе 3.3, использован пакет FEMAP 7.1, входящий в качестве пре/постпроцессора в пакет MSC/NASTRAN for Windows 4.6.

3.1. Разрушение пластины, находящейся в условиях однородного напряженного состояния. Рассмотрим решение задачи о квазистатическом деформировании и разрушении пластинок из хрупкого материала, находящихся в условиях однородного напряженно-деформированного состояния. Главная цель этих расчетов состоит в проверке возможности воспроизведения всех основных характеристик разрушения, заложенных в модель хрупкого материала вычислительного комплекса PIONER, т.е. способности этого комплекса решать задачи с той высокой степенью нелинейности, которая заложена в эту модель материала (падение уровня напряжения при возникновении трещины, возникновение второй трещины, схлопывание и повторное открытие трещины и т.д.).

3.1.1. Пластина в условиях одноосного напряженного состояния. Определим напряженно-деформированное состояние пластинки, находящейся в условиях одноосного напряжения при действии заданного перемещения u на ее торце (рис. 5, а).

Используются следующие константы модели хрупкого материала: $E = 103$ ГПа, $\nu = 0,25$, $\sigma_t = 200$ МПа. Граничные условия поставлены таким образом, что в пластинке осуществляется одноосное напряженное состояние с единственной отличной от нуля компонентой тензора напряжений σ . Кривая зависимости заданного перемещения от “времени” t представлена на рис. 5, б, где $u_{\max} = 0,002$ см. Так как решается задача квазистатического деформирования, то величина шага по “времени” Δt здесь роли не играет. Положительные значения перемещения u соответствуют растяжению пластинки, а отрица-

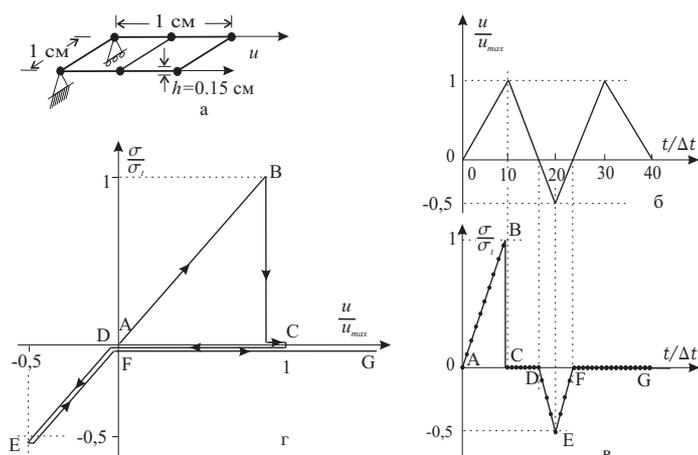


Рис. 5. Однородное деформирование и разрушение пластинки при одноосном напряженном состоянии: *a* — геометрия пластинки и граничные условия, *б* — зависимость заданного смещения u от “времени” t , *в* — аналитическое (сплошная линия) и численное (точки) решения для напряжения σ в пластинке, *г* — кривая зависимости “деформация–напряжение”

тельные — ее сжатию. Заданная программа деформирования соответствует растяжению пластинки с ее последующим сжатием и повторным растяжением.

Аналитическое решение задачи для напряжения σ , соответствующее модели хрупкого материала с определяющими соотношениями, представленными в разделе 2, дано на рис. 5, *в* сплошной ломаной линией. Здесь участок *AB* соответствует упругому деформированию пластинки при ее растяжении, участок *CD* — растяжению разрушенной пластинки (с одной трещиной в каждой материальной точке), участок *DEF* — упругому деформированию пластинки при ее сжатии с закрытой трещиной (материал “залечился”), участок *FG* — повторному растяжению разрушенной пластинки. Это же решение приведено в осях “деформация–напряжение” на рис. 5, *г*. Двойные и тройные линии, соответствующие решению для послекритического деформирования, искусственно разнесены для их лучшего представления (в действительности они должны сливаться).

Для проведения численных расчетов пластинка моделируется двумя четырехузловыми элементами оболочки (рис. 5, *а*), в каждом из элементов используется порядок численного интегрирования $2 \times 2 \times 2$ по естественным координатам r, s, t ; использовались следующие значения констант (см. раздел 2): $k_1 = 0,001$, $k_2 = 0,5$.

Деформирование пластинки в численных расчетах осуществляется за 40 шагов по “времени”. Точки на рис. 5, *в* соответствуют значениям напряжений в точках интегрирования, полученным шаговым интегрированием уравнений равновесия с итерационным уточнением решения. Как видно из графиков, представленных на рис. 5, *в*, численное решение достаточно точно воспроизводит аналитическое как при возникновении трещины, так и при ее закрытии и повторном открытии.

3.1.2. Пластина в условиях двuosного напряженного состояния. В представленном решении задачи о разрушении пластинки, находящейся в условиях одноосного напряженного состояния, при появлении трещин материал еще полностью не разрушен, так как плоскости всех трещин ортогональны направлению действия напряжения σ . Про моделируем полное разрушение материала пластинки при ее растяжении в двух ортогональных направлениях (рис. 6).

