

УДК 519.633.6

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПРОКИДЫВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

С. В. Милютин¹, А. А. Фролов², Е. В. Чижонков³

Ранее авторами в рамках одномерной гидродинамической модели был численно и аналитически исследован эффект внеосевого опрокидывания релятивистских и нерелятивистских цилиндрических аксиально-симметричных нелинейных плазменных колебаний. В настоящей статье для двухмерного моделирования указанного эффекта на компьютерах с распределенной памятью реализован явный метод второго порядка точности в эйлеровых переменных. Приведены результаты расчетов на СКИФ МГУ “Чебышев” на базе гибридного параллельного кода, допускающие сопоставление с одномерной моделью.

Ключевые слова: плазменные колебания, эффект опрокидывания, метод конечных разностей, суперкомпьютерное моделирование.

Введение. При математическом моделировании процессов в бесстолкновительной холодной плазме наиболее часто используются два подхода: метод частиц и гидродинамическое описание [1–3]. В первом случае критерием опрокидывания колебаний является пересечение электронных траекторий, а во втором — обращение в бесконечность функции, описывающей плотность электронов. В монографии [4] (см. также приложение в [5]) имеется строгое обоснование появления сингулярности плотности среды при пересечении траекторий частиц, поэтому далее при обсуждении опрокидывания колебаний будем использовать оба критерия, исходя при этом только из соображений удобства.

В качестве объекта для исследований плазменные колебания выбраны из следующих соображений. С одной стороны, хорошо известно [6], что одномерные цилиндрические колебания в плазме разрушаются при любых (сколь угодно малых!) амплитудах вследствие вклада электронных нелинейностей в сдвиг частоты. Это означает математическую содержательность задачи. С другой стороны, они являются более простой, но тем не менее весьма нетривиальной моделью для изучения аксиально-симметричных кильватерных плазменных волн, возбуждаемых движущимися источниками — драйверами (электронными сгустками, короткими лазерными импульсами). Хорошее качественное и количественное соответствие основных характеристик (в частности, функции электронной плотности) аксиально-симметричных колебаний и кильватерных волн как с учетом релятивистских эффектов, так и при пренебрежении ими было установлено в работах [7, 8]. В этой связи начальные условия для возбуждения колебаний обычно подбираются так, чтобы обеспечить их форму, максимально близкую к форме кильватерной волны при ее инициализации с помощью лазерного импульса.

Обратим внимание, что рассматриваемая задача об опрокидывании колебаний является достаточно сложной с вычислительной точки зрения. Во-первых, при гидродинамическом описании с использованием эйлеровых переменных смоделировать эффект опрокидывания аксиально-симметричных колебаний даже на основе одномерных уравнений в цилиндрической геометрии удалось только в последнее время [9]. Ранее аккуратный расчет опрокидывания производился только при использовании лагранжевых переменных. Во-вторых, значение координаты по времени разрушения колебаний весьма чувствительно к входным данным: в слабо нелинейном приближении оно обратно пропорционально третьей степени (кубу!) начальной амплитуды. Это означает, что определение физических параметров вычислительно доступного варианта уже является непростой задачей. В-третьих, радиальная (по отношению к оси симметрии) координата опрокидывания в умеренно нелинейном режиме, т.е. когда возмущение электронной плотности всего лишь на порядок превосходит фоновое значение, составляет порядка 1–2% от характерного размера расчетной области. Другими словами, с целью адекватного отображения процесса требуются по порядку тысячи

¹ ООО “Рок Флоу Динамикс”, Щелковское ш., д. 9, 105122, Москва; старший разработчик, e-mail: svmilyutin@gmail.com

² Объединенный институт высоких температур РАН, Ижорская ул., д. 13/19, 125412, Москва; ст. науч. сотр., e-mail: frolov@ihed.ras.ru

³ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; профессор, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

точек по каждой пространственной координате даже при условии гладкости и ограниченности искомых функций.

Следует, безусловно, иметь в виду, что аксиальная симметрия задачи является некоторой идеализацией реального процесса. Часто определенный интерес представляет как раз влияние возмущений специального вида на симметричные решения. Если же отказаться от аксиальной симметрии задачи, то необходимым становится применение суперкомпьютеров: требуемый объем вычислений вырастает примерно на три–четыре порядка, аналогично меняются требования к оперативной памяти. При этом должны принципиально модернизироваться идеи вычислительных алгоритмов, так как масштабируемость расчетов существенно опирается на явные методы аппроксимации. Соответствующая двумерная нестационарная разностная схема была предложена в [10].

Предлагаемая статья имеет следующую структуру. Сначала приведены физическая постановка задачи и качественный сценарий развития — завершения аксиально-симметричных плазменных колебаний. Далее изложены результаты одномерного моделирования на основе гидродинамического описания с использованием переменных Эйлера и Лагранжа. Затем при тех же параметрах рассчитан процесс опрокидывания на основе двумерной модели на СКИФ МГУ “Чебышев” на базе гибридного параллельного кода и проведено сопоставление обоих подходов. В заключении систематизированы результаты проведенных исследований.

1. Постановка задачи и сценарий процесса. Так как область корректности гидродинамического описания плазменных процессов существенно уже, чем описания в рамках моделей частиц, а в работе предполагается использовать оба подхода, то объект моделирования удобно определить в терминах сплошной среды. Будем считать плазму холодной, идеальной, релятивистской электронной жидкостью, пренебрегая столкновительными и рекомбиционными эффектами, а также движением ионов. Тогда систему уравнений гидродинамики совместно с уравнениями Максвелла [11] можно представить в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \mathbf{v}) &= 0, & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} &= e \mathbf{E} - m c^2 \nabla \gamma, & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \\ \gamma &= \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}}, & \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{p}}{m \gamma}, & \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -4 \pi e n \mathbf{v} + c \operatorname{rot} \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где e , m — заряд и масса электрона, c — скорость света, n , \mathbf{p} , \mathbf{v} — концентрация (плотность), удельный импульс и скорость электронов, γ — лоренцевский фактор, \mathbf{E} , \mathbf{B} — напряженности электрического и магнитного полей.

С целью проведения качественного анализа плазменных аксиально-симметричных колебаний систему (1.1) можно существенно упростить. Применяя допущения, что решение определяется только радиальными компонентами вектор-функций \mathbf{p} , \mathbf{v} , \mathbf{E} и зависимость от переменной z отсутствует, можно получить замкнутые безразмерные уравнения вида

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} + E + \frac{P}{\sqrt{1+P^2}} \frac{\partial P}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - \frac{P}{\sqrt{1+P^2}} \left[1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E) \right] = 0. \quad (1.2)$$

Здесь и далее используются обозначения $\rho = k_p r$, $\theta = \omega_p t$, $V = \frac{v_r}{c}$, $P = \frac{p_r}{m c}$, $E = -\frac{e E_r}{m c \omega_p}$, $N = \frac{n}{n_0}$,

где $\omega_p = \left(\frac{4 \pi e^2 n_0}{m} \right)^{1/2}$ — плазменная частота, n_0 — значение невозмущенной электронной плотности. Для представляющей первоочередной интерес безразмерной функции электронной плотности имеем следующее выражение:

$$N = 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E). \quad (1.3)$$

Детали вывода уравнений (1.2) и (1.3) из базовой системы (1.1) приведены в [7].

