УДК 517.988.68: 519.85

# РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

**А. С. Антипин[1], Ф. П. Васильев[2]**

В статье предлагается регуляризованный вариант экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств с неточно заданным оператором, исследуется его сходимость. Строится регуляризирующий оператор. Кратко обсуждается приложение метода к задачам оптимизации, седловым задачам, задачам равновесного программирования.

**Ключевые слова:** метод регуляризации, экстраградиентный метод, оптимизация, вариационные неравенства, регуляризирующий оператор, равновесное программирование.

**1**. Пусть $X$ — заданное выпуклое замкнутое множество из евклидова пространства $E^n$, $F(x)$ — оператор, действующий из $X$ в $E^n$. Будем рассматривать вариационное неравенство

$$\big\langle F(x), y-x\big\rangle \geqslant 0 \quad \forall y\in X. \tag{1}$$

Решением вариационного неравенства (1) называется точка $x^*$, удовлетворяющая условиям

$$x_*\in X, \quad \big\langle F(x_*), y-x_*\big\rangle \geqslant 0 \quad \forall y\in X. \tag{2}$$

Как известно, многие задачи вычислительной математики, математической физики, исследования операций, математической экономики, оптимизации могут быть записаны в форме вариационного неравенства (1), для поиска его решения (2) предложено и исследовано большое количество методов (см., например, [1 – 13]).

Задача (1) относится к некорректным (неустойчивым) задачам относительно возмущения оператора $F(X)$ и для ее решения нужно пользоваться методами регуляризации [7 – 13]. Устойчивые методы решения задачи (1) при неточно заданном операторе $F(x)$ могут быть получены из известных методов на основе принципа итеративной регуляризации, разработанного в [7, 8, 10 – 13]. В настоящей работе в качестве базового метода берется итеративный метод

$$\bar x_k = \pi_X\big(x_k - \beta_k F(x_k)\big), \quad x_{k+1} = \pi_X\big(x_k - \beta_k F(\bar x_k)\big), \tag{3}$$

где $\beta_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$, $\pi_X(z)$ — проекция точки $z \in E^n$ на множество $X$. Различные варианты метода (3) рассматривались в [14 – 16] применительно к задачам равновесного программирования, и этот метод получил название экстраполяционного градиентного метода, или, короче, экстраградиентного метода. Такое название метода обусловлено тем, что первый полушаг метода (3), заключающийся в вычислении вспомогательного приближения $\bar x_k$, носит прогнозный (экстраполяционный) характер. Ниже предлагается и исследуется регуляризованный вариант метода, полученного из (3) на основе принципа итеративной регуляризации [7, 8, 10 – 13].

Будем считать, что вместо точного значения оператора $F(x)$ известна последовательность $\{F_k(x)\}$ его приближений, такая, что

$$\big\|F_k(x) - F(x)\big\| \leqslant \delta_k\big(1+\|x\|\big), \quad \delta_k>0, \quad k=0,1,\dots\ . \tag{4}$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$\bar x_k = \pi_X\Big(x_k - \beta_k\big(F(x_k) + \alpha_k x_k\big)\Big), \quad x_{k+1} = \pi_X\Big(x_k - \beta_k\big(F(\bar x_k) + \alpha_k \bar x_k\big)\Big), \tag{5}$$

где $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$, который является регуляризованным вариантом метода (3).

[1] Вычислительный центр РАН, ул. Вавилова, 40, 117967, Москва; email: antipin@ccas.ru

[2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: babudak@pochtamt.ru, arush@srcc.msu.su

**2**. Сформулируем требования к задаче (1) и условия согласования параметров $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\delta_k\}$ метода (5), обеспечивающие его сходимость.

**Теорема 1.** *Пусть $X$ — выпуклое замкнутое множество из $E^n$; $F(x)$ — монотонный оператор на $X$, т.е.*

$$\big\langle F(x)-F(y),x-y\big\rangle \geqslant 0 \quad \forall x,y\in X; \tag{6}$$

*выполнено условие Липшица*

$$\big\|F(x)-F(y)\big\| \leqslant L\|x-y\| \quad \forall x,y\in X; \tag{7}$$

*множество $X_*$ решений задачи* (1) *непусто*; *приближения* $\big\{F_k(x)\big\}$ *оператора* $F(x)$ *удовлетворяют условию* (4); *параметры* $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\delta_k\}$ *метода* (5) *таковы, что*

$$\begin{gathered}\alpha_k>0, \quad \beta_k>0, \quad \delta_k>0, \quad \lim_{k\to\infty}\alpha_k=\lim_{k\to\infty}\delta_k=0, \quad \sup_{k\geqslant 0}\beta_k<\frac{1}{L}\,,\\ \lim_{k\to\infty}\frac{\delta_k}{\alpha_k}=0, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_k-\alpha_{k+1}}{\alpha_k^2\beta_k}=0, \quad \sum_k^\infty\alpha_k\beta_k=+\infty.\end{gathered} \tag{8}$$

*Тогда последовательность $\{x_k\}$, порожденная методом* (5), *при любом выборе начального приближения $x_0\in X$ сходится к нормальному решению $x_*$ задачи* (2) *равномерно относительно выбора приближений $F_k(x)$ из* (4).

