

УДК 519.6

## МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ДВУХШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ЛЕВЕНБЕРГА–МАРКВАРДТА В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ

А. В. Елесин<sup>1</sup>, А. Ш. Кадырова<sup>1</sup>

Предложены модификации двухшаговых методов Левенберга–Марквардта минимизации функции невязки. На модельных задачах идентификации коэффициента фильтрации трехмерного пласта показано преимущество по вычислительным затратам предложенных методов в задачах как без погрешностей, так и с погрешностями в замерах напора.

**Ключевые слова:** минимизация функции невязки, обратная задача.

**1. Введение.** Рассматривается задача идентификации коэффициента фильтрации водоносного пласта по замерам напора в наблюдательных точках [1, 2]. Значения идентифицируемых параметров определяются в процессе минимизации функции невязки, имеющей вид суммы квадратов разностей между вычисленными и заданными значениями напора в наблюдательных точках. Функция невязки, как правило, имеет овражную структуру, и для ее минимизации обычно используются квазиньютоновские методы. В [3, 4] предложены двухшаговые методы минимизации функции невязки, построенные на основе метода Гаусса–Ньютона и различных вариантов метода Левенберга–Марквардта. В двухшаговых методах смещение параметров на каждой итерации проводится следующим образом. Первый шаг выполняется по алгоритмам классических методов, но допускается увеличение функции невязки. На втором шаге, в случае увеличения функции невязки, проводится спуск ко дну оврага. Итоговые значения функции невязки на итерациях образуют убывающую последовательность.

В настоящей статье предлагаются модификации двухшаговых методов Левенберга–Марквардта с дополнительными смещениями параметров на втором шаге. На модельных задачах идентификации коэффициента фильтрации трехмерного анизотропного пласта проводится сравнение модифицированных двухшаговых методов Левенберга–Марквардта с двухшаговыми и стандартными квазиньютоновскими методами. В модельных задачах по известным значениям коэффициента фильтрации (истинные значения) определяются значения напора в наблюдательных точках. Далее значения коэффициента фильтрации считаются неизвестными, и их требуется определить. Модельные задачи решаются как без погрешностей, так и с погрешностями, вносимыми в замеры напора. При решении задач с погрешностями для получения значений коэффициента фильтрации, более близких к истинным, используется критерий выбора номера итерации с итоговыми значениями идентифицируемых параметров [3].

### 2. Модельные задачи идентификации коэффициента фильтрации неоднородного пласта.

Идентификация коэффициента фильтрации трехмерного анизотропного водоносного пласта  $\Omega$  проводится в условиях напорной стационарной однофазной фильтрации жидкости, подчиняющейся закону Дарси. Уравнение фильтрации записывается в виде [5]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $h = h(x, y, z)$  — напор,  $K_{xy} = K_{xy}(x, y, z)$  и  $K_z = K_z(x, y, z)$  — коэффициенты фильтрации. На границе  $\Gamma$  пласта  $\Omega$  задаются граничные условия 1-го и 2-го рода. Коэффициенты фильтрации представляются кусочно-постоянными функциями. Пласт имеет слоистую структуру, каждый слой разбит на зоны однородности  $\Omega_k$ ,  $\bigcup_{k=1}^{nz} \Omega_k = \Omega$ , где  $nz$  — число зон однородности. Каждая зона однородности характеризуется двумя значениями коэффициента фильтрации  $K_{xyk}$  и  $K_{zk}$ , которые обычно значительно отличаются друг от друга.

Задача идентификации коэффициента фильтрации  $K_{xyk}$ ,  $K_{zk}$  является обратной коэффициентной задачей. Для ее решения используется дополнительная информация — значения напора в наблюдательных

<sup>1</sup> Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН (ИММ КазНЦ РАН), ул. Лобачевского, 2/31, 420111, Казань; А. В. Елесин, и.о. зав. лаб., e-mail: elesin@mail.knc.ru, А. Ш. Кадырова, ст. науч. сотр., e-mail: kadyrova@mail.knc.ru

точках. Стандартным методом решения этой задачи является определение значений идентифицируемых параметров из минимума функции невязки  $J = J(K) = \frac{1}{2} R^T R$ , где  $K = \{K_i\}_{i=1}^N = \{\ln K_{xyi}, \ln K_{zi}\}_{i=1}^{nz}$  — логарифмы идентифицируемых значений коэффициента фильтрации,  $R^T = (h_1 - h_1^*, \dots, h_M - h_M^*)$  — вектор невязки,  $h_j$  и  $h_j^*$  — вычисленные и известные значения напора в наблюдательных точках,  $M$  — число наблюдательных точек,  $N = 2nz$  — число идентифицируемых значений. Переход к логарифмам значений коэффициента фильтрации позволяет использовать методы безусловной минимизации и улучшить процесс минимизации.

Для тестирования алгоритмов решения задачи идентификации коэффициента фильтрации используются модельные задачи, в которых всегда известно точное решение. Из решения уравнения фильтрации (1) при заданных значениях коэффициента фильтрации  $K_{xyi}^{tr}$  и  $K_{zi}^{tr}$  ( $i = 1, \dots, nz$ ) определяются значения напора в наблюдательных точках  $h_j^{tr}$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Затем по значениям напора  $h_j^* = h_j^{tr} + \delta_j$  ( $\delta_j$  — задаваемая погрешность) восстанавливаются значения коэффициента фильтрации  $K_{xyi}$ ,  $K_{zi}$  в зонах однородности. Значения  $K_{xyi}^{tr}$  и  $K_{zi}^{tr}$  являются точным решением этой задачи. В процессе идентификации значения коэффициента фильтрации  $K_{xyi}^{tr}$ ,  $K_{zi}^{tr}$  и погрешности  $\delta_j$  в замерах напора считаются неизвестными.