Сделаем важное предположение о форме начальных условий для системы (1.2) (зафиксируем соответствующий момент времени как $\theta = 0$):

$$P = 0, \quad E = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2 \rho \exp^2 \left\{ -\frac{\rho^2}{\rho_*^2} \right\}. \quad (1.4)$$

Как уже отмечалось во введении, изучение колебаний ориентировано, в первую очередь, на аналогию с динамикой кильватерных волн, порождаемых коротким лазерным импульсом. Как правило, в теоретических выкладках полагают, что пространственные характеристики импульса имеют гауссово распределение по координатам. Например, комплекснозначную функцию, характеризующую поведение импульса

(так называемую огибающую) в аксиально-симметричном случае часто берут в виде $a = a_0 \exp\left\{-\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\}$, где величина a_0 в общем случае может зависеть как от времени, так и от пространственных координат. Теперь, имея в виду, что при наличии лазерного импульса формула для релятивистского фактора отличается от (1.1): $\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2} + \frac{|a|^2}{2}}$, можно установить, что при $P = 0$ и $E \approx -\frac{\partial \gamma}{\partial \rho}$ форма начального распределения возмущающего электрического поля описывается как в (1.4) (детали рассуждений в [5]). Отметим также, что кроме формального соответствия начальных условий для аксиально-симметричных колебаний и механизма возбуждения кильватерной волны формула для E в (1.4) учитывает еще и глубокую внутреннюю связь между этими процессами. Дело в том, что если размер фокального пятна импульса меньше длины плазменной волны ($\rho_* < 1$), то в кильватерной волне колебания электронов в радиальном направлении будут существенно превосходить колебания в продольном направлении, т.е. уменьшение параметра ρ_* в (1.4) приводит к сближению математических моделей указанных процессов по существу.

Для полноты формулировки задачи требуется добавить краевые условия с целью однозначного определения искомых функций в области $\Omega = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}\}$. На оси (при $\rho = 0$), в силу аксиальной симметрии задачи, имеем

$$P(0, \theta) = E(0, \theta) = 0. \tag{1.5}$$

Кроме того, явный вид (1.4) позволяет ограничить размер области, в которой фактически происходят колебания. Если положить $\rho_{\max} = 4.5\rho_*$, то получим оценку $\exp^2\left(-\frac{\rho_{\max}^2}{\rho_*^2}\right) \ll 1$. Поэтому при $\rho = \rho_{\max}$ с хорошей точностью справедливы равенства

$$P(\rho_{\max}, \theta) = E(\rho_{\max}, \theta) = 0. \tag{1.6}$$

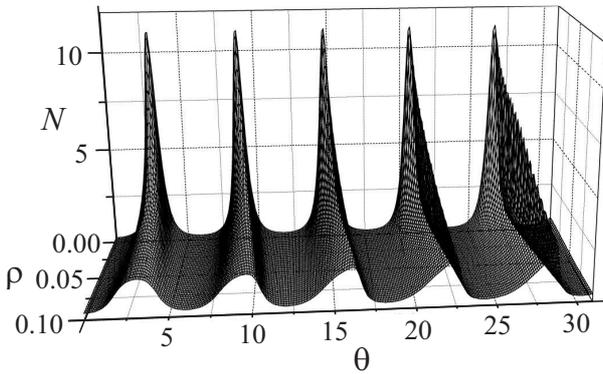


Рис. 1. Пространственно-временное распределение плотности электронов до образования внеосевого максимума

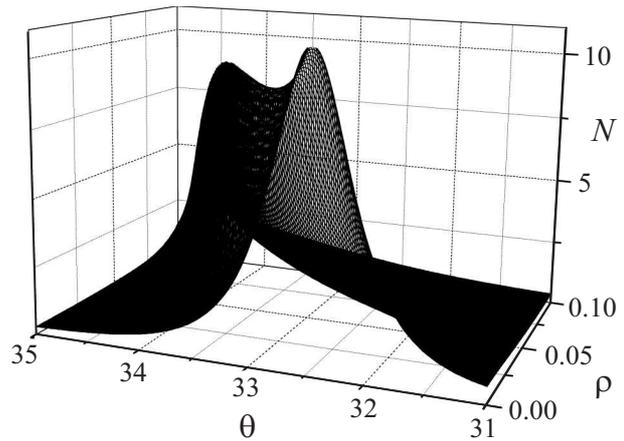


Рис. 2. Пространственно-временное распределение плотности электронов при образовании внеосевого максимума

Формальная постановка задачи в эйлеровых переменных (1.2), (1.4)–(1.6) позволяет в целом охарактеризовать качественный сценарий динамики аксиально-симметрических плазменных колебаний. Зафиксируем для определенности значения параметров в (1.4): $a_* = 0.365$, $\rho_* = 0.6$, $\rho_{\max} = 2.7$ и рассмотрим соответствующий им рис. 1. На нем отчетливо виден процесс эволюции нелинейных плазменных колебаний во времени, а также их радиальная структура. На начальной стадии колебаний максимальная величина плотности электронов расположена на оси и примерно на порядок превышает фоновое значение. Далее с течением времени в процессе колебаний наблюдаются две тенденции. Первая из них заключается в том, что внеосевые колебания несколько отстают по фазе от колебаний на оси и от периода к периоду этот фазовый сдвиг увеличивается. Вторая тенденция более наглядна: с течением времени происходит постепенное формирование абсолютного максимума плотности, расположенного вне оси и сравнимого по величине с осевыми.

Описанная картина с двумя максимумами изображена отдельно на рис. 2, причем для наглядности изменен угол наблюдения. Рождение внеосевого максимума электронной плотности является сигналом, что регулярное развитие колебаний завершилось и начался процесс их разрушения. Динамика разрушения

наиболее заметно проявляется в росте значения внеосевого экстремума: от периода к периоду оно растет и в конце концов обращается в бесконечность, т.е. происходит опрокидывание колебаний. При указанных параметрах внеосевой максимум плотности сформировался при $\theta_{\max}^{(1)} \approx 34$, увеличился примерно в два раза на следующем периоде при $\theta_{\max}^{(2)} \approx 40$ и обратился в бесконечность при $\theta_{\text{бр}} \approx 46$. В силу справедливости формулы (1.3), сингулярность плотности означает формирование скачка (разрыва) радиальной компоненты электрического поля. Заметим, что осевые экстремумы электронной плотности при этом ведут себя регулярным образом, т.е. их абсолютные значения и периодичность появления практически неизменны вплоть до опрокидывания.