Определим напряженно-деформированное состояние пластинки, находящейся в условиях растяжения в двух ортогональных направлениях заданными перемещениями u и $u/2$ на торцах (рис. 6, *а*). Используются те же константы материала, что и в предыдущей задаче. Граничные условия поставлены так, что в пластинке осуществляется двuosное напряженное состояние с двумя отличными от нуля компонентами тензора напряжений: σ_{11} и σ_{22} . Заданное перемещение u нарастает по линейному закону от нуля до $u_{\max} = 0,0025$ см (рис. 6, *б*).

Аналитическое решение задачи для ненулевых компонент тензора напряжений представлено линиями на рис. 6, *в*. Компоненты тензора напряжений σ_{11} и σ_{22} в этой задаче одновременно являются и главными ($\tilde{\sigma}_1 = \sigma_{22}$, $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_{11}$). По мере возрастания перемещения u первым достигает значения предела прочности σ_i компонент σ_{22} и в каждой точке интегрирования образуются трещины, плоскости которых

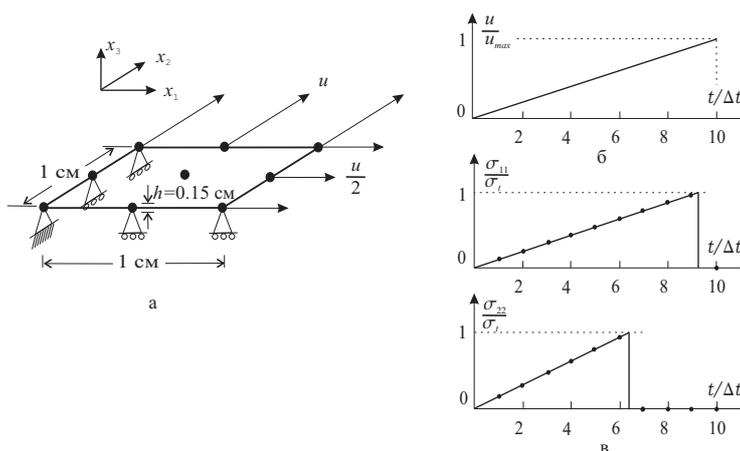


Рис. 6. Однородное деформирование и разрушение пластинки при двусосном напряженном состоянии: *a* — геометрия пластинки и граничные условия, *б* — зависимость заданного смещения u от “времени” t , *в* — аналитическое (сплошная линия) и численное (точки) решения для ненулевых компонент тензора напряжения в пластинке

параллельны плоскости, образованной осями x_1 и x_3 . Тем не менее, несущая способность пластинки еще не исчерпана и продолжается увеличение значения компоненты тензора напряжений σ_{11} до достижения предела прочности. При достижении этого значения в каждой материальной точке пластины возникают вторичные трещины, плоскости которых ортогональны плоскостям первичных трещин. Несущая способность пластинки при этом считается исчерпанной и пластина считается разрушенной.

В численных расчетах пластина моделировалась одним девятиузловым конечным элементом (с биквадратичной интерполяцией геометрии и вектора перемещений) с порядком численного интегрирования $3 \times 3 \times 2$ по естественным координатам r, s, t . Деформирование пластинки осуществляется за 10 шагов по “времени” до достижения перемещением в x_2 -направлении значения u_{\max} . Точки на рис. 6, *в* представляют компоненты σ_{11} и σ_{22} тензора напряжений, полученные в численном решении. Это численное решение хорошо воспроизводит как возникновение первой системы трещин, так и исчерпание несущей способности пластинки.

3.2. Разрушение балки при чистом изгибе. Рассмотрим решение задачи о разрушении балки с прямоугольным поперечным сечением при чистом изгибе (рис. 7, *a*).

Этот изгиб можно осуществлять как моментом M , так и углом закручивания β торца вокруг оси y (углом изгиба). При чистом изгибе балки из упругого материала аналитическое решение этой задачи известно [19]. Продольное напряжение σ_{xx} и изгибающий момент M можно определить через угол закручивания β по формулам

$$\sigma_{xx} = \frac{Ez}{L} \beta, \quad M = \frac{EI}{L} \beta, \tag{42}$$

остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Здесь E — модуль Юнга, L — половина длины балки, I — момент инерции поперечного сечения балки. Эпюра напряжений, соответствующая (42), приведена на рис. 7, *б*. Из (42) находим критические значения угла изгиба β_{cr} и соответствующего момента M_{cr} , при которых на поверхности $z = h/2$ (h — высота поперечного сечения балки) начинается разрушение материала балки ($\sigma_{xx}|_{z=h/2} = \sigma_t$):

$$\beta_{cr} = 2L\sigma_t/(Eh), \quad M_{cr} = 2I\sigma_t/h. \tag{43}$$

До достижения углом β своего критического значения β_{cr} справедливо решение (42). При $\beta \geq \beta_{cr}$ часть материала балки находится в разрушенном состоянии (заштрихована на рис. 7, *в*), а оставшаяся часть (упругое ядро) продолжает упруго деформироваться. Обозначим через \hat{h} толщину упругого ядра и введем новую координату $z' = z + (h - \hat{h})/2$ ($z' \in [-\hat{h}/2, \hat{h}/2]$) (рис. 7, *з*). Тогда при чистом изгибе балки с частично разрушенным материалом распределение напряжения σ_{xx} в зависимости от координаты z (см. эпюру

