УДК 517.988.68:519.85

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ НЕПРЕРЫВНЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННОЙ МЕТРИКОЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАВНОВЕСНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ МНОЖЕСТВОМ

А. С. Антипин[1], Б. А. Будак[2], Ф. П. Васильев[2]

Для решения равновесных задач с неточно заданным множеством предлагается регуляризованный непрерывный вариант метода проекции градиента с прогнозом в сочетании с методом штрафных функций в пространстве с переменной метрикой, доказывается сходимость траектории к нормальному решению задачи при любом выборе начальной точки. Строится регуляризующий оператор.

Ключевые слова: равновесное программирование, экстраградиентный метод, численные методы, метод проекции градиента, метод штрафных функций, регуляризующие операторы, сходимость.

1. Рассматривается задача равновесного программирования [1 – 3]: найти точку v_* из условий

$$v_* \in W = \big\{w \in W_0\colon\ g_i(w) \leqslant 0,\ i = 1,\dots,m;\ \ g_i(w) = 0,\ i = m+1,\dots,s\big\}, \tag{1}$$

$$\Phi(v_*, v_*) \leqslant \Phi(v_*, w) \quad \forall\, w \in W, \tag{2}$$

где функция $\Phi(v, w)$ определена на произведении евклидовых пространств $E^n \times E^n$, $W_0 \subseteq E^n$ — заданное выпуклое замкнутое множество из E^n, функции $g_i(w)$, $i = 1,\dots,s$, определены на множестве W_0. Предполагается, что множество решений (точек равновесия) W_* исходной задачи (2) непусто.

Заметим, что многие важные проблемы анализа, математической экономики, исследования операций, вычислительной математики сводятся к задаче (2) поиска какой-либо точки $v_* \in W_*$ [1 – 3].

В [4] предложен и исследован регуляризованный непрерывный экстраградиентный метод первого порядка с переменной метрикой для решения неустойчивой к возмущениям исходных данных задачи (2) при условии, что множество W известно точно. В настоящей работе предлагается и исследуется обобщение этого метода на случай, когда множество W известно приближенно.

Для учета ограничений типа равенств и неравенств в (1) будем пользоваться простейшей штрафной функцией [5]

$$P(w) = \sum_{i=1}^{s} \big(g_i^+(w)\big)^p, \quad p > 1, \quad w \in W_0, \tag{3}$$

где $g_i^+(w) = \max\big\{0; g_i(w)\big\}$ при $i = 1,\dots,m$ и $g_i^+(w) = \big|g_i(w)\big|$ при $i = m+1,\dots,s$. Введем функцию Тихонова

$$T(v, w) = \Phi(v, w) + A(t)P(w) + \alpha(t)\langle v, w\rangle, \quad v, w \in W_0, \tag{4}$$

где $A(t) > 0$, $\alpha(t) > 0$ — некоторые заданные функции.

Будем предполагать, что функции $\Phi(v, w)$, $g_i(w)$, $i = 1,\dots,s$, дифференцируемы по переменной $w \in W_0$. Тогда функция $P(w)$ из (3) также дифференцируема на W_0, а градиент функции (4) по переменной w равен

$$\nabla_w T(v, w) = \nabla_w \Phi(v, w) + A(t)P'(w) + \alpha(t)v \quad \forall\, v, w \in W_0, \tag{5}$$

где через $\nabla_w \Phi(v, w)$, $P'(w)$ обозначены градиенты функции $\Phi(v, w)$, $P(w)$ по переменной w. Также будем предполагать, что вместо точного значения градиентов $\nabla_w \Phi(v, w)$, $P'(w)$ нам известны их приближения $\nabla_w \Phi(v, w, t)$, $P'(w, t)$, такие, что

$$\max\Big\{\big|\big|\nabla_w \Phi(v, v, t) - \nabla_w \Phi(v, v)\big|\big|,\ \big|\big|P'(v, t) - P'(v)\big|\big|\Big\} \leqslant \delta(t)\big(1 + ||v||\big) \quad \forall\, v \in E^n, \quad \forall\, t > 0, \tag{6}$$

[1] Вычислительный центр РАН, ул. Вавилова, 40, 117967, Москва; email: antipin@ccas.ru

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: babudak@pochtamt.ru, arush@srcc.msu.su

где $\delta(t) \geqslant 0$ — некоторая заданная функция.

Рассмотрим следующий непрерывный метод решения задачи (2):

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) + v(t) &= \pi_{W_0}^{G(v(t))}\Big[v(t) - \gamma(t)G^{-1}\big(v(t)\big)\Big(\nabla_w\Phi\big(u(t), u(t), t\big) + A(t)P'\big(u(t), t\big) + \alpha(t)u(t)\Big)\Big],\\ u(t) &= \pi_{W_0}^{G(v(t))}\Big[v(t) - \gamma(t)G^{-1}\big(v(t)\big)\Big(\nabla_w\Phi\big(v(t), v(t), t\big) + A(t)P'\big(v(t), t\big) + \alpha(t)v(t)\Big)\Big],\\ v(0) &= v_0, \quad t \geqslant 0,\end{aligned} \tag{7}$$

где $w = \pi_{W_0}^{G(v)}(z)$ — так называемая G-проекция точки z на множество W_0 в метрике, задаваемой скалярным произведением $\big\langle G(x)y, y\big\rangle$, $G(x)$ — симметричная положительно определенная матрица. Точка $w = \pi_{W_0}^{G(x)}(z)$ является решением задачи минимизации сильно выпуклой функции [5]:

$$g(y) = \big\langle G(x)(y - z),\, y - z\big\rangle \to \inf, \quad y \in W_0.$$

Если $G(x) = I$ — единичная матрица, то G-проекция точки совпадает с обычным понятием проекции точки на множество [5]. Существование и единственность G-проекции вытекает из теоремы о минимизации сильно выпуклой функции на выпуклом множестве. Определение G-проекции равносильно следующему неравенству, называемому характеристическим свойством проекции [5]:

$$w = \pi_{W_0}^{G(v)}(z) \Leftrightarrow \big\langle G(v)(w - z),\, y - w\big\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, y \in W_0. \tag{8}$$

Ниже будут приведены условия согласования параметров $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $A(t)$ метода (7) и сформулированы требования к задаче (2), обеспечивающие сходимость траектории $v(t)$ процесса (7) при $t \to +\infty$ к решению задачи (2).

Предварительно исследуем поведение при $t \to +\infty$ траектории точек равновесия v_t, $t > 0$, функции $T(v, w)$, определяемых условием

$$v_t \in W_0, \quad T(v_t, v_t) \leqslant T(v_t, w) \quad \forall\, w \in W_0. \tag{9}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть W_0 — выпуклое замкнутое множество из E^n, функция $\Phi(v, w)$ непрерывна по совокупности переменных $(v, w) \in W_0 \times W_0$, выпукла по переменной $w \in W_0$ при каждом фиксированном $v \in W_0$, выполнено условие кососимметричности*

$$\Phi(v, v) - \Phi(v, w) - \Phi(w, v) + \Phi(w, w) \geqslant 0 \quad \forall\, v, w \in W_0, \tag{10}$$

функции $g_i(w)$, $i = 1, \dots, m$, непрерывны и выпуклы на W_0, функции $g_i(w)$, $i = m+1, \dots, s$, аффинны, то есть $g_i(w) = \langle a_i, w\rangle - b_i$, $a_i \in E^n$, b_i — действительные числа. Пусть множество W_* решений задачи (2) *непусто. Тогда W_* — выпуклое и замкнутое множество и задача* (2) *имеет единственное решение v_*, обладающее свойством $||v_*|| \leqslant ||v||$, $v \in W_*$.*

Доказательство. При сделанных предположениях множество W выпукло и замкнуто; как показано в [6], множество W_* также выпукло и замкнуто. Тогда сильно выпуклая функция $\phi(w) = ||w||^2$ на W_* имеет единственную точку минимума v_* [5]. Такую точку называют нормальным решением задачи (2).