Зафиксируем теперь некоторое значение $\rho_* < 1$ (для указанной выше близости моделей электронных колебаний и плазменных волн) и охарактеризуем вариации описанного процесса при изменении параметра a_* . Предположим сначала, что a_* будет монотонно убывать. Тогда эволюция плазменных колебаний будет растягиваться во времени, асимптотически приближаясь к результатам нелинейной модели, которая была подробно изучена в [5, 7] (см. также [8]). Напомним, что при $\rho_* \ll 1$ и достаточно малых a_* справедливы асимптотические формулы для амплитуды колебаний $N_{\max} = C_1 \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2$, времени формирования первого внеосевого максимума электронной плотности $\theta_{\max}^{(1)} = C_2 \left(\frac{\rho_*}{a_*}\right)^4$ и времени опрокидывания колебаний $\theta_{\text{бр}} = C_3 \left(\frac{\rho_*}{a_*}\right)^6$ с некоторыми постоянными C_i , $i = 1, 2, 3$. Для этого приближения известна

также радиальная координата точки опрокидывания: $\rho_{\text{бр}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \rho_*$.

Пусть теперь параметр a_* будет монотонно расти. Тогда, наоборот, эволюция плазменных колебаний будет сжиматься во времени, приобретая все более нелинейный характер. В первую очередь это будет заметно по абсолютным значениям регулярных осевых максимумов: их значения начнут превосходить фоновое в десятки раз и более. Например, при $a_* = 0.391$ имеем $N_{\text{axis}} \approx 111$, а при $a_* = 0.401$ — $N_{\text{axis}} \approx 1244$. Время опрокидывания колебаний и соответствующая радиальная координата будут уменьшаться, при этом наблюдается такая качественная картина. Если опрокидывания колебаний происходят внутри одного периода, то их радиальная координата монотонно убывает при возрастании a_* . При “перескакивании” времени опрокидывания в предыдущий период радиальная координата скачком увеличивается, а затем плавно внутри периода убывает. При этом ее минимальное по периодам значение стремится к нулю, т.е. к оси. В процессе роста параметра a_* (при фиксированном значении ρ_*) не всегда удается отследить формирование и рост внеосевого экстремума плотности; внеосевое опрокидывание часто происходит настолько быстро, что внеосевой экстремум не может просуществовать даже одного периода по времени. Отметим также, что время формирования первого осевого экстремума электронной плотности также убывает при возрастании a_* ; по крайней мере ни разу в расчетах не было обнаружено опрокидывания перед появлением первого осевого максимума. Критическим в гидродинамической модели является значение $\left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 = \frac{1}{2}$, в окрестности которого опрокидывание будет носить практически осевой характер: начальное распределение электронов таково, что все они дружно устремляются к оси, отражаются от нее, а затем очень быстро происходит пересечение электронных траекторий. Таким образом, длительность колебаний в окрестности критического значения будет продолжаться примерно половину периода. Этот факт следует из исследования аксиальных решений рассматриваемой задачи [12].

2. Численное одномерное моделирование в лагранжевых переменных. Из описанного выше сценария колебаний несложно понять, почему процесс опрокидывания моделировать в эйлеровых переменных весьма проблематично. Успешным расчетам в равной мере препятствуют обе указанные тенденции: как искривление фазового фронта, так и неограниченный рост внеосевого максимума. В результате их развития гладкость искомых функций ухудшается настолько, что это требует существенного измельчения параметров дискретизации по времени и пространству одновременно. Вышесказанное означает, что численное решение задачи (1.2), (1.4)–(1.6) с использованием традиционных разностных схем [7, 8] не позволяет исследовать структуру плотности электронов после появления внеосевого максимума в режиме даже умеренной нелинейности. Как уже упоминалось выше, впервые этого удалось добиться только на основе специально сконструированной схемы расщепления [9].

Альтернативой по отношению к (1.2) с точки зрения гидродинамического описания является приме-

нение лагранжевых переменных

$$\frac{d}{d\theta} P = -E, \quad \frac{d}{d\theta} E + V \frac{E}{\rho} = V, \quad \frac{d}{d\theta} R = V, \tag{2.1}$$

где $\frac{d}{d\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} + V \frac{\partial}{\partial \rho}$ — полная производная по времени, R — смещение, определяющее траекторию частиц $\rho(\rho_0, \theta) = \rho_0 + R(\rho_0, \theta)$, начальное положение которых по радиальной координате равно ρ_0 , $V = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}}$.

Из системы (2.1) может быть получена в явном виде связь между электрическим полем и смещением [5, 6]:

$$E = \frac{1}{2} \frac{(\rho_0 + R)^2 - \rho_0^2}{\rho_0 + R}. \tag{2.2}$$

Использование этого выражения позволяет записать более простые уравнения для определения траекторий частиц:

$$\frac{d}{d\theta} R = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}}, \quad \frac{d}{d\theta} P = -E, \tag{2.3}$$

а также начальные условия для их решения. Обратим внимание на принципиальное различие между системами (1.2) и (2.3): в последней из них отсутствует в явном виде частная производная по радиальной координате, т.е. система (2.3) фактически представляет собой набор формально независимых обыкновенных дифференциальных уравнений для отдельных частиц. Конечно, на самом деле они связаны через начальные условия для решений этих уравнений. Кроме того, для наглядного отображения процесса требуется численное дифференцирование по радиальной переменной функции электрического поля (2.2) в соответствии с формулой (1.3). Однако ситуация изменилась качественно: искомые функции смещения частиц $R(\rho_0, \theta)$ являются гладкими функциями переменной θ , а от ρ_0 зависят как от внешнего (начального) параметра. Указанное обстоятельство делает численное решение системы (2.3) весьма необременительной процедурой.

Для полноты описания приведем формулы вычислительного алгоритма. Пусть в начальный период времени $\theta = 0$ частица с номером k характеризуется начальным положением по радиусу $\rho_0(k)$ и начальным смещением $R(k, 0)$, где $1 \leq k \leq M$, M — полное число частиц. Начальное положение всех частиц формирует электрическое поле, которое имеет вид (1.4). С другой стороны, отклонение частиц в начальный момент времени создает в точке с координатой $\rho_k = \rho_0(k) + R(k, 0)$ электрическое поле в соответствии с формулой (2.2). Сравнивая выражения (1.4) и (2.2), можно определить искомые значения $\rho_0(k)$ и $R(k, 0)$. Для этого зададим начальную пространственную сетку $\rho_k = kh$, где h — параметр дискретизации по радиальной переменной, характеризующий близость соседних частиц. В узлах сетки по формуле (1.4) вычислим значения электрического поля $E(\rho_k, 0)$. Это электрическое поле образуется смещением частиц, т.е. на основе (2.2) имеем уравнения для определения начальных положений $\rho_0(k)$: $E(\rho_k, 0) = \frac{1}{2} \frac{\rho_k^2 - \rho_0^2(k)}{\rho_k}$, а затем, вспоминая, что $\rho_k = \rho_0(k) + R(k, 0)$, по уже найденным начальным положениям частиц находим их начальные отклонения $R(k, 0)$ от этих начальных положений. Таким образом, для вычисления траектории каждой частицы получены начальные данные, к которым следует добавить условие неподвижности частиц в начальный момент времени из (1.4), т.е. $P(k, 0) = 0$.