Как обычно [9], под нормальным решением задачи (1) здесь понимается точка $x_*\in X_*$, имеющая минимальную норму: $\|x_*\|=\inf\limits_{x\in X_*}\|x\|$. В качестве параметров $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\delta_k\}$, удовлетворяющих условиям (8), можно, например, взять $\alpha_k=(k+1)^{-\alpha}$, $\delta_k=(k+1)^{-\gamma}$, $\beta_k=\dfrac{1}{2L}$, $k=1,2,\dots$ , где $\alpha>0$, $\gamma>0$, $\alpha<\min\{1/2,\gamma\}$.

**Доказательство**. При сделанных предположениях множество $X_*$ решений задачи (1) выпукло, замкнуто и нормальное решение $x_*$ существует и определяется однозначно [7, 8]. Оператор $F(x)+\alpha x$ при каждом $\alpha>0$ сильно монотонный, т.е.

$$\Big\langle \big(F(x)+\alpha x\big)-\big(F(y)+\alpha y\big),x-y\Big\rangle \geqslant \alpha\|x-y\|^2 \quad \forall x,y\in X.$$

Вариационное неравенство

$$\big\langle F(x)+\alpha x,y-x\big\rangle \geqslant 0 \quad \forall y\in X \tag{9}$$

при каждом $\alpha>0$ имеет единственное решение $x_\alpha$ [3], причем справедливы соотношения [7, 8]

$$\|x_\alpha\|\leqslant\|x_*\|, \quad \lim_{\alpha\to 0}\|x_\alpha-x_*\|=0, \quad \|x_\alpha-x_\gamma\|=\frac{|\alpha-\gamma|}{\alpha}\,\|x_*\| \quad \forall\alpha>0, \quad \gamma>0, \tag{10}$$

где $x_*$ — нормальное решение задачи (1). Покажем, что "траектория" $\{x_k\}$ процесса (5) при $k\to\infty$ притягивается к решениям $x_\alpha$ вариационного неравенства (9) при $\alpha\to 0$, точнее

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x_{\alpha_k}\|=0. \tag{11}$$

Пользуясь характеристическим свойством проекции

$$\big\langle P_X(z)-z,x-P_X(z)\big\rangle \geqslant 0 \quad \forall x\in X, \quad \forall z\in E^n$$

(см. [10, с. 183]), перепишем метод (5) в равносильной форме:

$$\begin{aligned}&\Big\langle \bar x_k-x_k+\beta_k\big(F_k(x_k)+\alpha_k x_k\big),x-\bar x_k\Big\rangle \qquad \geqslant 0,\\ &\Big\langle x_{k+1}-x_k+\beta_k\big(F_k(\bar x_k)+\alpha_k\bar x_k\big),x-x_{k+1}\Big\rangle \geqslant 0 \quad \forall x\in X.\end{aligned} \tag{12}$$

В первом неравенстве (12) положим $x=x_{k+1}$, во втором $x=x_{\alpha_k}$ и сложим получившиеся неравенства:

$$\begin{aligned}&\langle\bar x_k-x_k,x_{k+1}-\bar x_k\rangle+\langle x_{k+1}-x_k,x_{\alpha_k}-x_{k+1}\rangle+\beta_k\big\langle F_k(x_k)-F_k(\bar x_k),x_{k+1}-\bar x_k\big\rangle+\\ &\quad+\beta_k\big\langle F_k(\bar x_k)+\alpha_k\bar x_k,x_{\alpha_k}-\bar x_k\big\rangle+\alpha_k\beta_k\langle x_k-\bar x_k,x_{k+1}-\bar x_k\rangle\geqslant 0, \quad k=1,2,\dots .\end{aligned} \tag{13}$$

Справедливо равенство

$$2\langle \bar{x}_k - x_k, x_{k+1} - \bar{x}_k\rangle + 2\langle x_{k+1} - x_k, x_{\alpha_k} - x_{k+1}\rangle = \\ = \|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 - \|x_{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 - \|x_k - \bar{x}_k\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2.$$