Заметим, что условие кососимметричности (10) впервые введено в [1] и с тех пор широко используется при исследовании задач равновесного программирования.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1, *существуют постоянные $\eta > 0$, $c_i > 0$, $i = 1, \dots, s$, такие, что*

$$\Phi(v_*, v_*) \leqslant \Phi(v_*, w) + \sum_{i=1}^{s} c_i\big(g_i^+(w)\big)^{\eta} \quad \forall\, w \in W_0, \tag{11}$$

где v_* — нормальное решение задачи (2), *существуют градиенты $\nabla_w\Phi(v, w)$, $g_i'(w)$, $i = 1, \dots, m$, непрерывные на W_0, параметр p штрафной функции* (3) *удовлетворяет условиям $p > 1$, $p \geqslant \eta$, параметры $\alpha(t)$, $A(t)$ таковы, что*

$$\alpha(t) > 0, \quad A(t) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} A(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to\infty} \alpha(t)\big(A(t)\big)^{\frac{\eta}{p-\eta}} = +\infty \tag{12}$$

(при $p = \eta$ последнее равенство не нужно). Тогда условия (9) *однозначно определяют точку v_t при каждом $t > 0$, причем*

$$||v_t|| \leqslant R(t); \quad R(t) = \begin{cases} \left(||v_*||^2 + \dfrac{2B}{\alpha(t)A(t)^{\frac{\eta}{p-\eta}}} \right)^{\frac{1}{2}}, & p > \eta, \\ ||v_*||, \quad p = \eta, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$B = (p-\eta)\,\eta^{\frac{\eta}{p-\eta}}\, p^{-\frac{\eta}{p-\eta}}\, |c|^{\frac{\eta}{p-\eta}}, \quad |c| = \left(\sum_{i=1}^{s} |c_i|^{\frac{p}{p-\eta}} \right)^{\frac{p-\eta}{p}}, \quad p > \eta \tag{14}$$

и при $p = \eta$ считается, что $A(t) > |c|_\infty = \max c_i$, и

$$\lim_{t\to\infty} A(t)P(v_t) = 0, \tag{15}$$

$$\lim_{t\to\infty} ||v_t - v_*|| = 0. \tag{16}$$

Содержательные классы задач (1), (2), удовлетворяющих условию (11), приведены в [7].

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\sum_{i=1}^{s} c_i \big(g_i^+(w) \big)^\eta \leqslant A(t)P(w) + B\big(A(t)\big)^{-\frac{\eta}{p-\eta}} \quad \forall\, w \in W_0 \tag{17}$$

(при $p = \eta$ последнее слагаемое отсутствует). Пусть сначала $p > \eta$. Из известного неравенства

$$ab \leqslant \frac{a^q}{q} + \frac{b^r}{r}, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad q > 1, \quad r > 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

при $q = \dfrac{p}{\eta}$, $r = \dfrac{p}{p-\eta}$, $a = \big(g_i^+(w)\big)^\eta \left(\dfrac{pA(t)}{\eta}\right)^{\frac{\eta}{p}}$, $b = c_i \left(\dfrac{pA(t)}{\eta}\right)^{-\frac{\eta}{p}}$ имеем

$$ab = c_i \big(g_i^+(w)\big)^\eta \leqslant A(t)\big(g_i^+(w)\big)^p + \frac{p-\eta}{p}\, c_i^{\frac{p}{p-\eta}} \left(\frac{pA}{\eta}\right)^{\frac{-\eta}{p-\eta}} \quad \forall\, w \in W_0, \quad i = 1,\ldots,s.$$

Суммируя эти неравенства по i, получим оценку (17) при $p > \eta$. Если $p = \eta$, то для всех $A(t) > \max c_i$ сразу получаем ту же оценку. Неравенство (17) доказано.

Заметим также, что из условия (10) при $v = v_*$ и (11) следует, что

$$\Phi(w, v_*) - \Phi(w, w) \leqslant \Phi(v_*, v_*) - \Phi(v_*, w) \leqslant \sum_{i=1}^{s} c_i \big(g_i^+(w) \big)^\eta \quad \forall\, w \in W_0. \tag{18}$$

Далее, из определения (4) функции $T(v, w)$ и условия кососимметричности (10) следует

$$T(v, v) - T(v, w) - T(w, v) + T(w, w) \geqslant \alpha(t)||v - w||^2 \quad \forall\, v, w \in W_0, \quad t > 0. \tag{19}$$

При выполнении условий теоремы функция $T(v, w)$ непрерывна, имеет непрерывный градиент $\nabla_w T(v, w)$ на $W_0 \times W_0$ и выпукла по w на W_0. Отсюда и из работы [6] следует, что условия (9) однозначно определяют точку v_t при каждом $t > 0$. Положим в (19) $v = v_t$, $w = v_*$. С учетом (4), (17), (18) получим

$$\begin{aligned} \alpha(t)||v_t - v_*||^2 &\leqslant T(v_t, v_t) - T(v_t, v_*) - T(v_*, v_t) + T(v_*, v_*) \leqslant T(v_*, v_*) - T(v_*, v_t) = \\ &= \Phi(v_*, v_*) - \Phi(v_*, v_t) + A(t)\big(P(v_*) - P(v_t)\big) + \alpha(t)\big(||v_*||^2 - \langle v_*, v_t\rangle\big) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{s} c_i \big(g_i^+(v_\tau)\big)^\eta - A(t)P(v_t) + \alpha(t)\big(||v_*||^2 - \langle v_*, v_t\rangle\big) \leqslant \\ &\leqslant B\big(A(t)\big)^{-\frac{\eta}{p-\eta}} + \alpha(t)\big(||v_*||^2 - \langle v_*, v_t\rangle\big), \end{aligned} \tag{20}$$

или

$$||v_t - v_*||^2 \leqslant ||v_*||^2 - \langle v_*, v_t\rangle + B\big(A(t)\big)^{-\frac{\eta}{p-\eta}}\, \alpha^{-1}(t),$$

что равносильно

$$||v_t||^2 \leqslant \langle v_*, v_t\rangle + B\big(A(t)\big)^{-\frac{\eta}{p-\eta}}\,\alpha^{-1}(t).$$

Отсюда с учетом неравенства

$$2\langle v_*, v_t\rangle \leqslant ||v_*||^2 + ||v_t||^2$$

получим оценку (13) при $p > \eta$. Те же рассуждения приводят к ней и в случае $p = \eta$.