Обратим внимание, что в окрестности оси зависимость E по радиусу близка к линейной, т.е. $E \approx \beta \rho$, $\beta = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2$. Поэтому при задании начальных положений частиц справедлива формула $\rho_0(k) \approx \rho_k \sqrt{1 - 2\beta}$,

из которой, в свою очередь, следует критичность значения $\beta = \frac{1}{2}$ для сохранения корректности гидродинамического описания процесса. Более подробно вопросы существования и единственности гладкого периодического аксиального решения уравнений (2.3) освещены в работе [9].

Уравнения (2.3), как отмечалось выше, являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, поэтому могут быть проинтегрированы численно обычным образом [13], например по традиционной [1] для уравнений движения схеме второго порядка точности (так называемая схема с перешагиванием). Пусть τ — параметр дискретизации по времени, т.е. $\theta_j = j\tau$, $j \geq 0$, тогда расчетные формулы будут иметь следующий вид:

$$\frac{P(k, \theta_{j+1/2}) - P(k, \theta_{j-1/2})}{\tau} = -\frac{1}{2} \frac{(\rho_0(k) + R(k, \theta_j))^2 - \rho_0^2(k)}{\rho_0(k) + R(k, \theta_j)}, \quad \frac{R(k, \theta_{j+1}) - R(k, \theta_j)}{\tau} = \frac{P(k, \theta_{j+1/2})}{\sqrt{1 + P^2(k, \theta_{j+1/2})}}.$$

При этом в произвольный момент времени θ_j может быть вычислена переменная эйлерова сетка по уже приводившейся формуле $\rho_k = \rho_0(k) + R(k, \theta_j)$, $1 \leq k \leq M$, в узлах которой в соответствии с (2.2) определены значения электрического поля $E(\rho_k, \theta_j)$. Это использовалось для представления электронной плотности в иллюстративных целях: в расчетах применялась формула численного дифференцирования второго порядка точности в серединах подотрезков:

$$N\left(\frac{\rho_{k+1} + \rho_k}{2}, \theta_j\right) = 1 - \left[\frac{E(\rho_{k+1}, \theta_j) - E(\rho_k, \theta_j)}{\rho_{k+1} - \rho_k} + \frac{E(\rho_{k+1}, \theta_j) + E(\rho_k, \theta_j)}{\rho_{k+1} + \rho_k} \right].$$

Здесь было удобно считать, что в любой момент времени на оси $\rho = 0$ располагается частица с номером $k = 0$, у которой всегда отсутствует смещение, т.е. ее траектория просто совпадает с осью и на этой траектории электрическое поле всегда равно нулю.

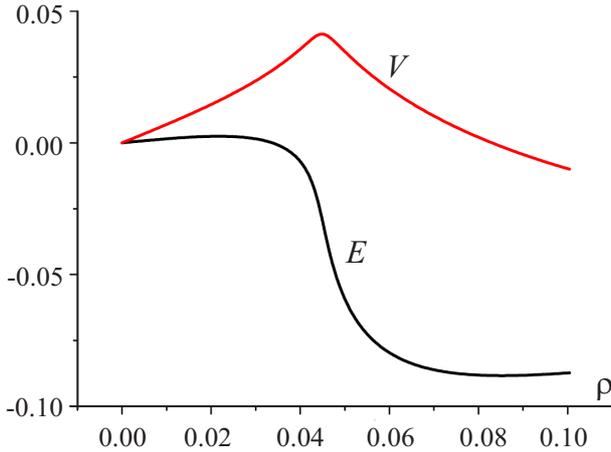


Рис. 3. Пространственное распределение скорости и электрического поля в момент образования первого внеосевого максимума

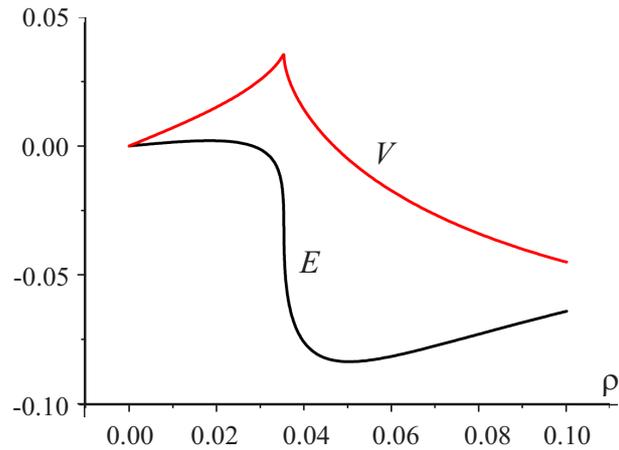


Рис. 4. Пространственное распределение скорости и электрического поля в момент опрокидывания плазменных колебаний

Расчеты по представленной схеме проводились для числа частиц $M \leq 5000$ с теми же параметрами, что и при использовании эйлеровых переменных: $a_* = 0.365$, $\rho_* = 0.6$, $\tau = h = \frac{1}{6400}$. Выполненные при использовании лагранжевых переменных расчеты полностью совпадают с результатами, полученными методом конечных разностей для уравнений в эйлеровых переменных. На рис. 3 представлены пространственные распределения электрического поля и скорости электронов в момент появления первого внеосевого максимума плотности, т.е. при $\theta_{\max}^{(1)} \approx 34$. Численные расчеты в полном соответствии с теорией [9] демонстрируют, что с течением времени максимумы плотности, расположенные на оси, не меняют своей величины. В отличие от этого внеосевой максимум плотности после своего появления быстро нарастает от периода к периоду. Второй внеосевой максимум плотности имеет величину $N_{\max}^{(2)} \approx 23$ и возникает в момент времени $\theta_{\max}^{(2)} \approx 40$ на расстоянии от оси, равном $\rho_{\max}^{(2)} \approx 0.053$. И наконец, на следующем периоде колебаний в момент времени $\theta_{\max}^{(3)} \approx 46$ на расстоянии от оси $\rho_{\max}^{(3)} \approx 0.035$ плотность обращается в бесконечность, т.е. происходит опрокидывание цилиндрических плазменных колебаний. Именно с этим резким нарастанием внеосевого максимума плотности связаны основные трудности численного интегрирования системы уравнений в частных производных (1.2) — системы с использованием эйлеровых переменных. Расчеты также показывают, что с течением времени происходит укрупнение радиального профиля электрического поля и формирование излома у скорости электронов. При опрокидывании плазменных колебаний в момент времени $\theta_{\max}^{(3)}$ у электрического поля наблюдается скачок, а скорость электронов имеет разрыв радиальной производной (рис. 4). Проведенные расчеты траекторий частиц для указанных выше параметров демонстрируют, что в процессе колебательного движения расстояния между соседними частицами изменяются в зависимости от их начальных положений. Траектории некоторых соседних частиц сближаются, и в определенный момент времени происходит их пересечение. При этом моменты времени пересечения траекторий частиц и обращения плотности в бесконечность в точности совпадают.