Отсюда и из (13) имеем:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 \leqslant \|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 - \|x_k - \bar{x}_k\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2 + \\ + 2\beta_k\big\langle F_k(x_k) - F(x_k), x_{k+1} - \bar{x}_k\big\rangle + 2\beta_k\big\langle F(x_k) - F(\bar{x}_k), x_{k+1} - \bar{x}_k\big\rangle + \\ + 2\beta_k\big\langle F(\bar{x}_k) - F_k(\bar{x}_k), x_{k+1} - \bar{x}_k\big\rangle + 2\beta_k\big\langle F_k(\bar{x}_k) - F(\bar{x}_k), x_{\alpha_k} - \bar{x}_k\big\rangle + \\ + 2\beta_k\big\langle F(\bar{x}_k) - F(x_{\alpha_k}), x_{\alpha_k} - \bar{x}_k\big\rangle + 2\beta_k\big\langle F(x_{\alpha_k}) + \alpha_k x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k} - \bar{x}_k\big\rangle + \\ + 2\alpha_k\beta_k\big(-\|x_{\alpha_k} - \bar{x}_k\|^2 + \langle x_k - \bar{x}_k, x_{k+1} - \bar{x}_k\rangle\big), \quad k = 0, 1, \ldots . \end{aligned} \tag{14}$$

Пользуясь неравенством Коши–Буняковского, элементарным неравенством $2|ab| \leqslant \varepsilon a^2 + \dfrac{b^2}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, условиями теоремы, оценим сверху некоторые слагаемые из правой части (14). Для четвертого слагаемого с учетом условия (4) и первой оценки (10) имеем

$$\begin{aligned} 2\beta_k\big\langle F_k(x_k) - F(x_k), x_{k+1} - \bar{x}_k\big\rangle \leqslant 2\beta_k\delta_k\big(1 + \|x_k\|\big)\|x_{k+1} - \bar{x}_k\| \leqslant \\ \leqslant 2\beta_k\delta_k\big(1 + \|x_k - x_{\alpha_k}\| + \|x_{\alpha_k}\|\big)\|x_{k+1} - \bar{x}_k\| \leqslant \\ \leqslant \beta_k\delta_k\Big[\big(1 + \|x_*\|\big)^2 + \|x_* - x_{\alpha_k}\|^2 + \|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2\Big]. \end{aligned} \tag{15}$$

Аналогично оцениваются шестое и седьмое слагаемые:

$$\begin{aligned} 2\beta_k\big\langle F(\bar{x}_k) - F_k(\bar{x}_k), x_{k+1} - \bar{x}_k\big\rangle \leqslant 2\beta_k\delta_k\big(1 + \|\bar{x}_k - x_k\| + \|x_k - x_{\alpha_k}\| + \|x_{\alpha_k}\|\big)\|x_{k+1} - \bar{x}_k\| \leqslant \\ \leqslant \beta_k\delta_k\Big[\big(1 + \|x_*\|\big)^2 + \|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + 3\|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2\Big], \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} 2\beta_k\big\langle F_k(\bar{x}_k) - F(\bar{x}_k), x_{\alpha_k} - \bar{x}_k\big\rangle \leqslant \\ \leqslant 2\beta_k\delta_k\big(1 + \|\bar{x}_k - x_k\| + \|x_k - x_{\alpha_k}\| + \|x_{\alpha_k}\|\big)\big(\|x_{\alpha_k} - x_k\| + \|x_k - \bar{x}_k\|\big) \leqslant \\ \leqslant \beta_k\delta_k\Big[2\big(1 + \|x_*\|\big)^2 + 5\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + 5\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2\Big]. \end{aligned} \tag{17}$$

Для оценки пятого слагаемого из правой части (14) воспользуемся условием Липшица (7):

$$2\beta_k\big\langle F(x_k) - F(\bar{x}_k), x_{k+1} - \bar{x}_k\big\rangle \leqslant 2\beta_k L\|x_k - \bar{x}_k\|\|x_{k+1} - \bar{x}_k\| \leqslant \beta_k L\big(\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2\big). \tag{18}$$

Учитывая условие (6) монотонности оператора $F(x)$, получим оценку для восьмого слагаемого:

$$2\beta_k\big\langle F(\bar{x}_k) - F(x_{\alpha_k}), x_{\alpha_k} - \bar{x}_k\big\rangle \leqslant 0. \tag{19}$$

Оценка для девятого слагаемого следует из (9) при $x = x_{\alpha_k}$, $y = \bar{x}_k$:

$$2\beta_k\big\langle F(x_{\alpha_k}) + \alpha_k x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k} - \bar{x}_k\big\rangle \leqslant 0. \tag{20}$$