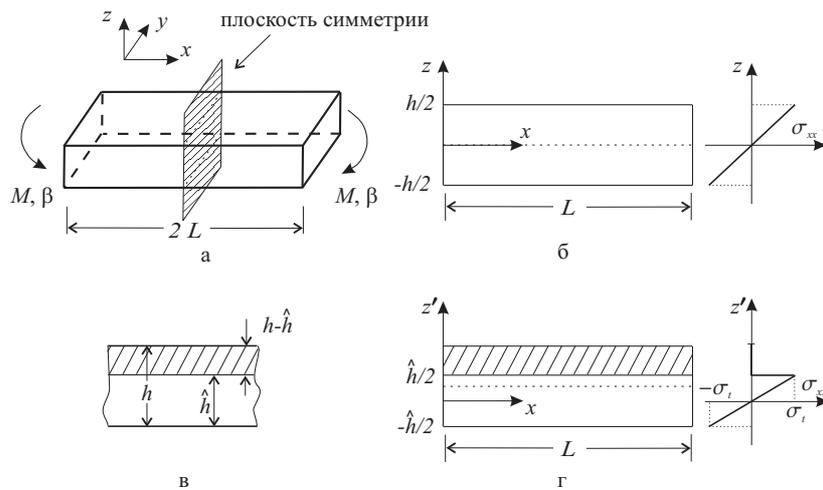


Рис. 7. Чистый изгиб балки: *a* — изгиб балки моментом M , *б* — эпюра напряжений при изгибе балки без разрушения, *в* — упругое ядро (незаштрихованная область) и область разрушенного материала (заштрихована), *г* — эпюра напряжений при разрушении части материала балки

напряжения на рис. 7, *г*) и значение момента M для данного угла $\beta \geq \beta_{cr}$ следующие:

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} 0, & \text{если } \hat{h} - h/2 \leq z \leq h/2, \\ Ez'\beta/L, & \text{если } -h/2 \leq z \leq \hat{h} - h/2, \end{cases} \quad M = \left(\frac{\hat{h}}{h}\right)^3 \frac{EI}{L} \beta. \quad (44)$$

Толщину упругого ядра \hat{h} определяем из условия того, что при $z' = \hat{h}/2$ напряжение σ_{xx} имеет свое максимальное значение σ_t :

$$\hat{h} = \frac{2\sigma_t L}{E\beta} \Rightarrow M = \frac{8I\sigma_t^3 L^2}{h^3 E^2} \frac{1}{\beta^2}.$$

Исчерпание несущей способности балки достигается при $\hat{h} \rightarrow 0$, откуда получаем предельные значения угла и момента изгиба:

$$\beta_{lim} \equiv \lim_{\hat{h} \rightarrow 0} \beta = \infty, \quad M_{lim} \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} M = 0.$$

Для численного решения рассматриваем половину балки, на левом торце которой ставятся граничные условия симметрии деформирования, а на правом торце задается угол изгиба β . Геометрические параметры балки приведены на рис. 8, *a*.

Балка моделируется одним элементом оболочки с пятью степенями свободы в узлах с кубической интерполяцией геометрии и вектора перемещений вдоль оси балки и линейной интерполяцией в поперечном направлении. С помощью такой модели точно воспроизводится аналитическое решение (42) задачи о чистом изгибе балки из упругого материала. Используется полный порядок численного интегрирования $4 \times 2 \times 2$ по координатам r, s, t . Таким образом, двух точек интегрирования по толщине балки (по координате t) достаточно для получения точного решения об упругом деформировании балки при чистом изгибе, однако их будет недостаточно для решения той же задачи с учетом разрушения материала.

При решении задачи используем следующие константы материала: $E = 300$ ГПа, $\nu = 0$, $\sigma_t = 100$ МПа. В качестве параметра деформирования используется либо длина дуги интегральной кривой, т.е. решение задачи проводится в (\mathbf{U}, λ) -пространстве [12] (рис. 8, *б, в*), либо угол изгиба торца балки β (рис. 8, *г*). В последнем случае приращение угла β на одном шаге по времени $\Delta\beta = 0,003$ рад, максимальное значение $\beta_{max} = 0,12$ рад. В соответствии с (43) получаем критические значения $\beta_{cr} = 0,008$ рад и $M_{cr} = 1667$ н·см, при которых верхний слой материала балки начинает разрушаться. Зависимость момента M от угла β , полученная в точном решении в соответствии с (42), (44), показана на рис. 8, *б-г* сплошной линией. Численные решения получены с 4×2 порядком численного интегрирования по Гауссу по координатам r, s и с разными порядками по координате t . Так как при использовании малого числа точек интегрирования по этой координате при частичном разрушении материала балки эпюру напряжений, представленную