Обратим внимание, что в отличие от применения эйлеровых переменных, где с целью удовлетворения граничным условиям (1.6) расчетная область бралась достаточно большой — $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$, при использовании лагранжевых переменных такая необходимость отсутствует. В рассматриваемом случае достаточно

учитывать только те частицы, которые впоследствии окажутся в зоне опрокидывания. Занимаемая ими область пространства достаточно мала — менее 10% от величины ρ_* и менее 2.5% от величины ρ_{\max} . Учет этого обстоятельства позволяет значительно повысить эффективность вычислительного алгоритма при определении координат опрокидывания плазменных колебаний за счет одновременного уменьшения объема вычислений (сокращение количества частиц) и увеличения точности расчетов (уменьшение параметра h).

3. Численное двумерное моделирование в эйлеровых переменных. В целях сохранения преемственности изложения с предыдущими разделами сформулируем гидродинамическую плоскую двумерную постановку в эйлеровых переменных. Рассмотрим базовые уравнения (1.1) и предположим, что решение определяется только x - и y -компонентами вектор-функций \mathbf{p} , \mathbf{v} , \mathbf{E} и отсутствует зависимость от переменной z . Тогда двумерный аналог системы (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial \theta} + E_x + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial x} (P_x^2 + P_y^2) &= 0, & \frac{\partial P_y}{\partial \theta} + E_y + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial y} (P_x^2 + P_y^2) &= 0, \\ \gamma = \sqrt{1 + P_x^2 + P_y^2}, & \frac{\partial E_x}{\partial \theta} = N \frac{P_x}{\gamma} + \frac{\partial B_z}{\partial y}, & \frac{\partial E_y}{\partial \theta} = N \frac{P_y}{\gamma} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \\ N = 1 - \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right), & \frac{\partial B_z}{\partial \theta} = - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

с областью определения неизвестных функций $\Omega = \{|x| \leq \rho_{\max}, |y| \leq \rho_{\max}, 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}\}$. Начальные условия могут быть представлены как $E_x = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 x \exp^2\left\{-\frac{x^2 + y^2}{\rho_*^2}\right\}$, $E_y = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 y \exp^2\left\{-\frac{x^2 + y^2}{\rho_*^2}\right\}$, а граничные условия — аналог (1.3) — также являются условиями локализации колебаний по пространственным переменным, т.е. равны нулю в произвольный момент времени θ , если одна из координат x или y по модулю совпадает с ρ_{\max} .

3.1. Дискретизация по времени и пространству. В качестве основы для дискретизации по времени применим обычную схему с перешагиванием, как и в предыдущем разделе. Пусть τ — шаг по времени, тогда будем относить к “целым” моментам времени $\theta_j = j\tau$ ($j \geq 0$ — целое) величины $\mathbf{E} = (EX, EY, 0)$, N , а к “полуцелым” $\theta_{j\pm 1/2} - \mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\mathbf{p} = (PX, PY, 0)$. Выбор соответствующего момента времени для значения функции будем обозначать верхним индексом. Начиная с этого момента несколько изменены обозначения искомым функций, чтобы освободить место для нижних индексов.

Для дискретизации по пространству будем использовать так называемые смещенные сетки, т.е. для численного решения двумерных уравнений каждая из функций N , EX , EY , PX , PY и B определяется на собственном конечном множестве узлов. В рассматриваемом случае нам потребуются смещенные сетки D_i ($0 \leq i \leq 3$) в плоскости переменных (x, y) . Введя обозначения $h_x = \frac{2\rho_{\max}}{M_x}$, $h_y = \frac{2\rho_{\max}}{M_y}$, где M_x и M_y — число узлов по переменным x и y соответственно, определим

$$\begin{aligned} D_0 &= \{(x_k, y_l) : x_k = k h_x, |k| \leq M_x; y_l = l h_y, |l| \leq M_y\}, \\ D_1 &= \left\{ (x_k, y_l) : x_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) h_x, -M_x \leq k \leq M_x - 1; y_l = l h_y, |l| \leq M_y \right\}, \\ D_2 &= \left\{ (x_k, y_l) : x_k = k h_x, |k| \leq M_x; y_l = \left(l + \frac{1}{2}\right) h_y, -M_y \leq l \leq M_y - 1 \right\}, \\ D_3 &= \left\{ (x_k, y_l) : x_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) h_x, -M_x \leq k \leq M_x - 1; y_l = \left(l + \frac{1}{2}\right) h_y, -M_y \leq l \leq M_y - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Результат дискретизации по пространству будет обозначаться нижними индексами, при этом функция N определяется на сетке D_0 ; EX , PX — на D_1 ; EY , PY — на D_2 ; B — на D_3 соответственно.

Если при моделировании плазменных процессов используют разнесенные по пространству сетки и перешагивание по времени, то традиционно ссылаются на работу [14], хотя следует отметить, что на разнесенных сетках дискретные аналоги основных дифференциальных операторов были введены ранее в [15].

Приведем описание вычислительного алгоритма в целом, считая, что на начало временного шага на определенных выше сетках нам известны величины $PX^{j-1/2}$, $PY^{j-1/2}$, $B_{k,l}^{j-1/2}$, $EX_{k,l}^j$, $EY_{k,l}^j$, $N_{k,l}^j$.

Шаг 1. Пересчитаем магнитное поле:
$$\frac{B_{k,l}^{j+1/2} - B_{k,l}^{j-1/2}}{\tau} = - \left(\frac{EY_{k+1,l}^j - EY_{k,l}^j}{h_x} - \frac{EX_{k,l+1}^j - EX_{k,l}^j}{h_y} \right).$$

Шаг 2. Вычисление проекций импульсов и лоренцевского фактора состоит из двух этапов: предиктор и корректор. Это делается с целью обеспечения второго порядка точности по времени на гладких решениях при учете нелинейных слагаемых (в первую очередь, для PX и PY).