Наконец, последнее слагаемое из правой части (14) оценим так:

$$\begin{aligned} 2\alpha_k\beta_k\big(-\|x_{\alpha_k} - \bar{x}_k\|^2 + \langle x_k - \bar{x}_k, x_{k+1} - \bar{x}_k\rangle\big) = \\ = 2\alpha_k\beta_k\Big(-\big\|(x_{\alpha_k} - \bar{x}_k) + (x_k - \bar{x}_k)\big\|^2 + \langle x_k - \bar{x}_k, x_{k+1} - \bar{x}_k\rangle\Big) = \\ = 2\alpha_k\beta_k\big(-\|x_{\alpha_k} - x_k\|^2 - \|x_k - \bar{x}_k\|^2 - 2\,\langle x_{\alpha_k} - x_k, x_k - \bar{x}_k\rangle + \langle x_k - \bar{x}_k, x_{k+1} - \bar{x}_k\rangle\big) \leqslant \\ \leqslant 2\alpha_k\beta_k\Big(-\|x_{\alpha_k} - x_k\|^2 - \|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \frac{1}{2}\,\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + 2\,\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \frac{1}{2}\,\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \\ + \frac{1}{2}\,\|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2\Big) = \alpha_k\beta_k\big(-\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + 3\,\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2\big). \end{aligned} \tag{21}$$

Подставим оценки (15) – (21) в (14). Получим:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 \leqslant \|x_k - x_{\alpha_k}\|^2(1 - \alpha_k\beta_k + 7\beta_k\delta_k) + \|x_k - \bar{x}_k\|^2(-1 + \beta_k L + 6\beta_k\delta_k + 3\alpha_k\beta_k) + \\ + \|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2(-1 + \beta_k L + 5\beta_k\delta_k + \alpha_k\beta_k) + 4\beta_k\delta_k(1 + \|x_*\|)^2, \quad k = 0, 1, \ldots . \end{aligned} \tag{22}$$

По условию $\sup\limits_{k\geqslant 0}\beta_k L<1$, $\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha_k+\delta_k)=0$. Следовательно, коэффициенты при $\|x_k-\bar{x}_k\|^2$, $\|x_{k+1}-\bar{x}_k\|^2$ будут неположительны при всех $k\geqslant k_0$, где $k_0$ — достаточно большое число. Поэтому из (22) следует

$$\|x_{k+1}-x_{\alpha_k}\|^2\leqslant\|x_k-x_{\alpha_k}\|^2(1-\alpha_k\beta_k+7\beta_k\delta_k)+4\beta_k\delta_k(1+\|x_*\|)^2\quad\forall k\geqslant k_0. \tag{23}$$

Положим $b_k=\|x_k-x_{\alpha_k}\|$, $k=0,1,\ldots$. Тогда

$$b_{k+1}=\|x_{k+1}-x_{\alpha_{k+1}}\|\leqslant\|x_{k+1}-x_{\alpha_k}\|+\|x_{\alpha_k}-x_{\alpha_{k+1}}\|.$$

Первое слагаемое из правой части этого неравенства оценим с помощью (23), второе слагаемое — с помощью последнего неравенства (10) при $\alpha=\alpha_k$, $\gamma=\alpha_{k+1}$. Получим

$$0\leqslant b_{k+1}\leqslant\Big[b_k^2(1-\alpha_k\beta_k+7\beta_k\delta_k)+4\beta_k\delta_k\big(1+\|x_*\|\big)^2\Big]^{1/2}+\frac{|\alpha_k-\alpha_{k+1}|}{\alpha_k}\|x_*\|\quad\forall k\geqslant k_0.$$

Возведем эти неравенства в квадрат. Пользуясь элементарным неравенством $(a+b)^2\leqslant(1+\varepsilon)\left(a^2+\dfrac{b^2}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon>0$, и считая, что $\varepsilon=\alpha_k\beta_k/2$, имеем

$$0\leqslant b_{k+1}^2\leqslant b_k^2(1-\alpha_k\beta_k+7\beta_k\delta_k)\Big(1+\frac{\alpha_k\beta_k}{2}\Big)+4\beta_k\delta_k\big(1+\|x_*\|\big)^2\Big(1+\frac{\alpha_k\beta_k}{2}\Big)+$$
$$+\frac{(\alpha_k-\alpha_{k+1})^2}{\alpha_k^2}\|x_*\|^2\frac{2}{\alpha_k\beta_k}\Big(1+\frac{\alpha_k\beta_k}{2}\Big)\quad\forall k\geqslant k_0.$$

Это неравенство кратко запишем в виде

$$0\leqslant b_{k+1}^2\leqslant b_k^2(1-s_k)+d_k,\quad k\geqslant k_0, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}s_k&=\frac{\alpha_k\beta_k}{2}\bigg(1+\alpha_k\beta_k-14\frac{\delta_k}{\alpha_k}\Big(1+\frac{\alpha_k\beta_k}{2}\Big)\bigg),\\ d_k&=\alpha_k\beta_k\bigg[4\frac{\delta_k}{\alpha_k}\big(1+\|x_*\|\big)^2\Big(1+\frac{\alpha_k\beta_k}{2}\Big)+\Big(\frac{\alpha_k-\alpha_{k+1}}{\alpha_k^2\beta_k}\Big)^2\|x_*\|^2(2+\alpha_k\beta_k)\bigg].\end{aligned} \tag{25}$$