Докажем (15). Если $p = \eta$, $A(t) > |c|_\infty$, то из (9) при $w = v_*$ и из (17) при $w = v_t$ имеем

$$A(t)P(v_t) \leqslant \Phi(v_t, v_*) - \Phi(v_t, v_t) + \alpha(t)\big(-||v_t||^2 + \langle v_*, v_t\rangle\big) \leqslant \sum_{i=1}^{s} c_i\big(\,g_i^+(v_\tau)\big)^\eta + \frac{1}{4}\,\alpha(t)||v_*||^2, \qquad (21)$$

или

$$A(t)P(v_t) \leqslant |c|_\infty P(v_t) + \frac{1}{4}\,\alpha(t)||v_*||^2,$$

поэтому

$$0 \leqslant A(t)P(v_t) \leqslant \frac{A(t)\alpha(t)}{4\big(A(t) - |c|_\infty\big)}\,||v_*||^2 \quad \forall\, t > 0. \qquad (22)$$

Если $p > \eta$, то, пользуясь неравенством Гельдера

$$\sum_{i=1}^{s} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{s} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\sum_{i=1}^{s} b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}, \quad a_i \geqslant 0, \quad b_i \geqslant 0, \quad q > 1, \quad r > 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

и взяв $q = \dfrac{p}{\eta}$, $r = \dfrac{p}{p-\eta}$, $a_i = \big(\,g_i^+(v_t)\big)^\eta$, $b_i = c_i$, с учетом (21) имеем

$$0 \leqslant A(t)P(v_t) \leqslant |c|\,\big(P(v_t)\big)^{\frac{\eta}{p}} + \frac{\alpha(t)}{4}\,||v_*||^2 \quad \forall\, t > 0.$$

Обозначим $z = \big(A(t)P(v_t)\big)^{\frac{\eta}{p}}$ и перепишем предыдущее неравенство в следующем виде:

$$0 \leqslant z^{\frac{p}{\eta}} \leqslant |c|\,\big(A(t)\big)^{-\frac{\eta}{p}} z + \frac{\alpha(t)}{4}\,||v_*||^2 \quad \forall\, t > 0.$$

Отсюда следует оценка [5] (стр. 92, лемма 11)

$$0 \leqslant A(t)P(v_t) \leqslant |c|^{\frac{p}{p-\eta}}\,\big(A(t)\big)^{\frac{-\eta}{p-\eta}} + \frac{p}{4(p-\eta)}\,\alpha(t)||v_*||^2. \qquad (23)$$

Совершив предельный переход в (22), (23), получим (15). Далее, из (13) и теоремы Больцано–Вейерштрасса следует, что множество $\{v_t,\, t > 0\}$ имеет хотя бы одну предельную точку u_* при $t \to \infty$. Тогда существует подпоследовательность $\{t_k\} \to +\infty$, $v_{t_k} \to u_*$ при $k \to \infty$. Так как множество W_0 замкнуто, $v_{t_k} \in W_0$, то $u_* \in W_0$. Из (15) и непрерывности функций $g_i(w)$, $P(w)$ следует, что $P(v_{t_k}) \to P(v_*) = 0$, то есть

$$g_i(u_*) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad g_i(u_*) = 0, \quad i = m+1, \dots, s.$$

Значит, $u_* \in W$. Далее, в (9) совершим предельный переход при $t \to \infty$. С учетом непрерывности $\Phi(v, w)$, (15) и того, что $P(w) = 0\ \forall w \in W$, получим $\Phi(u_*, u_*) \leqslant \Phi(u_*, w)\ \forall w \in W$, т.е. $u_* \in W_*$. Кроме того, из (13) имеем $||u_*|| \leqslant ||v_*||$. Но v_* — нормальное решение, и значит $u_* = v_*$. Получили, что множество $\{v_t,\, t > 0\}$ имеет единственную предельную точку v_*. Отсюда следует (16). Теорема доказана.

Исследуем сходимость метода (7).

Теорема 2. *Примем следующие предположения.*

1. *Выполнены все условия леммы* 1, *теоремы* 1, *сужения градиентов* $\nabla_w\Phi(v, w)$ *и* $P'(w)$ *на диагональ квадрата* $W_0 \times W_0$ *удовлетворяют условию Липшица*

$$\big|\big|\nabla_w\Phi(v, v) - \nabla_w\Phi(u, u)\big|\big| \leqslant L||v - u|| \quad \forall\, v, u \in E^n, \qquad (24)$$

$$\big|\big|P'(v) - P'(u)\big|\big| \leqslant L||v - u|| \quad \forall\, v, u \in E^n, \quad L > 0. \qquad (25)$$

2. *Вместо точных значений градиентов* $\nabla_w\Phi(v, w)$ *и* $P'(w)$ *известны их приближения* $\nabla_w\Phi(v, w, t)$ *и* $P'(w, t)$, *для которых выполнены условия* (6).

3. $G(v)$ $\forall v \in E^n$ *— симметричная матрица; существуют такие константы* $M \geqslant m > 0$, *что*

$$m||v||^2 \leqslant \langle G(u)v, v\rangle \leqslant M||v||^2 \quad \forall\, u, v \in E^n; \tag{26}$$

существует сильно выпуклая дважды дифференцируемая функция $\Psi(v)$, *такая, что* $G(v) \equiv \Psi''(v)$.

4. $\alpha(t)$ *— выпуклая функция,* $\alpha'(t) \leqslant 0$; $A(t)$ *— вогнутая функция,* $A'(t) \geqslant 0$; $\gamma'(t) \leqslant 0$;

$$\begin{gathered}\alpha(t),\ \gamma(t),\ A(t) \in C^1[0;+\infty), \quad \delta(t) \in C[0;+\infty), \quad \alpha(t),\ \gamma(t),\ A(t) > 0, \quad \delta(t) \geqslant 0,\\ \lim_{t\to+\infty}\left(\gamma(t) + \delta(t) + \frac{\delta(t) + \delta(t)A(t)}{\alpha(t)}\right) = 0,\\ \lim_{t\to+\infty}\big(\delta(t)A(t) + \gamma(t)A(t)\big) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{|\alpha'(t)| + |A'(t)|}{\alpha^2(t)\gamma(t)} + \frac{|\gamma'(t)|}{\alpha(t)\gamma^2(t)}\right) = 0.\end{gathered} \tag{27}$$

Тогда

$$\lim_{t\to+\infty}||v(t) - v_*|| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty}||\dot v(t)|| = 0, \tag{28}$$

где v_* *— нормальное решение задачи* (2), *причем сходимость в* (28) *равномерная относительно выбора* $\nabla_w\Phi(v, w, t)$ *и* $P'(w, t)$ *из* (6).

В качестве параметров $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $A(t)$, удовлетворяющих условиям (12) и (27), можно взять, например,

$$\alpha(t) = (1+t)^{-\alpha}, \quad \gamma(t) = (1+t)^{-\gamma}, \quad \delta(t) = (1+t)^{-\mu}, \quad A(t) = (1+t)^{A},$$

где α, γ, μ, $A > 0$, $A + 2\alpha + \gamma < 1$, $A < \min\{\gamma, \mu\}$, $\alpha < A^{\frac{\eta}{p-\eta}}$ (при $p = \eta$ последнее условие не нужно).