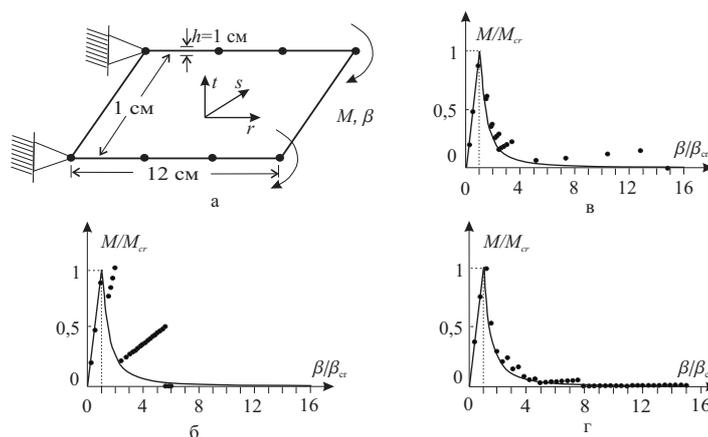


Рис. 8. Численное решение задачи о разрушении балки при чистом изгибе: *a* — конечно-элементная модель, граничные условия и геометрические параметры балки, *б, в, з* — зависимость момента M от угла изгиба β при различном числе точек интегрирования по толщине балки (*б* — 4 точки, *в* — 8 точек, *з* — 16 точек)

на рис. 7, *з*, аппроксимировать довольно сложно, для проверки сходимости численного решения к аналитическому использовалось разное число точек интегрирования по координате t . Численные решения представлены точками на рис. 8, *б–з*. При численном решении задачи столкнулись со следующей трудностью. В вычислительном комплексе PIONER для всех элементов, включая элементы оболочки, заложено максимальное число точек интегрирования, равное четырем. Однако решение даже с максимально возможным числом точек интегрирования (четыре) по толщине элемента плохо воспроизводит зависимость момента M от угла β (рис. 8, *б*). Для увеличения числа точек интегрирования по толщине элемента использовали возможность расчета слоистой оболочки, заложенную в формулировку конечного элемента оболочки вычислительного комплекса PIONER. Поэтому расчеты проводились также с двуслойным и четырехслойным элементами оболочки, в каждом из слоев которых использовались четыре точки интегрирования по толщине слоя, т.е. в двуслойном элементе в общей сложности получили восемь точек интегрирования, а в четырехслойном — 16 по толщине элемента. Результаты расчетов для двуслойного и четырехслойного элементов представлены на рис. 8, *в, з* соответственно. Видно, что 16 точек интегрирования по толщине балки уже достаточно хорошо воспроизводят аналитическое решение.

Отметим еще одну особенность численного решения. В аналитическом решении зона разрушения материала балки растет непрерывно от верхней кромки к нижней, но в численном решении это явление происходит скачкообразно при выполнении условия разрушения $\sigma_{xx} = \sigma_t$ для очередного слоя точек интегрирования $t_{int} = \text{const}$. Чем больше точек интегрирования по толщине элемента, тем лучше воспроизводится непрерывный рост зон разрушения (рис. 8, *з*). Если в аналитическом решении полное разрушение балки с потерей несущей способности ($M = 0$) происходит при стремлении угла β к бесконечности, то в численном решении потеря несущей способности балки происходит при конечных значениях этого угла. Исчерпание несущей способности происходит при достижении напряжением σ_{xx} в самом нижнем слое точек интегрирования нулевого значения (без достижения предела прочности σ_t). Дальнейший изгиб балки происходит при увеличении угла β без изменения напряженного состояния (т.е. значения напряжения σ_{xx} во всех точках интегрирования равны нулю).

3.3. Динамическое деформирование и разрушение бронзовой пластинки сосредоточенной массой. Рассмотрим задачу о разрушении бронзовой пластинки, два торца которой шарнирно оперты, а два других свободны (рис. 9, *а*).

Динамическое деформирование пластинки происходит вследствие приложения к центру начальной скорости v_0 , направленной по нормали к плоскости пластинки (рис. 9, *а*); во всей остальной области, занимаемой пластинкой, начальная скорость равна нулю. Начальные перемещения всей пластинки нулевые. В центре пластинки (в той точке, где задана начальная скорость) вводится сосредоточенная масса $m = 0,08$ кг, моделирующая воздействие стрелы, выпущенной из лука, на пластинку. Геометрические параметры пластинки приведены на рис. 9, *а*, они близки к размерам пластинок, из которых изготавливались панцири номадов Центральной Азии [1]. Основная цель решения этой задачи состоит в выявлении характе-