Из условий (8) и формул (25) следует, что

$$0<s_k\leqslant 1,\quad d_k\geqslant 0\quad\forall k\geqslant k_0,\quad\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k=+\infty,\quad\lim_{k\to\infty}\frac{d_k}{s_k}=0. \tag{26}$$

Последовательность $\{b_k^2\}$, удовлетворяющая неравенствам (24) при условиях (26), стремится к нулю [10, с. 90, лемма 6]. Равенство (11) доказано. Из (10), (11) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k-x_*\|=0$. Остается заметить, что этот предел равномерен относительно выбора конкретных реализаций приближений $F_k(x)$ из (4), так как в (24) величины $s_k,d_k$, как видно из (25), не зависят от этих реализаций. Теорема 1 доказана.

**3**. В прикладных задачах исходные данные, как правило, задаются с какой-либо фиксированной погрешностью. В частности, в рассматриваемой задаче (1) вместо условия (4), где $\{\delta_k\}\to 0$, практически более реальным представляется следующее условие: вместо точного значения $F(x)$ известно его приближение $F_\delta(x)$, такое, что

$$\big\|F_\delta(x)-F(x)\big\|\leqslant\delta\big(1+\|x\|\big)\quad\forall x\in X, \tag{27}$$

где $\delta>0$ — заданное число. Тогда в методе (5) приближения $F_k(x)$ можно попытаться заменить на $F_\delta(x)$ и искать приближения $x_k=x_k(\delta)$ из условий

$$\bar{x}_k=\pi_X\Big(x_k-\beta_k\big(F_\delta(x_k)+\alpha_k x_k\big)\Big),\quad x_{k+1}=\pi_X\Big(x_k-\beta_k\big(F_\delta(\bar{x}_k)+\alpha_k\bar{x}_k\big)\Big), \tag{28}$$

где $\beta_k>0$, $k=0,1,\ldots$.

Однако при фиксированном уровне погрешности $\delta>0$ некоторые условия (8) при $\delta_k=\delta$, $k=0,1,\ldots$, заведомо будут нарушены, и мы, опираясь лишь на теорему 1, не можем гарантировать близость точек $x_k$ из (28) ко множеству $X_*$ при всех достаточно больших номерах $k$. Тем не менее, оказывается, можно сформулировать такое правило останова процесса (28) на каком-то разумном номере $k = k(\delta)$ в зависимости от уровня погрешности $\delta$ в (27), что точка $x_{k(\delta)}$ при малых $\delta > 0$ будет достаточно близка ко множеству $X_*$. Для формулировки этого правила зафиксируем какую-нибудь начальную точку $x_0 \in X$ и последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\delta_k\}$, удовлетворяющие условиям (8). Подчеркнем, что параметры $\delta_k$ здесь уже не связаны с условием (4), и они нам нужны лишь для формулировки правила остановки процесса (28): итерации (28) будем продолжать до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства

$$\delta_k \geqslant \delta, \quad k = 0, 1, \ldots, k(\delta). \tag{29}$$

Поскольку $\{\delta_k\} \to 0$, то при каждом $\delta$ такой номер $k(\delta)$ непременно существует и $k(\delta) \to +\infty$ при $\delta \to 0$ (при $\delta > \delta_0$ полагаем $k(\delta) = 0$ по определению).

**Теорема 2.** *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *кроме условия* (4), *и приближения* $F_\delta(x)$ *удовлетворяют условию* (27). *Пусть точки* $x_0, x_1, \ldots, x_{k(\delta)}$ *получены методом* (28), *где номер* $x_{k(\delta)}$ *определен правилом останова* (29). *Тогда для точки* $x(\delta) = x_{k(\delta)}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\delta \to 0} \bigl\| x(\delta) - x_* \bigr\| = 0, \tag{30}$$

*где* $x_*$ *— нормальное решение задачи* (1), *причем сходимость в* (30) *равномерна относительно выбора* $F_\delta(x)$ *из* (27).