Доказательство. Уравнения метода (7) с учетом (8) запишем в равносильном виде:

$$\left\langle G\big(v(t)\big)\Big[\dot v(t) + \gamma(t)G^{-1}\big(v(t)\big)\Big(\nabla_w\Phi\big(u(t), u(t), t\big) + A(t)P'\big(u(t), t\big) + \alpha(t)u(t)\Big)\Big], w - \dot v(t) - v(t)\right\rangle \geqslant 0,$$

$$\left\langle G\big(v(t)\big)\Big[u(t) - v(t) + \gamma(t)G^{-1}\big(v(t)\big)\Big(\nabla_w\Phi\big(v(t), v(t), t\big) + A(t)P'\big(v(t), t\big) + \alpha(t)v(t)\Big)\Big], w - u(t)\right\rangle \geqslant 0 \quad \forall w \in W_0.$$

Подставим вместо w в первое из этих неравенств точку v_τ — решение задачи (9) при $t = \tau$, а во второе — точку $\dot v(t) + v(t)$. Это можно сделать, так как $v_\tau \in W_0$ $\forall\tau$, $\dot v(t) + v(t) \in W_0$ $\forall t$. Далее для краткости записи будем опускать аргумент t у функций $\dot v(t)$, $v(t)$, $u(t)$. Получим

$$\Big\langle G(v)\dot v + \gamma(t)\big(\nabla_w\Phi(u, u, t) + A(t)P'(u, t) + \alpha(t)u\big),\ \dot v + v - v_\tau\Big\rangle \leqslant 0, \tag{29}$$

$$\Big\langle G(v)(u - v) + \gamma(t)\big(\nabla_w\Phi(v, v, t) + A(t)P'(v, t) + \alpha(t)v\big),\ u - \dot v - v\Big\rangle \leqslant 0. \tag{30}$$

Сложим эти два неравенства:

$$\begin{gathered}\langle G(v)\dot v,\ \dot v\rangle + \langle G(v)\dot v,\ v - v_\tau\rangle + \langle G(v)(u - v),\ u - v\rangle - \langle G(v)(u - v),\ \dot v\rangle +\\ + \gamma(t)\Big\langle\big(\nabla_w\Phi(u, u, t) - \nabla_w\Phi(v, v, t)\big) + A(t)\big(P'(u, t) - P'(v, t)\big) + \alpha(t)(u - v),\ \dot v + v - u\Big\rangle +\\ + \gamma(t)\langle\nabla_w\Phi(u, u, t) + A(t)P'(u, t) + \alpha(t)u,\ u - v_\tau\rangle \leqslant 0.\end{gathered} \tag{31}$$

Из того, что v_τ является решением задачи (9) при $t = \tau$, следует

$$\langle\nabla_w\Phi(v_\tau, v_\tau) + A(\tau)P'(v_\tau) + \alpha(\tau)v_\tau,\ w - v_\tau\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, w \in W_0.$$

Умножим это неравенство на $-\gamma(t) < 0$ и подставим вместо w точку $u(t) \in W_0$. Будем иметь

$$-\gamma(t)\langle\nabla_w\Phi(v_\tau, v_\tau) + A(\tau)P'(v_\tau) + \alpha(\tau)v_\tau,\ u(t) - v_\tau\rangle \leqslant 0 \quad \forall\, t,\ \tau > 0. \tag{32}$$

Сложим это неравенство с (31). Получим

$$\begin{gathered}\langle G(v)\dot v,\ \dot v\rangle + \langle G(v)\dot v,\ v - v_\tau\rangle + \langle G(v)(u - v),\ u - v\rangle - \langle G(v)(u - v),\ \dot v\rangle +\\ + \gamma(t)\langle\nabla_w\Phi(u, u, t) - \nabla_w\Phi(v, v, t),\ \dot v + v - u\rangle + \gamma(t)A(t)\langle P'(u, t) - P'(v, t),\ \dot v + v - u\rangle +\\ + \gamma(t)\langle\nabla_w\Phi(u, u, t) - \nabla_w\Phi(u, u),\ u - v_\tau\rangle + \gamma(t)\langle\nabla_w\Phi(u, u) - \nabla_w\Phi(v_\tau, v_\tau),\ u - v_\tau\rangle +\\ + \alpha(t)\gamma(t)\langle u - v,\ \dot v + v - u\rangle + \gamma(t)A(t)\langle P'(u, t) - P'(u),\ u - v_\tau\rangle +\\ + \gamma(t)\langle A(t)P'(u) - A(\tau)P'(v_\tau),\ u - v_\tau\rangle + \gamma(t)\langle\alpha(t)u - \alpha(\tau)v_\tau,\ u - v_\tau\rangle \leqslant 0 \quad \forall\, t,\ \tau > 0.\end{gathered} \tag{33}$$

Из (10) и выпуклости функций $\Phi(v,w)$ и $P(w)$ по w следует [5, с. 162], что

$$\big\langle \nabla_w\Phi(u,u)-\nabla_w\Phi(v_\tau,v_\tau),\,u-v_\tau\big\rangle \geqslant 0,\quad \big\langle P'(u)-P'(v_\tau),\,u-v_\tau\big\rangle \geqslant 0. \tag{34}$$

Тогда с учетом $A(t)>0$ имеем

$$\begin{gathered}\big\langle A(t)P'(u)-A(\tau)P'(v_\tau),\,u-v_\tau\big\rangle = A(t)\big\langle P'(u)-P'(v_\tau),\,u-v_\tau\big\rangle+\big(A(t)-A(\tau)\big)\big\langle P'(v_\tau),\,u-v_\tau)\big\rangle \geqslant \\ \geqslant \big(A(t)-A(\tau)\big)\big\langle P'(v_\tau),\,u-v_\tau)\big\rangle.\end{gathered} \tag{35}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}&\big\langle \alpha(t)u-\alpha(\tau)v_\tau,\,u-v_\tau\big\rangle = \alpha(t)||u-v_\tau||^2+\big(\alpha(t)-\alpha(\tau)\big)\langle v_\tau,\,u-v_\tau\rangle = \\ &\quad = \alpha(t)||u-v||^2+2\alpha(t)\langle u-v,\,v-v_\tau\rangle+\alpha(t)||v-v_\tau||^2+\big(\alpha(t)-\alpha(\tau)\big)\langle v_\tau,\,u-v_\tau\rangle.\end{aligned} \tag{36}$$

С учетом (34)–(36) из (33) получаем

$$\begin{aligned}&\big\langle G(v)\dot v,\,\dot v\big\rangle+\big\langle G(v)\dot v,\,v-v_\tau\big\rangle+\big\langle G(v)(u-v),\,u-v\big\rangle-\big\langle G(v)(u-v),\,\dot v\big\rangle+ \\ &\quad+\gamma(t)\big\langle \nabla_w\Phi(u,u,t)-\nabla_w\Phi(v,v,t),\,\dot v+v-u\big\rangle+\gamma(t)A(t)\big\langle P'(u,t)-P'(v,t),\,\dot v+v-u\big\rangle+ \\ &\quad+\gamma(t)\big\langle \nabla_w\Phi(u,u,t)-\nabla_w\Phi(u,u),\,u-v_\tau\big\rangle+\gamma(t)A(t)\big\langle P'(u,t)-P'(u),\,u-v_\tau\big\rangle+ \\ &\quad+\alpha(t)\gamma(t)\big\langle u-v,\,\dot v+v-u\big\rangle+\gamma(t)\big(A(t)-A(\tau)\big)\big\langle P'(v_\tau),\,u-v_\tau\big\rangle+ \\ &\quad+\gamma(t)\big(\alpha(t)-\alpha(\tau)\big)\langle v_\tau,\,u-v_\tau\rangle+\alpha(t)\gamma(t)||u-v||^2+2\alpha(t)\gamma(t)\langle u-v,\,v-v_\tau\rangle+ \\ &\quad+\alpha(t)\gamma(t)||v-v_\tau||^2\leqslant 0\quad \forall\, t,\,\tau>0.\end{aligned} \tag{37}$$