Предиктор. Вычисляем на слое $(j - 1/2)$ функцию — сумму квадратов импульсов на сетке D_0 и соответствующее значение γ : $S_{k,l}^{j-1/2} = \frac{1}{2}(PX_{k,l}^2 + PX_{k-1,l}^2 + PY_{k,l}^2 + PY_{k,l-1}^2)$, $\gamma_{k,l}^{j-1/2} = \sqrt{1 + S_{k,l}^{j-1/2}}$. Затем интегрируем уравнения по схеме

$$\frac{\overline{PX}_{k,l}^{j+1/2} - PX_{k,l}^{j-1/2}}{\tau} = - \left(EX_{k,l}^j + \frac{S_{k+1,l}^{j-1/2} - S_{k,l}^{j-1/2}}{h_x (\gamma_{k+1,l}^{j-1/2} + \gamma_{k,l}^{j-1/2})} \right),$$

$$\frac{\overline{PY}_{k,l}^{j+1/2} - PY_{k,l}^{j-1/2}}{\tau} = - \left(EY_{k,l}^j + \frac{S_{k,l+1}^{j-1/2} - S_{k,l}^{j-1/2}}{h_y (\gamma_{k,l+1}^{j-1/2} + \gamma_{k,l}^{j-1/2})} \right).$$

Эти значения \overline{PX} и \overline{PY} имеют только первый порядок точности по τ вследствие использования нелинейных слагаемых с нижнего слоя по времени. Поэтому для достижения второго порядка точности на гладких решениях требуется дополнительный шаг — корректор.

Используя посчитанные $\overline{PX}_{k,l}^{j+1/2}$ и $\overline{PY}_{k,l}^{j+1/2}$, вычисляем на слое j функцию — сумму квадратов импульсов на сетке D_0 и соответствующее значение γ : $\overline{S}_{k,l}^{j+1/2} = \frac{1}{2} (\overline{PX}_{k,l}^2 + \overline{PX}_{k-1,l}^2 + \overline{PY}_{k,l}^2 + \overline{PY}_{k,l-1}^2)$, $S_{k,l}^j = \frac{1}{2} (\overline{S}_{k,l}^{j+1/2} + S_{k,l}^{j-1/2})$, $\gamma_{k,l}^j = \sqrt{1 + S_{k,l}^j}$. Затем второй раз интегрируем те же уравнения (в результате имеем аналог схемы Эйлера с пересчетом [13]):

$$\frac{PX_{k,l}^{j+1/2} - PX_{k,l}^{j-1/2}}{\tau} = - \left(EX_{k,l}^j + \frac{S_{k+1,l}^j - S_{k,l}^j}{h_x (\gamma_{k+1,l}^j + \gamma_{k,l}^j)} \right),$$

$$\frac{PY_{k,l}^{j+1/2} - PY_{k,l}^{j-1/2}}{\tau} = - \left(EY_{k,l}^j + \frac{S_{k,l+1}^j - S_{k,l}^j}{h_y (\gamma_{k,l+1}^j + \gamma_{k,l}^j)} \right).$$

В завершение шага вычисляем (уточняем) значение γ в момент $j + 1/2$ на основе только что полученных величин $PX_{k,l}^{j+1/2}$ и $PY_{k,l}^{j+1/2}$: $S_{k,l}^{j+1/2} = \frac{1}{2} (PX_{k,l}^2 + PX_{k-1,l}^2 + PY_{k,l}^2 + PY_{k,l-1}^2)$, $\gamma_{k,l}^{j+1/2} = \sqrt{1 + S_{k,l}^{j+1/2}}$.

Шаг 3. Наконец, можно пересчитать электрическое поле на основе формул

$$\frac{\overline{EX}_{k,l}^{j+1} - EX_{k,l}^j}{\tau} = \frac{PX_{k,l}^{j+1/2} N_{k,l}^j}{\gamma_{k+1,l}^{j+1/2} + \gamma_{k,l}^{j+1/2}} + \frac{B_{k,l}^{j+1/2} - B_{k,l-1}^{j+1/2}}{h_y},$$

$$\frac{\overline{EY}_{k,l}^{j+1} - EY_{k,l}^j}{\tau} = \frac{PY_{k,l}^{j+1/2} N_{k,l}^j}{\gamma_{k,l+1}^{j+1/2} + \gamma_{k,l}^{j+1/2}} - \frac{B_{k,l}^{j+1/2} - B_{k-1,l}^{j+1/2}}{h_x},$$

где

$$N_{k,l}^j = 1 - \left(\frac{EX_{k,l}^j - EX_{k-1,l}^j}{h_x} + \frac{EY_{k,l}^j - EY_{k,l-1}^j}{h_y} \right). \quad (3.2)$$

На этом этапе для повышения порядка точности так же, как и на шаге 2, применяется пересчет по схеме предиктор–корректор для множителя $N_{k,l}$. Здесь имеется в виду, что на этапе предиктор он вычисляется для слоя j как указано в (3.2), а на этапе корректор — уже как полусумма для слоев: основного j и промежуточного $j + 1$, т.е. на основе только что посчитанных $\overline{EX}_{k,l}^{j+1}$ и $\overline{EY}_{k,l}^{j+1}$ по формуле (3.2) имеем $\overline{N}_{k,l}^{j+1}$ и затем $N_{k,l}^{j+1/2} = \frac{1}{2} (N_{k,l}^j + \overline{N}_{k,l}^{j+1})$. Дальнейшие вычисления практически воспроизводят шаг

предиктор:

$$\frac{EX_{k,l}^{j+1} - EX_{k,l}^j}{\tau} = \frac{PX_{k,l}^{j+1/2} N_{k,l}^{j+1/2}}{\gamma_{k+1,l}^{j+1/2} + \gamma_{k,l}^{j+1/2}} + \frac{B_{k,l}^{j+1/2} - B_{k,l-1}^{j+1/2}}{h_y},$$

$$\frac{EY_{k,l}^{j+1} - EY_{k,l}^j}{\tau} = \frac{PY_{k,l}^{j+1/2} N_{k,l}^{j+1/2}}{\gamma_{k,l+1}^{j+1/2} + \gamma_{k,l}^{j+1/2}} - \frac{B_{k,l}^{j+1/2} - B_{k-1,l}^{j+1/2}}{h_x}.$$

В завершение цикла по времени вычисляется “настоящая” (а не промежуточная!) электронная плотность $N_{k,l}^{j+1}$ опять по формуле (3.2).

Обратим внимание, что при моделировании методом частиц в ячейке (PIC, Particle-In-Cell method) схемы предложенного типа обычно используются для расчетов полей [16]. Известно также [14], что условие устойчивости в рассматриваемом случае имеет асимптотику $\tau = O(\sqrt{h_x^2 + h_y^2})$, полностью согласующуюся с проведенными вычислительными экспериментами.