**Доказательство**. Из (27), (29) следует, что

$$\bigl\| F_\delta(x) - F(x) \bigr\| \leqslant \delta_k \bigl( 1 + \|x\| \bigr) \quad \forall x \in X, \quad k = 0, 1, \ldots, k(\delta), \tag{31}$$

так что оператор $F_\delta(x)$ удовлетворяет условию (4) при всех $k = 0, 1, \ldots, k(\delta)$. Согласно теореме 1 при выполнении всех ее условий, включая условие (4), последовательность $\{x_k\}$, получаемая методом (5), сходится к нормальному решению $x_*$ задачи (1), т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$, такой, что

$$\|x_k - x_*\| \leqslant \varepsilon \quad \forall k \geqslant N(\varepsilon), \tag{32}$$

причем номер $N(\varepsilon)$ не зависит от выбора реализаций $F_k(x)$ из (4). Так как $\lim\limits_{\delta \to 0} k(\delta) = +\infty$, то существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что $k(\delta) \geqslant N(\varepsilon)$ при всех $\delta$, $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$. Это значит, что для всех $\delta$, $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$, метод (28), (29) порождает точки $x_0$, $x_1$, $\ldots$ , $x_{k(\delta)}$, которые могут быть получены также методом (5) с реализациями $F_k(x) = F_\delta(x)$, $k = 0, 1, \ldots, k(\delta)$, удовлетворяющими в силу (31) условию (4). Поскольку $k(\delta) \geqslant N(\varepsilon)$, то можем воспользоваться неравенством (32) при $k = k(\delta)$ и утверждать, что $\|x_{k(\delta)} - x_*\| < \varepsilon$ при всех $\delta$, $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда имеем $\lim\limits_{\delta \to 0} \|x_{k(\delta)} - x_*\| = 0$. Приняв здесь $x(\delta) = x_{k(\delta)}$, приходим к равенству (30). Теорема 2 доказана.

Равенство (30) оправдывает сформулированное выше правило останова (29) процесса (28) при фиксированном уровне погрешности $\delta > 0$ в (27). Тем самым построен оператор $R_\delta$, который каждому набору $\bigl(F_\delta(x), \delta\bigr)$ входных данных из (27) ставит в соответствие точку $x(\delta) = x_{k(\delta)}$, определяемую методом (28), (29). Равенство (30) означает, что такой оператор $R_\delta$ является регуляризирующим [7, 9]. Подчеркнем, что в определении оператора $R_\delta$ параметры $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\delta_k\}$ из (8) и начальная точка $x_0$ предполагаются фиксированными и не меняются при изменении $\delta > 0$. Здесь возникает интересная и пока еще мало исследованная проблема выбора указанных параметров, чтобы оператор $R_\delta$ обладал дополнительными полезными свойствами, был оптимальным в каком-либо смысле.

**4**. Использованная выше техника доказательства теоремы 1 представляет собой реализацию принципа итеративной регуляризации [7, 8] к методу (5). Проиллюстрируем, как та же техника может быть использована для исследования сходимости исходного базового метода (3). Справедлива

**Теорема 3.** *Пусть* $X$ *— выпуклое замкнутое множество, оператор* $F(x)$ *удовлетворяет условиям* (6), (7), *множество* $X_*$ *решений вариационного неравенства* (1) *непусто, параметр* $\beta_k$ *в методе* (3) *выбирается из условия*

$$\varepsilon_0 \leqslant \beta_k \leqslant \frac{1 - \varepsilon_1}{L}, \quad \varepsilon_0 > 0\,, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1. \tag{33}$$

*Тогда последовательность* $\{x_k\}$, *порожденная методом* (3), *монотонно сходится к некоторой точке* $y_* \in X_*$.

Монотонная сходимость $\{x_k\}$ к $y_*$ означает, что последовательность $\bigl\{ \|x_k - y_*\| \bigr\}$ не возрастает и стремится к нулю. Отметим также, что точка $y_*$ здесь, вообще говоря, зависит от выбора начальной точки $x_0 \in X$ в методе (3) и выбора $\{\beta_k\}$ из (33).

**Доказательство**. Запишем метод (3) в форме вариационных неравенств

$$\begin{aligned} &\langle \bar{x}_k - x_k + \beta_k F(x_k), x - \bar{x}_k \rangle \geqslant 0, \\ &\langle x_{k+1} - x_k + \beta_k F(\bar{x}_k), x - x_{k+1} \rangle \geqslant 0 \end{aligned} \tag{34}$$

для всех $x \in X$, $k = 0, 1, \dots$ . В первом неравенстве (34) положим $x = x_{k+1}$, а во втором $x = x_*$, где $x = x_*$ произвольная точка из $X_*$, и сложим полученные неравенства. Затем, повторив рассуждения из (12)–(22) при $\alpha_k = 0$, $\delta_k = 0$, $x_{\alpha_k} = x_*$, вместо неравенства (22) получим

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leqslant \|x_k - x_*\|^2 + \big(\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2\big)(-1 + \beta_k L) \tag{35}$$

для всех $x_* \in X_*$, $k = 0, 1, \dots$ . С учетом условия (33) из (35) имеем

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 + \varepsilon_1\big(\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2\big) \leqslant \|x_k - x_*\|^2.$$