Заметим, что

$$\alpha(t)\gamma(t)\langle u-v,\,\dot v+v-u\rangle+\alpha(t)\gamma(t)||u-v||^2=\alpha(t)\gamma(t)\langle \dot v,\,u-v\rangle$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned}&\big\langle G(v)\dot v,\,\dot v\big\rangle+\big\langle G(v)(u-v),\,u-v\big\rangle-\big\langle G(v)(u-v),\,\dot v\big\rangle = \\ &\quad=\frac12\big\langle G(v)\dot v,\,\dot v\big\rangle+\frac12\big\langle G(v)(u-v),\,u-v\big\rangle+\frac12\big\langle G(v)(u-v-\dot v),\,u-v-\dot v\big\rangle\geqslant \\ &\quad\geqslant\frac12\big\langle G(v)\dot v,\,\dot v\big\rangle+\frac12\big\langle G(v)(u-v),\,u-v\big\rangle\geqslant\frac m2\,||\dot v||^2+\frac m2\,||u-v||^2\end{aligned}$$

в силу условия (26). Отсюда и из (37) следует, что для всех $t,\,\tau>0$

$$\begin{aligned}&\frac m2\,||\dot v||^2+\frac m2\,||u-v||^2+\big\langle G(v)\dot v,\,v-v_\tau\big\rangle+\alpha(t)\gamma(t)||v-v_\tau||^2\leqslant \\ &\quad\leqslant\gamma(t)\Big\langle \nabla_w\Phi(u,u,t)-\nabla_w\Phi(v,v,t)+A(t)\big(P'(u,t)-P'(v,t)\big),\,u-\dot v-v\Big\rangle+ \\ &\quad+\gamma(t)\Big\langle \nabla_w\Phi(u,u,t)-\nabla_w\Phi(u,u)+A(t)\big(P'(u,t)-P'(u)\big),\,v_\tau-u\Big\rangle+\alpha(t)\gamma(t)\langle \dot v,v-u\rangle+ \\ &\quad+2\alpha(t)\gamma(t)\langle v-u,\,v-v_\tau\rangle+\gamma(t)\big(A(t)-A(\tau)\big)\big\langle P'(v_\tau),\,v_\tau-u\big\rangle+\gamma(t)\big(\alpha(t)-\alpha(\tau)\big)\langle v_\tau,\,v_\tau-u\rangle.\end{aligned} \tag{38}$$

Далее, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, элементарными неравенствами

$$2ab\leqslant\varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2,\quad \varepsilon>0,\quad (a_1+\cdots+a_m)^2\leqslant m(a_1+\cdots+a_m)^2,$$

а также условиями теоремы 2, оценим слагаемые из правой части (38). Предварительно заметим, что в силу условий (6), (24) и (25), а также оценки $||v_\tau||\leqslant\sup\limits_{t\geqslant0}R(t)=R$, вытекающей из (13), следует, что

$$\begin{aligned}&\big|\big|\nabla_w\Phi(u,u,t)-\nabla_w\Phi(v,v,t)\big|\big|\leqslant \\ &\quad\leqslant\big|\big|\nabla_w\Phi(u,u,t)-\nabla_w\Phi(u,u)\big|\big|+\big|\big|\nabla_w\Phi(u,u)-\nabla_w\Phi(v,v)\big|\big|+\big|\big|\nabla_w\Phi(v,v)-\nabla_w\Phi(v,v,t)\big|\big|\leqslant \\ &\quad\leqslant\delta(t)\big(1+||u||\big)+L||u-v||+\delta(t)\big(1+||v||\big)\leqslant \\ &\quad\leqslant\delta(t)\big(2+||u-v||+||v-v_\tau||+||v_\tau||+||v-v_\tau||+||v_\tau||\big)+L||u-v||\leqslant \\ &\quad\leqslant 2\,\delta(t)\big(||u-v||+||v-v_\tau||+R+1\big)+L||u-v||.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\big|\big|P'(v,t)-P'(u,t)\big|\big| \leqslant 2\,\delta(t)\big(||u-v||+||v-v_\tau||+R+1\big)+L||u-v||.$$

Тогда для первого слагаемого из (38) имеем

$$\begin{aligned}&\gamma(t)\Big\langle \nabla_w\Phi(u,u,t)-\nabla_w\Phi(v,v,t)+A(t)\big(P'(u,t)-P'(v,t)\big),\, u-\dot v-v\Big\rangle \leqslant\\ &\quad\leqslant \big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\Big[2\,\delta(t)\big(||u-v||+||v-v_\tau||+R+1\big)+L||u-v||\Big]\big(||u-v||+||\dot v||\big)\leqslant\\ &\quad\leqslant C\big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\delta(t)\big(||u-v||^2+||v-v_\tau||^2+(1+R)^2+||\dot v||^2\big)+\\ &\quad\quad+C\big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\big(||u-v||^2+||\dot v||^2\big)\quad \forall\, t,\,\tau>0.\end{aligned}\tag{39}$$

В (39) и ниже через C будем обозначать константы, явный вид которых нам неважен. Подчеркнем, что они могут зависеть только от L, m, M, R, но не от u, v, v_τ, $\dot v$, t. Для второго слагаемого справедлива аналогичная оценка:

$$\begin{aligned}&\gamma(t)\Big\langle \nabla_w\Phi(u,u,t)-\nabla_w\Phi(u,u)+A(t)\big(P'(u,t)-P'(u)\big), v_\tau-u\Big\rangle\leqslant\\ &\quad\leqslant \big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\,\delta(t)\,\big(1+||u||\big)||v_\tau-u||\leqslant\\ &\quad\leqslant \big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\,\delta(t)\,\big(1+||u-v||+||v-v_\tau||+||v_\tau||\big)\big(||v_\tau-v||+||v-u||\big)\leqslant\\ &\quad\leqslant C\big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\,\delta(t)\,\big(||u-v||^2+||v-v_\tau||^2+(1+R)^2\big)\quad\forall\, t,\,\tau>0.\end{aligned}\tag{40}$$

Третье слагаемое из правой части (38) оценивается так:

$$\alpha(t)\gamma(t)\langle\dot v, v-u\rangle\leqslant\frac12\,\alpha(t)\gamma(t)||\dot v||^2+\frac12\,\alpha(t)\gamma(t)||u-v||^2\quad\forall\, t,\,\tau>0.\tag{41}$$

Оценка для четвертого слагаемого имеет вид

$$2\alpha(t)\gamma(t)\langle u-v, v_\tau-v\rangle\leqslant 2\alpha(t)\gamma(t)||u-v||^2+\frac12\,\alpha(t)\gamma(t)||v-v_\tau||^2\quad\forall\, t,\,\tau>0.\tag{42}$$

Для оценки пятого слагаемого заметим, что $\big|\big|P'(v_\tau)\big|\big|\leqslant\sup\limits_{||w||\leqslant R}\big|\big|P'(w)\big|\big|\leqslant R_1$ в силу (13), поэтому для всех $\forall t$, $\tau>0$ имеем

$$\begin{aligned}&\gamma(t)\big(A(t)-A(\tau)\big)\big\langle P'(v_\tau),\, v_\tau-u\big\rangle\leqslant\gamma(t)\big|A(t)-A(\tau)\big|R_1||v_\tau-u||=\\ &\quad=\gamma(t)\left(\sqrt{\frac{\alpha(t)}{8}}\,||v_\tau-u||\right)\left(\frac{\big|A(t)-A(\tau)\big|}{\sqrt{\dfrac{\alpha(t)}{8}}}R_1\right)\leqslant\\ &\quad\leqslant\frac{\alpha(t)\gamma(t)}{16}\,\big(||v_\tau-v||+||v-u||\big)^2+\gamma(t)\,\frac{\big|A(t)-A(\tau)\big|^2}{\alpha(t)}\,4R_1^2\leqslant\\ &\quad\leqslant\frac{\alpha(t)\gamma(t)}{8}\,\big(||v_\tau-v||^2+||v-u||^2\big)+\gamma(t)\,\frac{\big(A(t)-A(\tau)\big)^2}{\alpha(t)}\,4R_1^2.\end{aligned}\tag{43}$$