3.2. Результаты расчетов. Зафиксируем параметры начальных данных $a_* = 0.365$, $\rho_* = 0.6$, расчетной области $\rho_{\max} = 2.7$ и шагов сетки $h_x = h_y = \frac{1}{1600}$, $\tau = \frac{1}{8000}$, а затем просчитаем по времени до момента $\theta \approx 40$, соответствующего формированию второго внеосевого максимума плотности.

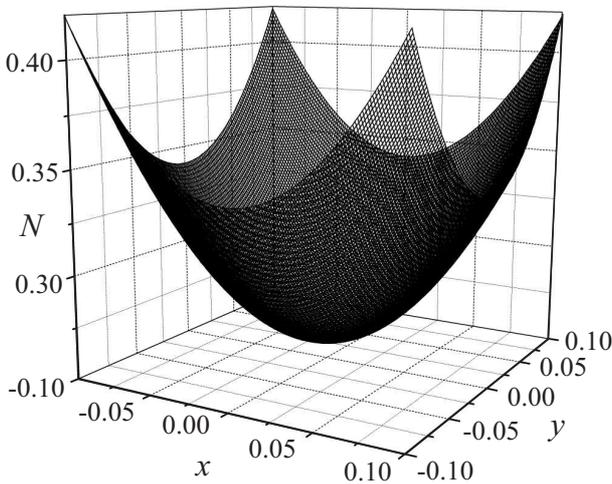


Рис. 5. Распределение плотности электронов в начальный момент времени

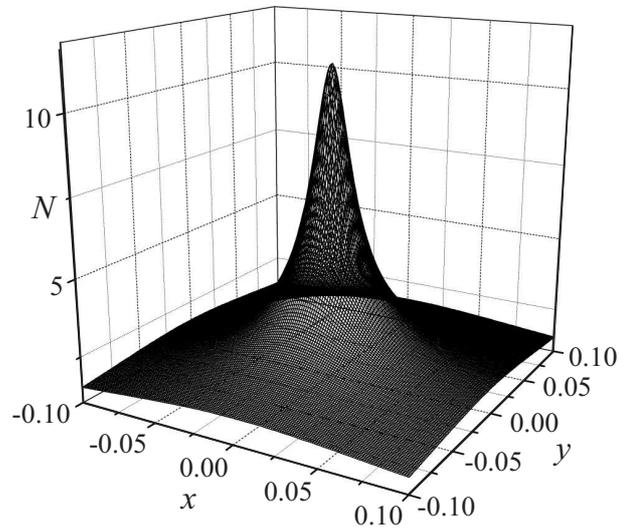


Рис. 6. Первый максимум электронной плотности, расположенный в центре области

Колебания начинаются с некоторого начального возмущения функции плотности электронов, приведенного на рис. 5. Легко видеть, что изображенная функция обладает круговой (аксиальной) симметрией, что соответствует столь же симметричной интенсивности лазерного импульса, имеющей дополнительно гауссово распределение в поперечном направлении. Избыток положительного заряда в начале координат приводит к движению электронов в направлении центра области, что через половину периода колебаний порождает другое распределение функции плотности, изображенное на рис. 6. Заметим, что концентрация электронов в центре области в моменты времени регулярных (периодических) максимумов может многократно превосходить равновесное значение. Здесь приводятся расчеты колебания небольшой интенсивности, когда плотность электронов всего примерно в 10 раз превышает в максимуме свое фоновое значение.

Если бы плазменные колебания сохраняли во времени свою пространственную форму, то представленные изображения плотности электронов регулярно меняли бы друг друга через каждую половину периода, порождая в центре области строго периодическую последовательность экстремумов с неизменными амплитудами. Однако в процессе распространения колебаний происходит постепенное искривление фазового фронта, поэтому по прошествии некоторого количества периодов формируется принципиально новая структура электронной плотности — с наличием кругового максимума, сравнимого по величине с регулярными в центре. В приводимом расчетном варианте на рис. 7 это произошло на шестом периоде свободных колебаний. Заметим, что для наглядности на рисунке приведена не вся область, а только ее четвертая часть. Подчеркнем важные отличия новой структуры: локальный по времени и глобальный по

пространству максимум плотности появляется на периоде в другое время (через короткое время после максимума в центре), в другом месте (по окружности) и более значительных масштабов (по сравнению с величиной регулярного минимума).

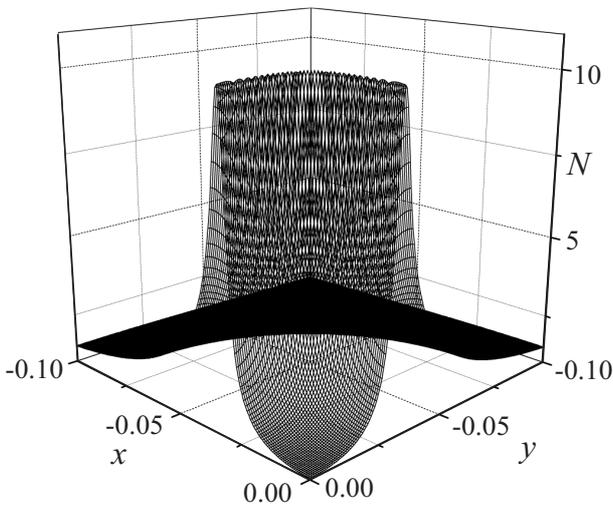


Рис. 7. Первый круговой максимум плотности электронов

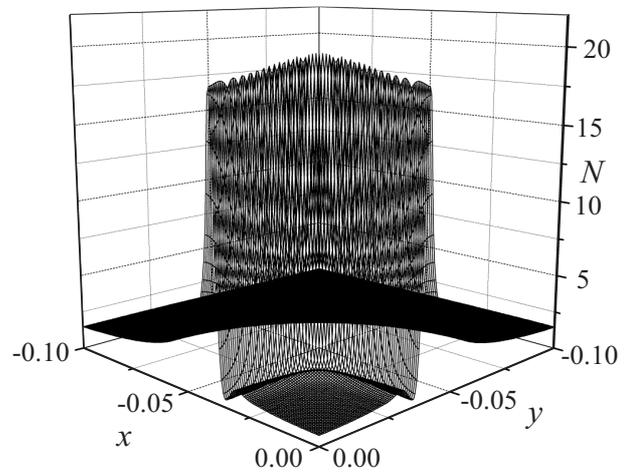


Рис. 8. Круговой максимум электронной плотности через период плазменных колебаний

Далее в процессе колебаний эта структура воспроизводится с монотонно увеличивающейся амплитудой. Правда, после ее появления она сначала преобразуется в подобие регулярного центрального минимума, затем формируется регулярный центральный максимум, а уже вслед за ним — очередной круговой максимум. Функция электронной плотности, соответствующая этому моменту времени, приведена на рис. 8 также на одной четвертой части области. Само значение этого максимума уже превосходит регулярное центральное значение примерно в два раза.