Суммируя последние неравенства по $k$ от 0 до некоторого $N > 0$, приходим к оценке

$$\|x_{N+1} - x_*\|^2 + \varepsilon_1 \sum_{k=0}^{N} \big(\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2\big) \leqslant \|x_0 - x_*\|^2 \tag{36}$$

для всех $x_* \in X_*$, $N = 0, 1, \dots$ . Из (35), (36) следует, что последовательность $\big\{\|x_k - x_*\|\big\}$ не возрастает при любых $x_* \in X_*$, последовательность $\{x_k\}$ ограничена, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \big(\|x_k - \bar{x}_k\|^2 + \|x_{k+1} - \bar{x}_k\|^2\big)$ сходится и поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - \bar{x}_k\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - \bar{x}_k\| = 0.$$

Пусть $y_*$ — какая-либо предельная точка $\{x_k\}$, пусть $\{x_{k_l}\} \to y_*$. Так как множество $X$ замкнуто, то $y_* \in X$. Еще можем считать $\{\beta_{k_l}\} \to \beta_* \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Заметив, что $\{\bar{x}_{k_l}\} \to y_*$, $\{x_{k_l+1}\} \to y_*$, в (34) перейдем к пределу при $k = k_l \to +\infty$. Получим $\langle F(y_*), x - y_* \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in X$, т.е. $y_* \in X_*$. Последовательность $\big\{\|x_k - x_*\|\big\}$ не возрастает при любых $x_* \in X_*$, поэтому не возрастает последовательность $\big\{\|x_k - y_*\|\big\}$. Но $\lim\limits_{l\to\infty} \|x_{k_l} - y_*\| = 0$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_*\| = 0$. Теорема 3 доказана.

**5**. Кратко остановимся на приложениях методов (3), (5) к задачам оптимизации, седловым задачам и к равновесному программированию.

Задача минимизации $f(x) \to \inf$, $x \in X$, где $X$ — выпуклое замкнутое множество, функция $f(x)$ выпукла и дифференцируемая и ее градиент $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица, сводится к эквивалентному вариационному неравенству (1) с монотонным оператором $F(x) = f'(x)$ [10, с. 161, 162]. Метод (3) запишется в виде

$$\bar{x}_k = \pi_X\big(x_k - \beta_k f'(x_k)\big), \quad x_{k+1} = \pi_X\big(x_k - \beta_k f'(\bar{x}_k)\big),$$

где $\beta_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$ , а метод (5) — в виде

$$\bar{x}_k = \pi_X\Big(x_k - \beta_k\big(f'_k(x_k) + \alpha_k x_k\big)\Big), \quad x_{k+1} = \pi_X\Big(x_k - \beta_k\big(f'_k(\bar{x}_k) + \alpha_k \bar{x}_k\big)\Big),$$

где $\beta_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$ , $f'_k(x)$ — приближение для $f'(x)$ со свойством $\big\|f'_k(x) - f'(x)\big\| \leqslant \delta_k\big(1 + \|x\|\big)$, $x \in X$. Сходимость этих методов вытекает из теорем 1, 3.

Рассмотрим задачу поиска седловой точки функции $f(y, \lambda)$, $(y, \lambda) \in Y \times \Lambda$, где $Y$, $\Lambda$ — выпуклые замкнутые множества из евклидовых пространств $E^n$, $E^m$ соответственно, функция $f(y, \lambda)$ выпукла по $y$ на $Y$ при каждом фиксированном $\lambda \in \Lambda$, вогнута по $\lambda$ на $\Lambda$ при каждом фиксированном $y \in Y$, обладает частными градиентами $f_y(y, \lambda)$, $f_\lambda(y, \lambda)$, удовлетворяющими условию Липшица по совокупности $(y, \lambda)$ на $(Y, \Lambda)$. Будем предполагать, что функция $f(y, \lambda)$ на $Y \times \Lambda$ обладает седловой точкой $(y_*, \lambda_*) \in Y \times \Lambda$, т.е.

$$f(y_*, \lambda) \leqslant f(y_*, \lambda_*) \leqslant f(y, \lambda_*) \quad \forall (y, \lambda) \in Y \times \Lambda. \tag{37}$$

Задача (37) определения седловой точки равносильна решению вариационного неравенства (1), где

$$x = (y, \lambda)^T \in X = Y \times \Lambda, \quad F(x) = \big(f_y(y, \lambda), -f_\lambda(y, \lambda)\big)^T,$$

с монотонным оператором [5]. Метод (3) для задачи (37) при $k = 0, 1, \ldots$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{y}_k \quad &= \pi_Y\big(y_k - \beta_k f_y(y_k, \lambda_k)\big), \bar{\lambda}_k \quad = \pi_\Lambda\big(\lambda_k + \beta_k f_\lambda(y_k, \lambda_k)\big), \\ y_{k+1} &= \pi_Y\big(y_k - \beta_k f_y(\bar{y}_k, \bar{\lambda}_k)\big), \lambda_{k+1} = \pi_\Lambda\big(\lambda_k + \beta_k f_\lambda(\bar{y}_k, \bar{\lambda}_k)\big). \end{aligned} \tag{38}$$