Аналогично для шестого слагаемого выведем оценку

$$\gamma(t)\big(\alpha(t)-\alpha(\tau)\big)\langle v_\tau, v_\tau-u\rangle\leqslant\frac{\alpha(t)\gamma(t)}{8}\,\big(||v_\tau-v||^2+||v-u||^2\big)+\gamma(t)\,\frac{\big(\alpha(t)-\alpha(\tau)\big)^2}{\alpha(t)}\,4R^2\quad\forall\, t,\,\tau>0.\tag{44}$$

С учетом оценок (39) – (44) из (38) получим для всех t, $\tau>0$

$$\begin{aligned}&\frac12\,\Big(m-\alpha(t)\gamma(t)-C\gamma(t)\big(\delta(t)+A(t)\delta(t)\big)\Big)||\dot v||^2+\big\langle G(v)\dot v,\, v-v_\tau\big\rangle+\\ &\quad+\alpha(t)\gamma(t)\left(\frac14-2C\,\frac{\delta(t)+A(t)\delta(t)}{\alpha(t)}\right)||v-v_\tau||^2+\\ &\quad+\left(\frac m2-2C\big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\big(\delta(t)+1\big)-\frac{11}{4}\,\alpha(t)\gamma(t)\right)||u-v||^2\leqslant\\ &\quad\leqslant 2C(1+R)^2\big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\delta(t)+\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\,\big(\alpha(t)-\alpha(\tau)\big)^2 4R^2+\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\,\big(A(t)-A(\tau)\big)^2 4R_1^2.\end{aligned}\tag{45}$$

В силу условий (12), (27) коэффициенты при $||u-v||^2$, $||\dot v||^2$, $||v-v_\tau||^2$ в (45) будут положительными при всех достаточно больших t, т.е.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(m-\alpha(t)\gamma(t)-C\gamma(t)\big(\delta(t)+A(t)\delta(t)\big)\Big)\geqslant\frac{m}{4}\quad\forall\, t\geqslant t_0,\\
&\frac{1}{4}-2C\,\frac{\delta(t)+A(t)\delta(t)}{\alpha(t)}\geqslant\frac{1}{8}\quad\forall\, t\geqslant t_0,\\
&\frac{m}{2}-2C\big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\big(\delta(t)+1\big)-\frac{11}{4}\,\alpha(t)\gamma(t)\geqslant\frac{m}{4}\quad\forall\, t\geqslant t_0.
\end{aligned}\tag{46}$$

Из (45), (46) следует

$$\begin{aligned}
&\big\langle G(v)\dot v,\, v-v_\tau\big\rangle+\frac{1}{8}\,\alpha(t)\gamma(t)||v-v_\tau||^2\leqslant\\
&\qquad\leqslant f(t,\tau)=C\bigg[\gamma(t)\big(\delta(t)+A(t)\delta(t)\big)+\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\big(\alpha(t)-\alpha(\tau)\big)^2+\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\big(A(t)-A(\tau)\big)^2\bigg]\quad\forall\, t,\,\tau>t_0.
\end{aligned}\tag{47}$$

Согласно условию 3 теоремы 2, существует такая функция $\Psi(v)$, что $\Psi''(v)=G(v)$ и выполнены условия (26). Введем функцию

$$\Theta(t,\tau)=\Psi(v_\tau)-\Psi\big(v(t)\big)+\Big\langle\Psi'\big(v(t)\big),\, v(t)-v_\tau\Big\rangle.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\Theta(t,\tau)&=\int_0^1\Big\langle\Psi'\Big(v(t)+\xi\big(v_\tau-v(t)\big)\Big),\, v_\tau-v(t)\Big\rangle\,d\xi-\int_0^1\Big\langle\Psi'\big(v(t)\big),\, v_\tau-v(t)\Big\rangle\,d\xi=\\
&=\int_0^1\int_0^1\Big\langle\Psi''\Big(v(t)+\xi\mu\big(v_\tau-v(t)\big)\Big)\xi\big(v_\tau-v(t)\big)\,d\mu,\, v_\tau-v(t)\Big\rangle\,d\xi.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (26) следует

$$\frac{m}{2}\,\big|\big|v(t)-v_\tau\big|\big|^2\leqslant\Theta(t,\tau)\leqslant\frac{M}{2}\,\big|\big|v(t)-v_\tau\big|\big|^2;$$

$$\Theta_t(t,\tau)=\Big\langle\Psi''\big(v(t)\big),\, v(t)-v_\tau\Big\rangle=\Big\langle G\big(v(t)\big)\dot v(t),\, v(t)-v_\tau\Big\rangle\quad\forall\, t,\,\tau\geqslant 0.$$

Умножим неравенство (47) на функцию $h(t)=\exp\Big(b\int_0^t\alpha(s)\gamma(s)ds\Big)>0$, где $b>0$ выбирается из условия $Mb<\dfrac{1}{4}$, и проинтегрируем на произвольно выбранном отрезке $[\xi,t]$, $t_0\leqslant\xi<t$. Получим

$$\int_\xi^t\frac{1}{8}\,\alpha(s)\gamma(s)\big|\big|v(s)-v_\tau\big|\big|^2h(s)\,ds+\int_\xi^t h(s)\Theta_t(s,\tau)\,ds\leqslant\int_\xi^t f(s,\tau)h(s)\,ds\quad\forall\, t,\,\tau\geqslant t_0.\tag{48}$$

Воспользуемся тем, что $h'(s)=b\,\alpha(s)\gamma(s)h(s)>0$, поэтому

$$\begin{aligned}
&\int_\xi^t h(s)\Theta_t(s,\tau)\,ds=h(s)\Theta(s,\tau)\Big|_{s=\xi}^{s=t}-\int_\xi^t h'(s)\Theta(s,\tau)\,ds\geqslant\\
&\qquad\geqslant\frac{m}{2}\,h(t)\big|\big|v(t)-v_\tau\big|\big|^2-\frac{M}{2}\,h(\xi)\big|\big|v(\xi)-v_\tau\big|\big|^2-\int_\xi^t\frac{M}{2}\,b\,\alpha(s)\gamma(s)h(s)\big|\big|v(s)-v_\tau\big|\big|^2\,ds.
\end{aligned}\tag{49}$$

Тогда из (48) для любых $t,\,\tau\geqslant t_0$ и $t_0\leqslant\xi<t$ следует неравенство

$$\frac{m}{2}\,h(t)\big|\big|v(t)-v_\tau\big|\big|^2+\int_\xi^t\alpha(s)\gamma(s)h(s)\bigg(\frac{1}{8}-\frac{Mb}{2}\bigg)\big|\big|v(s)-v_\tau\big|\big|^2\,ds\leqslant\int_\xi^t f(s,\tau)h(s)\,ds+M\Big(\big|\big|v(\xi)\big|\big|^2+R^2\Big)h(\xi),$$