Напомним, что этот максимум является предвестником опрокидывания при рассматриваемых параметрах. На следующем периоде колебаний на месте кругового экстремума формируются бесконечные значения электронной плотности. Это означает, что решение задачи породило “ступеньку” электрического поля, дивергенция которого содержит сингулярность.

Описанная картина замечательно согласуется с одномерными расчетами, аккуратно проведенными в рамках различных моделей [5, 8, 12]. Кроме того, система (3.1) имеет в качестве частных решений нульмерные аксиальные решения, для которых в [17] получены не только необходимые и достаточные условия существования, но и аналитические формулы.

Необходимость использования мелких сеток для моделирования внеосевых экстремумов электронной плотности вместе с явной конструкцией расчетной схемы (что накладывает ограничение на величину шага по времени) приводит к необходимости использования колоссальных вычислительных ресурсов, доступных в настоящее время только в рамках современных высокопроизводительных вычислительных кластеров. В подавляющем большинстве подобных систем реализована гибридная параллельная архитектура, которая подразумевает объединение посредством высокопроизводительного канала множества многоядерных узлов с распределенной памятью. Указанные обстоятельства определили необходимость написания гибридной параллельной версии программы, при этом тот факт, что используемая схема является явной, а также регулярная структура расчетной сетки позволили без существенного изменения последовательного варианта программы [10] реализовать эффективный параллельный код.

В используемой для расчетов программе гибридность заключалась в наличии фактически двух уровней параллелизации: между узлами кластера (реализованная с помощью библиотеки MPI), а также внутри каждого расчетного узла (реализованная с помощью pthreads). При этом на каждом узле кластера запускался один mpi-процесс. В силу использования равномерной прямоугольной сетки задача декомпозиции решалась просто — разрезанием сеточной области на одинаковые полосы: узел с номером i работал с подсеткой $(k, l) \in \left[\frac{2M_x i}{N_{\text{tot}}} - (M_x + 1); \frac{2M_x(i+1)}{N_{\text{tot}}} - (M_x - 1) \right] \times [-M_y; M_y]$, где N_{tot} — общее количество узлов. В свою очередь, внутри каждого узла распределение задачи между ядрами также было равномерным.

Помимо этого, для оптимизации времени доступа к памяти с неоднородной архитектурой (в NUMA-системах, Non-Uniform Memory Access) был реализован алгоритм, позволяющий минимизировать коли-

чество обращений потока к нелокальной памяти того NUMA-узла, на котором он работает. Это было реализовано за счет того, что, во-первых, для каждого вычислительного потока производилась его привязка к NUMA-узлу, а во-вторых, инициализация памяти, с которой в основном оперирует данный поток, происходила на том NUMA-узле, на котором он работает. Отметим, что подобная мера позволила фактически двукратно улучшить масштабируемость при запуске на большом количестве (более 20) узлов кластера. Все численные эксперименты проводились на СКИФ МГУ “Чебышев”, состоящем из узлов с двумя четырехъядерными процессорами Intel Xeon E5472, соединенных сетью InfiniBand DDR.

Заключение. В настоящей работе приведены результаты численного моделирования эффекта опрокидывания нелинейных аксиально-симметричных релятивистских плазменных колебаний. В умеренно нелинейном режиме расчеты пространственно-временной структуры переменных проводились методом конечных разностей (в одномерном и двумерном случаях) и методом частиц (в одномерном случае). Численно показано, что после нескольких циклов колебаний на некотором расстоянии от начала координат формируется максимум плотности электронов. В дальнейшем с течением времени этот максимум резко нарастает, и по прошествии нескольких периодов плотность электронов обращается в бесконечность вследствие пересечения траекторий частиц. Появление сингулярности плотности или, что то же самое, опрокидывание плазменных колебаний сопровождается возникновением скачка электрического поля и формированием разрыва градиента скорости электронов.

Для двумерного моделирования указанного эффекта на компьютерах с распределенной памятью реализован явный метод второго порядка точности в эйлеровых переменных. Приведены результаты расчетов на СКИФ МГУ “Чебышев” на базе гибридного параллельного кода, хорошо согласующиеся с одномерными моделями.

Разработанное авторами математическое и программное обеспечение полностью подготовлено к перспективным исследованиям колебаний, не обладающих аксиальной (круговой) пространственной симметрией. С этой целью, как и в настоящей работе, предполагается использование суперкомпьютеров с распределенной памятью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hockney R. W., Eastwood J. W.* Computer simulation using particles. New York: McGraw-Hill, 1981.
2. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
3. *Birdsall C. K., Langdon A. B.* Plasma physics via computer simulation. New York: McGraw-Hill, 1985.
4. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы математической физики. М.: Наука, 1973.
5. *Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В., Андреев Н.Е.* Опрокидывание нелинейных цилиндрических колебаний плазмы // Физика плазмы. 2010. **36**, № 4. 375–386.
6. *Dawson J. M.* Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Phys. Review. 1959. **113**, N 2. 383–387.
7. *Chizhonkov E. V., Frolov A. A., Gorbunov L. M.* Modelling of relativistic cylindrical oscillations in plasma // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008. **23**, N 5. 455–467.
8. *Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В.* О моделировании нерелятивистских цилиндрических колебаний в плазме // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 1. 58–65.
9. *Попов А.В., Чижонков Е.В.* Об одной разностной схеме для расчета плазменных аксиально-симметричных колебаний // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**, № 1. 5–17.
10. *Chizhonkov E. V., Frolov A. A.* Numerical simulation of the breaking effect in nonlinear axially-symmetric plasma oscillations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2011. **26**, N 4. 379–396.
11. *Esarey E., Sprangle P., Krall J., Ting A.* Overview of plasma-based acceleration concepts // IEEE Trans. on Plasma Science. 1996. **24**. 252–288.
12. *Чижонков Е.В.* Численное моделирование аксиальных решений некоторых нелинейных задач // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**, № 2. 57–69.
13. *Базвалов Н.С.* Численные методы. 2-е изд. М.: Наука, 1975.
14. *Yee K. S.* Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 1966. **14**. 302–307.
15. *Лебедев В.И.* Разностные аналоги ортогональных разложений и основных операторов математической физики // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1964. **4**, № 3. 449–465; № 4. 649–659.
16. *Verboncoeur J. P.* Particle simulation of plasmas: review and advances // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2005. **47**. A231–A260.
17. *Чижонков Е.В.* К моделированию электронных колебаний в плазменном слое // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2011. **51**, № 3. 456–469.

Поступила в редакцию
08.05.2013