Сходимость метода (38) вытекает из теоремы 3. Регуляризованный вариант (5) этого метода имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{y}_k \quad &= \pi_Y\Big(y_k - \beta_k\big(f_y(y_k, \lambda_k) + \alpha_k y_k\big)\Big), \bar{\lambda}_k \quad = \pi_\Lambda\Big(\lambda_k + \beta_k\big(f_\lambda(y_k, \lambda_k) - \alpha_k \lambda_k\big)\Big), \\ y_{k+1} &= \pi_Y\Big(y_k - \beta_k\big(f_y(\bar{y}_k, \bar{\lambda}_k) + \alpha_k \bar{y}_k\big)\Big), \lambda_{k+1} = \pi_\Lambda\Big(\lambda_k + \beta_k\big(f_\lambda(\bar{y}_k, \bar{\lambda}_k) - \alpha_k \bar{\lambda}_k\big)\Big), \end{aligned} \tag{39}$$

где $k = 0, 1, \ldots$ . Сходимость метода (39) следует из теоремы 1.

Наконец, рассмотрим задачу равновесного программирования, заключающуюся в поиске точки $v_*$ из условий [16 – 18]

$$v_* \in W, \quad \Phi(v_*, v_*) \leqslant \Phi(v_*, w) \quad \forall w \in W, \tag{40}$$

где $W$ — выпуклое замкнутое множество из $E^n$, функция $\Phi(v, w)$ определена при всех $(v, w) \in W \times W$ и удовлетворяет условию положительной полуопределенности (кососимметричности) [16 – 18]

$$\Phi(v, v) - \Phi(v, w) - \Phi(w, v) + \Phi(w, w) \geqslant 0 \quad \forall v, w \in W \times W. \tag{41}$$

Тогда задача (40) равносильна поиску седловой точки $(v_*, v_*)$ функции

$$\Psi(v, w) = \Phi(v, w) - P(v, v), \quad v \in W, \quad w \in W,$$

в следующем смысле [16 – 18]:

$$\Psi(v, v_*) \leqslant \Psi(v_*, v_*) = 0 \leqslant \Psi(v_*, w) \quad \forall v, w \in W. \tag{42}$$

Тем самым задача (40) при условии (41) сводится к седловой задаче (37) при $y = w \in W$, $\lambda = v \in W$ и ее можно записать в виде вариационного неравенства (1), где

$$x = (w, v)^T \in W \times W, \quad F(x) = \big(\Psi_w(v, w), -\Psi_v(v, w)\big)^T.$$

Здесь мы предполагаем, что функция $\Phi(v, w)$ и, следовательно, $\Psi(v, w)$ выпукла по $w \in W$ при любом $v \in W$, функция $\Psi(v, w)$ вогнута по переменной $v \in W$ при любом $w \in W$ (так будет, например, если $\Phi(v, w) = \langle Cv, w\rangle$ с матрицей $C \geqslant 0$; тогда $\Psi(v, w) = \langle Cv, w\rangle - \langle Cv, v\rangle$ вогнута [18]), градиенты $\Phi_v(v, w)$, $\Phi_w(v, w)$ удовлетворяют условию Липшица на $W \times W$. Далее по аналогии с (38), (39) нетрудно выписать методы (3), (5) применительно к задаче (42), равносильной задаче (41); сходимость полученных методов следует из теорем 1 и 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 02–01–00931).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
2. *Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
3. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
4. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
5. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
6. *Harker P. T., Pang J.-S.* Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algotithms and applications // Mathematical Programming. 1990. **48**. 161–220.
7. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
8. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
9. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
10. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
11. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
12. *Бакушинский А.Б., Поляк Б.Т.* О решении вариационных неравенств // ДАН СССР. 1974. **219**, № 5. 1038–1041.
13. *Бакушинский А.Б.* Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляризации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. **17**, № 6. 1350–1362.

14. *Корпелевич Г.М.* Экстра-градиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. 1976. **XII**, вып. 4. 747–756.
15. *Антипин А.С.* Об одном методе отыскания седловой точки модифицированной функции Лагранжа // Экономика и математические методы. 1977. **XIII**, вып. 3. 560–565.
16. *Антипин А.С.* О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. **35**, № 5. 688–704.
17. *Антипин А.С.* Равновесное программирование: проксимальные методы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. **37**, № 11. 1327–1339.
18. *Антипин А.С.* Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2002.

Поступила в редакцию
31.10.2002