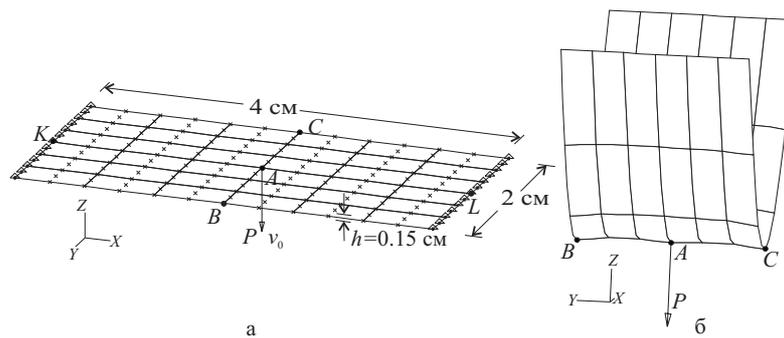


Рис. 9. Пластика при действии сосредоточенной силы P или начальной скорости v_0 : a — геометрические параметры, граничные условия и конечно-элементная модель пластинки, b — деформированная конфигурация упругой пластинки при действии сосредоточенной силы $P = 1$ н (приведена с 10000-кратным увеличением вектора перемещений)

ра разрушения пластинки при различных значениях начальной скорости v_0 и оценке начальной скорости, требуемой для разрушения пластинки. Материал пластинки — бронза со следующими характеристиками [20]: $E = 103$ ГПа, $\nu = 0,25$, $\sigma_t = 200$ МПа (отметим, что эти константы материала использовались также в тестовых расчетах в подразделе 3.1), $\rho = 8,8 \cdot 10^{-5}$ н · сек²/см⁴.

Предварительные расчеты показали, что разрушение пластинки происходит при ее разрушении по всей ширине, а не локально, в районе движения сосредоточенной массы. Для исследования причины такого характера разрушения рассмотрена задача о статическом деформировании пластины из упругого материала под действием сосредоточенной поперечной нагрузки $P = 1$ н, приложенной к центру (рис. 9, a)²⁰. Пластина моделируется девятиузловыми конечными элементами. Расчеты проводились с использованием как пяти, так и шести степеней свободы в узлах элементов при численном интегрировании матриц и векторов с $3 \times 3 \times 2$ порядком численного интегрирования по координатам r, s, t . Решения по обоим типам элементов оболочки оказались близкими, деформированная конфигурация приведена на рис. 9, b . Видно, что несмотря на точечное действие нагрузки в центре, происходит почти равномерное деформирование ее центральной части по всей ширине. При этом нормальный прогиб торцевых точек (точки В и С на рис. 9) даже больше, чем соответствующий прогиб центральной точки А. Числовые значения прогиба (z -компонента вектора перемещений) в этих точках приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения нормального прогиба w_A и прогибов w_B, w_C на торцах пластины в решении линейной статической задачи о деформировании пластины сосредоточенной силой, приложенной в центре

Тип элемента	w_A (см)	$w_B = w_C$ (см)
9-узловой оболочки (PIONER)	-0,0002221	-0,0002238
8-узловой пластины (MSC/NASTRAN)	-0,0002252	-0,0002266

Кроме того, в табл. 1 для сопоставления приведено решение этой же задачи пакетом MSC/NASTRAN for Windows 4.6. В последнем случае использовались восьмиузловые элементы (девятиузловые элементы в этом пакете отсутствуют) с разбивкой, представленной на рис. 9, a . Решения для перемещений, полученные по двум комплексам, близки, а решения по комплексу PIONER с использованием пяти и шести степеней свободы в узлах элементов совпадают, поэтому в таблице не различаются. Эти решения объясняют и характер разрушения пластины в динамической задаче, когда разрушение пластины происходит в локальной области по всей ее ширине.

Интегрирование уравнений движения проводилось методом Ньюмарка с параметрами $\alpha = 0,25$, $\delta = 0,5$. Шаг по времени подбирался из условия сходимости итерационной процедуры стандартного метода Ньютона–Рафсона за 25 итераций.

²⁰Решение статической задачи линейной теории упругости изменяется линейно в зависимости от значения P , поэтому конкретное значение этой силы на распределение полей напряжений и перемещений в пространстве не играет роли.

Таблица 2

Основные параметры численных решений динамических задач о разрушении бронзовой пластины сосредоточенной массой (*NSTE* — общее число шагов по времени, *T* — время деформирования, для которого получено решение)

v_0 (м/сек)	Δt (сек)	<i>NSTE</i>	<i>T</i> (сек)
1,0	$5,0 \cdot 10^{-5}$	60	0,003
3,2	$2,0 \cdot 10^{-5}$	150	0,003
10,0	$2,5 \cdot 10^{-8}$	11300	$2,825 \cdot 10^{-4}$

Решение динамической задачи о разрушении пластины сосредоточенной массой проводилось с порядком численного интегрирования $3 \times 3 \times 4$ по координатам r, s, t . Использовалось точно такое же разбиение пластины на элементы, как и для решения линейной статической задачи (рис. 9, а). Вместо сосредоточенной силы P задается начальная скорость, где добавлена сосредоточенная масса. Приведем решения этой задачи для разных значений начальной скорости v_0 . Основные параметры численных расчетов приведены в табл. 2.