или, поскольку $Mb < \dfrac{1}{4}$,

$$\frac{m}{2}\,h(t)\big|\big|v(t)-v_\tau\big|\big|^2 \leqslant \int\limits_\xi^t f(s,\tau)h(s)\,ds + c_1(\xi) \quad \forall\, t,\,\tau \geqslant t_0, \quad t_0 \leqslant \xi < t. \tag{50}$$

Из выпуклости и монотонного убывания $\alpha(t)$ следует $0 \leqslant \alpha(s)-\alpha(t) \leqslant \alpha'(s)(s-t)$, из вогнутости и монотонного возрастания $A(t)$ имеем $0 \leqslant A(t)-A(s) \leqslant A'(s)(t-s)\ \forall\, s,t,\, t \geqslant s$. Поэтому из определения (47) функции $f(t,\tau)$ и из (50) получаем, что для всех $t_0 \leqslant \xi < t$, $\tau \geqslant t_0$

$$\big|\big|v(t)-v_\tau\big|\big|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2C}{mh(t)}\int\limits_\xi^t \Big(\gamma(s)\big(\delta(s)+A(s)\delta(s)\big)+\frac{\gamma(s)}{\alpha(s)}\Big(\big(A'(s)\big)^2+\big(\alpha'(s)\big)^2\Big)(t-s)^2\Big)h(s)\,ds+\frac{2c_1(\xi)}{mh(t)}.$$

Положим в этом неравенстве $\tau = t$. Тогда для всех $t_0 \leqslant \xi < t$

$$\big|\big|v(t)-v_t\big|\big|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2C}{mh(t)}\int\limits_\xi^t \Big(\gamma(s)\big(\delta(s)+A(s)\delta(s)\big)+\frac{\gamma(s)}{\alpha(s)}\,\Big(\big(A'(s)\big)^2+\big(\alpha'(s)\big)^2\Big)(t-s)^2\Big)h(s)\,ds+\frac{2c_1(\xi)}{mh(t)}. \tag{51}$$

Совершим в неравенстве (51) предельный переход при $t \to +\infty$, воспользовавшись следующими двумя леммами [5, с. 700, 701].

Лемма 2. *Пусть функция $f(t) \in C^1[0;+\infty)$ такова, что $f(t) > 0$, $f'(t) \leqslant 0\ \forall t > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f'(t)}{f^2(t)} = 0$. Тогда*

$$\int\limits_0^{+\infty} f(s)\,ds = +\infty, \quad \lim_{t\to\infty} f^n(t)\exp\Big(\int\limits_0^t f(s)ds\Big) = +\infty \quad \forall\, n = 0,1,2,\dots\,.$$

Лемма 3. *Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1, $b > 0$ и $g(t) = \exp\Big(b\int\limits_0^t f(s)\,ds\Big)$. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{d}{dt}\Big(f^n(t)g(t)\Big)}{f^{n+1}(t)g(t)} = b \quad \forall\, n = 0,1,2,\dots\,.$$

Положим $f(t) = \alpha(t)\gamma(t)$. Из условий (12), (27) вытекает, что

$$f'(t) = \alpha'(t)\gamma(t)+\alpha(t)\gamma'(t) \leqslant 0, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{f'(t)}{f^2(t)} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)\gamma(t)}+\frac{\gamma'(t)}{\alpha(t)\gamma^2(t)}\right) = 0.$$

Тогда по лемме 2 $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = +\infty$; по лемме 3 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\alpha^{n+1}(t)\gamma^{n+1}(t)h(t)}{\dfrac{d}{dt}\Big(\alpha^n(t)\gamma^n(t)h(t)\Big)} = \dfrac{1}{b}$. С учетом этого, пользуясь классическим правилом Лопиталя, из (51) получаем:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{h(t)}\int\limits_\xi^t\Big(\gamma(s)\big(\delta(s)+A(s)\delta(s)\big)\Big)h(s)\,ds = \lim_{t\to\infty}\frac{\gamma(t)\big(\delta(t)+A(t)\delta(t)\big)h(t)}{h'(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\delta(t)+A(t)\delta(t)}{b\,\alpha(t)} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{h(t)}\int\limits_{\xi}^{t}\frac{\gamma(s)}{\alpha(s)}\Big(\big(A'(s)\big)^2+\big(\alpha'(s)\big)^2\Big)(t-s)^2h(s)\,ds=\lim_{t\to\infty}\frac{\displaystyle\int\limits_{\xi}^{t}\frac{\gamma(s)}{\alpha(s)}\Big(\big(A'(s)\big)^2+\big(\alpha'(s)\big)^2\Big)2(t-s)h(s)\,ds}{b\,\alpha(t)\gamma(t)h(t)}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\displaystyle\int\limits_{\xi}^{t}\frac{2\gamma(s)}{\alpha(s)}\Big(\big(A'(s)\big)^2+\big(\alpha'(s)\big)^2\Big)h(s)\,ds}{b\,\big(\alpha(t)\gamma(t)\big)^2h(t)}\times\frac{\big(\alpha(t)\gamma(t)\big)^2h(t)}{\dfrac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\gamma(t)h(t)\Big)}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\,2\Big(\big(A'(t)\big)^2+\big(\alpha'(t)\big)^2\Big)\,h(t)}{b^2\big(\alpha(t)\gamma(t)\big)^3h(t)}\times\frac{\big(\alpha(t)\gamma(t)\big)^3h(t)}{\dfrac{d}{dt}\Big(\big(\alpha(t)\gamma(t)\big)^2h(t)\Big)}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{b^3}\left(\left(\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)\gamma(t)}\right)^2+\left(\frac{A'(t)}{\alpha^2(t)\gamma(t)}\right)^2\right)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{c_1(\xi)}{h(t)}=0.$$

Из этого следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\big|\big|v(t)-v_t\big|\big|=0$. Отсюда и из (15) мы получаем, что и $\lim\limits_{t\to\infty}\big|\big|v(t)-v_*\big|\big|=0$.

Для доказательства второго равенства (28) вернемся к неравенству (45) и рассмотрим его при $t>t_0$, $\tau=t$. С учетом (46) имеем

$$\frac{m}{4}\,\big|\big|\dot v(t)\big|\big|^2\leqslant-\Big\langle G\big(v(t)\big)\dot v(t),\,v(t)-v_t\Big\rangle+C\big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\,\delta(t)\quad\forall\,t\geqslant t_0.$$

Воспользуемся тем, что

$$-\Big\langle G\big(v(t)\big)\dot v(t),\,v(t)-v_t\Big\rangle\leqslant\big|\big|\dot v(t)\big|\big|\,\Big|\Big|G\big(v(t)\big)\big(v(t)-v_t\big)\Big|\Big|\leqslant\frac{m}{8}\,\big|\big|\dot v(t)\big|\big|^2+\frac{2}{m}\,\Big|\Big|G\big(v(t)\big)\big(v(t)-v_t\big)\Big|\Big|^2.$$

Получаем

$$\frac{m}{8}\,\big|\big|\dot v(t)\big|\big|^2\leqslant C_1\big(\gamma(t)+A(t)\gamma(t)\big)\delta(t)+\frac{2}{m}\Big|\Big|G\big(v(t)\big)\big(v(t)-v_t\big)\Big|\Big|^2.$$

Поскольку

$$\lim_{t\to\infty}\big|\big|v(t)-v_t\big|\big|^2=0,\qquad\Big|\Big|G\big(v(t)\big)\Big|\Big|\leqslant M\quad\forall\,t>0,$$

то из последнего неравенства следует

$$0\leqslant\varliminf_{t\to\infty}\,\big|\big|\dot v(t)\big|\big|^2\leqslant\varlimsup_{t\to\infty}\,\big|\big|\dot v(t)\big|\big|\leqslant 0\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\,\big|\big|\dot v(t)\big|\big|=0.$$

Равномерность сходимости в (28) относительно выбора $\nabla_w\Phi(v,v,t)$ и $P'(w,t)$ из (6) следует из того, что коэффициенты в (45) и в последующих неравенствах, использованных при доказательстве (28) не зависят от конкретной реализации $\nabla_w\Phi(v,v,t)$ и $P'(w,t)$. Теорема 2 доказана.