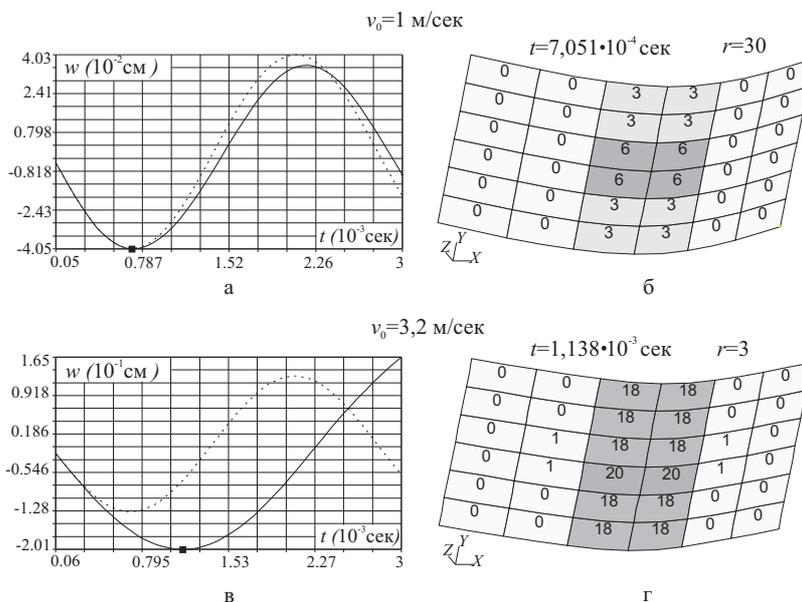


Рис. 10. Деформирование пластины с сосредоточенной массой с начальными скоростями $v_0 = 1,0$ м/сек (а, б) и $v_0 = 3,2$ м/сек (в, г): а, в — кривые зависимости нормального прогиба w центральной точки А от времени t (пунктирная кривая — упругое деформирование; сплошная кривая — деформирование с разрушением); б, г — деформированные конфигурации и зоны разрушения (r — коэффициент увеличения вектора перемещений)

На рис. 10 приведены кривые зависимости нормального прогиба w центральной точки А от времени t и деформированные конфигурации (отмечены квадратом на кривых зависимости прогиба от времени) пластин, полученные в расчетах с начальными скоростями $v_0 = 1,0$ м/сек и $v_0 = 3,2$ м/сек. На каждом элементе деформированной конфигурации кроме того приведено число точек интегрирования, в которых возникли трещины (максимальное значение равно 36). Для большей наглядности введена заливка элементов от белого цвета до оттенков темного с разным уровнем насыщенности в зависимости от количества поврежденного материала в элементе.

В расчетах с этими малыми начальными скоростями можно проследить за изменениями амплитуды и периода колебаний пластинки при ее разрушении. При разрушении пластинки период колебаний возрастает (материал становится менее “жестким”), однако для амплитуды колебаний такого однозначного заключения сделать нельзя: при меньшей скорости v_0 (1,0 м/сек) амплитуда поврежденной пластинки уменьшается, а при большей скорости (3,2 м/сек) увеличивается. Объяснение этому, на первый взгляд па-

радоксальному, результату следующее. В решении с $v_0 = 1,0$ м/сек максимальное повреждение материала происходит в точке, отмеченной квадратом на кривой “ $t - w$ ”. На “обратном ходе” решения эти трещины закрываются, а новые не возникают, поэтому пластина деформируется упруго, но амплитуда снижается за счет потери части энергии на разрушение. Качественно другая картина деформирования получается в решении с $v_0 = 3,2$ м/сек. Здесь на “обратном ходе” решения трещины, возникшие на нижней поверхности пластины, также закрываются, но на верхней поверхности возникают новые открытые трещины и амплитуда колебаний пластины с поврежденным материалом возрастает. Однако деформированная конфигурация с зонами повреждения приводится на рис. 10, *г* только для точки на кривой рис. 10, *в*, отмеченной квадратом, так как на “обратном ходе” решения движение пластины с сосредоточенной массой уже не моделирует деформирование системы “пластина–стрела”.

При увеличении начальной скорости стрелы до $v_0 = 10,0$ м/сек пластина полностью разрушается уже на “прямом ходе”. Две деформированные конфигурации для разных моментов времени деформирования приведены на рис. 11.