2. На практике вместо условий (6) с $\delta(t)\to0$ вероятнее всего можно ожидать, что известны приближения $\nabla_w^\delta\Phi(v,v)$ и $P'_\delta(v)$ частных градиентов функций $\Phi(v,v)$ и $P(v)$, удовлетворяющие условиям

$$\big|\big|P'_\delta(v)-P'(v)\big|\big|\leqslant\delta\big(1+||v||\big),\quad\big|\big|\nabla_w^\delta\Phi(v,v)-\nabla_w\Phi(v,v)\big|\big|\leqslant\delta\big(1+||v||\big),\quad v\in E^n,\tag{52}$$

где $\delta>0$ — фиксированное число. Тогда можем рассмотреть процесс

$$\begin{aligned}\dot v(t)+v(t)&=\pi_{W_0}^{G(v(t))}\Big[v(t)-\gamma(t)G^{-1}\big(v(t)\big)\Big(\nabla_w^\delta\Phi\big(u(t),u(t)\big)+A(t)P'_\delta\big(u(t)\big)+\alpha(t)u(t)\Big)\Big],\\ u(t)&=\pi_{W_0}^{G(v(t))}\Big[v(t)-\gamma(t)G^{-1}\big(v(t)\big)\Big(\nabla_w^\delta\Phi\big(v(t),v(t)\big)+A(t)P'_\delta\big(u(t)\big)+\alpha(t)v(t)\Big)\Big],\\ v(0)&=v_0,\quad t\geqslant0,\end{aligned}\tag{53}$$

который получается из (7) при замене $\nabla_w\Phi(v,v,t)$ и $P'(v,t)$ на $\nabla_w^\delta\Phi(v,v)$ и $P'_\delta(v)$ соответственно.

Предположим, что $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, удовлетворяющие условиям теоремы 2, фиксированы и $\delta(0) > \delta$. При любом фиксированном $\delta : 0 < \delta < \delta(0)$ процесс (53) будем продолжать до момента $t = t(\delta)$, определяемого условием

$$t(\delta) = \sup\bigl\{t\colon \delta(s) > \delta;\ 0 \leqslant s \leqslant t\bigr\}. \tag{54}$$

Поскольку $\delta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\delta(0) > \delta$, то момент $t(\delta)$ конечен для всех $\delta > 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2 *кроме пункта* 2; *приближения* $\nabla_w^\delta \Phi(v, v)$ *и* $P'_\delta(v)$ *удовлетворяют* (52); $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t(\delta)$ *— траектория процесса* (53), *где момент* $t(\delta)$ *определяется из* (54). *Тогда* $\lim\limits_{\delta\to 0} \Bigl|\Bigl|v\bigl(t(\delta)\bigr) - v_*\Bigr|\Bigr| = 0$.

Доказательство. Из (52) и (54) следует, что для всех $v \in E^n$ и $0 \leqslant t \leqslant t(\delta)$

$$\bigl|\bigl|\nabla_w^\delta \Phi(v, v) - \nabla_w \Phi(v, v)\bigr|\bigr| \leqslant \delta(t)\bigl(1 + ||v||\bigr), \quad \bigl|\bigl|P'_\delta(v) - P'(v)\bigr|\bigr| \leqslant \delta(t)\bigl(1 + ||v||\bigr),$$

т.е. $\nabla_w^\delta \Phi(v, v)$ и $P'_\delta(v)$ удовлетворяют условию (6) для любого t, такого, что $0 \leqslant t \leqslant t(\delta)$. Согласно правилу останова (54) из $\lim\limits_{t\to +\infty} \delta(t) = 0$ следует $\lim\limits_{\delta\to 0} t(\delta) = +\infty$. Значит, при малых $\delta > 0$ момент $t(\delta)$ может быть сколь угодно большим.

По предыдущей теореме при выполнении всех ее условий траектория $v(t)$, порождаемая методом (7), сходится по норме пространства к точке v_*, т.е. для всех $\varepsilon > 0$ существует момент времени

$$T = T(\varepsilon)\colon \bigl|\bigl|v(t) - v_*\bigr|\bigr| < \varepsilon \quad \forall\, t \geqslant T(\varepsilon),$$

причем $T(\varepsilon)$ не зависит от выбора реализации $\nabla_w \Phi(v, v, t)$ и $P'(v)$. Так как $\lim\limits_{\delta\to 0} t(\delta) = +\infty$, то существует $\delta(\varepsilon) > 0\colon t(\delta) \geqslant T(\varepsilon)\ \forall \delta,\ 0 < \delta < \delta(\varepsilon)$.

Значит, для всех δ, $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$, метод (53) при $0 \leqslant t \leqslant t(\delta)$, где $t(\delta)$ берется из (54), порождает траекторию $v(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t(\delta)$, которая может быть получена также и методом (7) с $\nabla_w \Phi(v, v, t) = \nabla_w^\delta \Phi(v, v)$ и $P'(v) = P'_\delta(v)$.

Поскольку $t(\delta) > T(\varepsilon)$, то при $t = t(\delta)$ получаем

$$\Bigl|\Bigl|v\bigl(t(\delta)\bigr) - v_*\Bigr|\Bigr| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, \delta,\ 0 < \delta < \delta(\varepsilon).$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное, то отсюда следует утверждение теоремы. Теорема 3 доказана.

Из этой теоремы следует, что оператор R_δ, ставящий в соответствие набору

$$\bigl(\nabla_w^\delta \Phi(v, v), P'_\delta(v), \delta, \alpha(t), \gamma(t), \delta(t)\bigr)$$

точку $v(\delta) = v\bigl(t(\delta)\bigr)$, определяемую (53), является регуляризующим.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00931).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антипин А.С.* О дифференциальных градиентных методах прогнозного типа для вычисления неподвижных точек экстремальных отображений // Дифференц. ур-ния. 1995. **31**, № 11. 1786–1795.
2. *Антипин А.С.* О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальнах методов к неподвижным точкам экстремальных отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. **35**, № 5. 688–704.
3. *Антипин А.С.* Вычисление неподвижных точек экстремальных отображений при помощи методов градиентного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. **37**, № 1. 42–53.
4. *Антипин А.С., Будак Б.А., Васильев Ф.П.* Регуляризованный непрерывный экстраградиентный метод первого порядка с переменной метрикой для решения задач равновесного программирования // Дифференц. ур-ния. 2002. **38**, № 12. 1–9.
5. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
6. *Шпирко С.В.* Метод кососимметричной регуляризации для решения равновесных задач. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. ВЦ РАН. М., 2000.
7. *Васильев Ф.П., Антипин А.С.* Метод стабилизации для решения задач равновесного программирования с неточно заданным множеством // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. **39**, № 11. 1779–1785.

Поступила в редакцию
07.10.2002