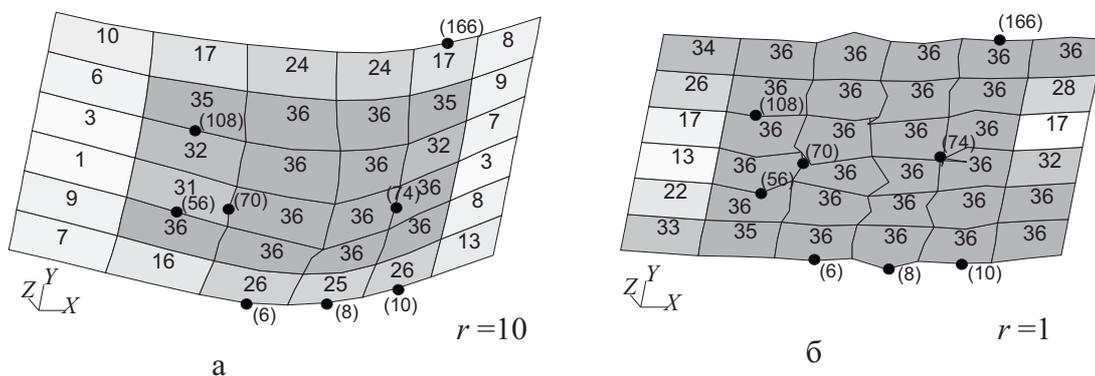


Рис. 11. Деформированные конфигурации пластины с сосредоточенной массой с начальной скоростью $v_0 = 10,0$ м/сек: *а* — момент времени $t = 1,375 \cdot 10^{-4}$ сек, *б* — момент времени $t = 2,475 \cdot 10^{-4}$ сек (r — коэффициент увеличения вектора перемещений)

При разрушении пластины выявлена потеря устойчивости решения в момент времени, близкий к $t = 1,375 \cdot 10^{-4}$ сек, которая проявляется следующим образом. В соответствии с поставленными граничными условиями на перемещения и повороты узловых точек и характером действия сосредоточенной нагрузки решение задач должно обладать некоторыми свойствами симметрии. Например, перемещения некоторых узловых точек (номера приведены в скобках на рис. 11) должны попарно удовлетворять условиям симметрии, приведенным в табл. 3 (оси симметрии приведены на рис. 9, *а*).

Таблица 3
Симметрии решения задачи о разрушении пластины с $v_0 = 10$ м/сек, которым должны удовлетворять пары узловых точек

узловая пара	ось симметрии	компонента перемещений
10 – 166	KL	u_x
56 – 108	KL	u_x
6 – 8	BC	u_y
70 – 74	BC	u_y

Если бы решение было устойчивым при любых значениях $t > 0$ по отношению к малым возмущениям координат узловых точек (в нашем случае возмущения вносятся препроцессором при автоматической генерации сетки), то соответствующие компоненты перемещений должны мало отличаться для всего времени решения. Однако кривые зависимости перемещений узловых точек от времени, приведенные на рис. 12, показывают на то, что при достижении момента времени, близкого к $t = 1,375 \cdot 10^{-4}$ сек, непрерывная зависимость решения от возмущений координат узловых точек теряется (деформированные конфигурации, приведенные на рис. 11, соответствуют моментам времени, отмеченным вертикальными пунктирными линиями на рис. 12). На достаточно больших временах эта несимметрия проявляется в численном решении

(см. рис. 11, б). Критическое время $t_{cr} = 1,375 \cdot 10^{-4}$ сек получено из анализа кривых, приведенных на рис. 12. Видно, что при $t < t_{cr}$ кривые перемещений соответствующих пар узлов (табл. 3) сливаются, а при $t \geq t_{cr}$ начинают расходиться с момента времени t_{cr} потери симметрии решения, которое трактуется как критическое время динамической потери устойчивости пластины при ее разрушении.

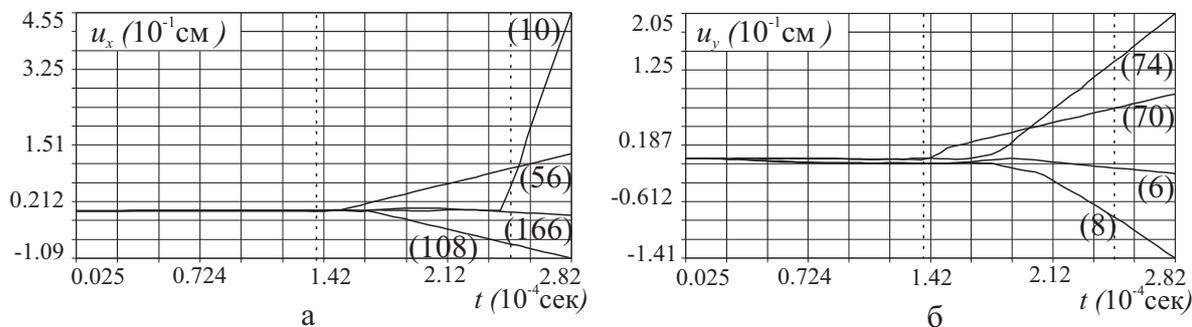


Рис. 12. Кривые зависимости перемещений узловых точек от времени для пластины с сосредоточенной массой с начальной скоростью $v_0 = 10,0$ м/сек: а — смещение узлов в направлении оси x , б — смещение узлов в направлении оси y

Из анализа расчетов видно, что пластинка полностью разрушается при сравнительно низкой скорости $v_0 \approx 10$ м/сек, которая гораздо меньше скорости стрелы, выпущенной из лука (около 60 м/сек). По-видимому, в настоящих расчетах пластинка поставлена в гораздо более невыгодные условия эксплуатации при ее закреплении шарнирным опиранием, чем при ее работе в составе панциря, одетом на человека, так как при этом не учитывается деформирование как всего панциря, так и демпфирующие свойства тела человека. Ответ на этот вопрос предполагается получить в процессе дальнейших исследований.

Заключение. Рассмотрены нелинейные уравнения движения тонких тел, пространственная дискретизация которых проводится методом конечных элементов. Предложенная формулировка конечного элемента основана непосредственно на трехмерных уравнениях движения. Предложены определяющие соотношения хрупкого материала, относящиеся к классу физически нелинейных, зависящих от истории нагружения. Модель хрупкого материала позволяет учитывать возникновение трещин, их закрытие или развитие вплоть до исчерпания несущей способности конструкции.

Эта модель введена в библиотеку моделей материалов конечных элементов оболочки вычислительного комплекса PIONER. Приводятся решения ряда тестовых задач о разрушении пластинки, демонстрирующих возможности вычислительного комплекса PIONER по решению задач нелинейной механики разрушения. Решается новая динамическая задача о разрушении бронзовой пластинки сосредоточенной массой с заданной начальной скоростью. Эта задача моделирует разрушение бронзовой пластины стрелой, выпущенной из лука. Из таких бронзовых пластин изготавливались защитные панцири древних воинов Центральной Азии. Получен диапазон скоростей, при которых возможно разрушение пластины. Отмечается достаточно низкий уровень начальной скорости, способной полностью разрушить пластину (10 м/сек) в сравнении со скоростью стрелы, выпущенной из лука (около 60 м/сек). Высказано предположение, что низкая защитная эффективность пластины получена вследствие слишком грубого предположения об условиях ее закрепления. Эта задача требует дальнейшего исследования в более реальном предположении о деформировании пластины в составе защитного панциря, закрепленного на теле человека. Установлено, что разрушение пластины сопровождается явлением ее динамической потери устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02-01-00195, 01-06-80245, 00-15-96180).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробейников С.Н., Худяков Ю.С. Анализ функциональных свойств защитного вооружения номадов Центральной Азии // Археология, этнография и антропология Евразии. 2001. 8, № 4. 108–115.
2. Коробейников С.Н., Худяков Ю.С., Шутов А.В. Методы математического моделирования для анализа защитных свойств бронзовых шлемов номадов Центральной Азии // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. 5, № 2. 126–138.
3. Hellan K. Introduction to Fracture Mechanics. New York et al.: McGraw Hill, 1984; Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988.

4. *Crouch S.L., Starfield A.M.* Boundary Element Methods in Solid Mechanics. London et al.: George Allen & Unwin, 1983; Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
5. *Bathe K.-J.* Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1982.
6. *Морозов Е.М., Никлишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980.
7. *Майнчен Дж., Сак С.* Метод расчета "Тензор" // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. 185–211.
8. *Черных К.Ф.* Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, 1996.
9. *Suidan M., Schnobrich W.* Finite element analysis of reinforced concrete // J. of the Structural Division (Proceedings of the ASME). 1973. **99**, N 10. 2109–2122.
10. *Bathe K.-J., Ramaswamy S.* On three-dimensional nonlinear analysis of concrete structures // Nuclear Engineering and Design. 1979. **52**, N 3. 385–409.
11. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. London et al.: McGraw Hill, 1991.
12. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
13. *Коробейников С.Н.* Геометрически нелинейный анализ оболочек с учетом больших приращений поворотов // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. Вычислительный центр, Ин-т теор. и прикл. механики АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск, 1990. **4**, № 4. 119–126.
14. *Korobeinikov S.N., Bondarenko M.I.* A material and geometric nonlinear analysis of shells including large rotation increments // Numerical Methods in Engineering' 96: Proc. of the 2nd ECCOMAS Conf. Chichester: John Wiley & Sons, 1996. 754–762.
15. *Korobeinikov S.N., Agapov V.P., Bondarenko M.I., Soldatkin A.N.* The general purpose nonlinear finite element structural analysis program PIONER // Proc. of the Intern. Conf. on Numerical Methods and Applications. Sofia: Publ. House of the Bulgarian Acad. of Sci., 1989. 228–233.
16. *Strang G., Fix G.J.* An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1973; Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
17. *Bathe K.-J., Ho L.W.* Some results in the analysis of thin shell structures // Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1981. 122–150.
18. *Onate E., Oliver J.* A finite element formulation for the geometrically nonlinear analysis of shell // Finite Element Methods for Plate and Shell Structures, Vol. 2. Swansea: Pineridge Press, 1986. 83–101.
19. *Филлин А.П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 2. М.: Наука, 1978.
20. Краткий физико-технический справочник (т. 1) / *Бронштейн И.Н.* и др. М.: Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1960.

Поступила в редакцию
16.09.2002