Уравнение фильтрации решается численно. Методом конечных элементов Галеркина оно преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений, которая затем решается методом сопряженных градиентов с предобуславливающей матрицей в виде неполного разложения Холецкого [6].

Модельные задачи идентификации коэффициента фильтрации построены для пласта  $\Omega$  реальной конфигурации. Размеры пласта:  $\approx 40$  км  $\times$   $\approx 30$  км  $\times$   $\approx 200$  м. Пласт состоит из пяти горизонтальных слоев. Первый слой пласта состоит из 11, а слои со второго по пятый — из 15 зон однородности каждый (всего 71 зона однородности). В каждой зоне однородности по две наблюдательные точки (всего 142 наблюдательные точки). Значения коэффициента фильтрации  $K_{xyk}^{tr}$  заданы из промежутка от 0.1 м/сут до 100 м/сут, а значения  $K_{zk}^{tr}$  — из промежутка от 0.0001 м/сут до 0.02 м/сут. На кровле пласта заданы граничные условия 2-го рода (меняются от  $-9.2 \times 10^{-3}$  м/сут до  $2 \times 10^{-3}$  м/сут). Подошва и боковая поверхность пласта непроницаемы, за исключением части боковой поверхности пятого слоя. Модельные задачи отличаются друг от друга граничными условиями 1-го рода на участках боковой поверхности пятого слоя. В первой модельной задаче один участок с граничным условием 1-го рода:  $h = 80$  м, во второй — два участка с граничными условиями 1-го рода:  $h = 80$  м и  $h = 90$  м.

**3. Стандартные методы минимизации функции невязки.** Для минимизации функции невязки широко используются итерационные методы квазиньютоновского типа [1, 7, 8]. На каждой итерации этих методов переход к новым значениям параметров выполняется по формуле  $K^n = K^{n-1} + \lambda_n d^n$ , где  $n$  — номер итерации,  $d^n$  — направление спуска,  $\lambda_n$  — величина шага. При этом должно выполняться условие убывания функции невязки  $J(K^n) < J(K^{n-1})$ .

В методе Давидона–Флетчера–Пауэлла направление спуска вычисляется по формуле  $d^n = -H^n g^n$ , где

$$g^n = \nabla J(K^{n-1}), \quad H^n = H^{n-1} + \frac{\Delta K^n (\Delta K^n)^T}{(\Delta K^n)^T \Delta g^n} - \frac{H^{n-1} \Delta g^n (\Delta g^n)^T H^{n-1}}{(\Delta g^n)^T H^{n-1} \Delta g^n},$$

$$\Delta K^n = K^{n-1} - K^{n-2}, \quad \Delta g^n = g^n - g^{n-1}, \quad H^1 = E.$$

Значение шага  $\lambda_n$  определяется методом золотого сечения из условия минимума функции невязки вдоль направления спуска. Метод Бройдена–Флетчера–Голдфарба–Шэнно отличается от метода Давидона–Флетчера–Пауэлла только построением матриц

$$H^n = H^{n-1} + \left( 1 + \frac{(\Delta g^n)^T H^{n-1} \Delta g^n}{(\Delta K^n)^T \Delta g^n} \right) \frac{\Delta K^n (\Delta K^n)^T}{(\Delta K^n)^T \Delta g^n} - \left( \frac{\Delta K^n (\Delta g^n)^T H^{n-1} + H^{n-1} \Delta g^n (\Delta K^n)^T}{(\Delta K^n)^T \Delta g^n} \right).$$

В методе Гаусса–Ньютона направление спуска определяется из решения системы  $H^n d^n = -g^n$ , где  $H^n = (A^n)^T A^n$ ,  $A^n = \left\{ \frac{\partial h_j}{\partial K_i} \right\}$  — матрица чувствительности, вычисленная в точке  $K^{n-1}$ ,  $\lambda_n = 1$ . В модифицированном методе Гаусса–Ньютона используется процедура поиска шага  $\lambda_n$  вдоль направления спуска.

В методе Левенберга–Марквардта направление спуска вычисляется как  $d^n = -(H^n + \mu_n E)^{-1} g^n$ , где  $\mu_n \geq 0$  — параметр Марквардта. При больших значениях  $\mu_n$  направление спуска метода Левенберга–Марквардта близко к направлению метода наискорейшего спуска, при малых значениях  $\mu_n$  — к направлению метода Гаусса–Ньютона. Различные модификации метода Левенберга–Марквардта отличаются стратегией изменения параметра  $\mu_n$  в процессе минимизации.

Рассмотрим два варианта метода Левенберга–Марквардта. В первом варианте начальное значение параметра Марквардта  $\mu_1$  выбирается на порядок больше максимального сингулярного числа матрицы  $H^1$ . На каждой итерации в случае нарушения условия убывания функции невязки параметр Марквардта увеличивается в два раза до тех пор, пока это условие не выполнится. При переходе к следующей итерации параметр Марквардта уменьшается в два раза. Во втором варианте параметр  $\mu_n$  определяется из условия минимума функции невязки  $\min_{\mu_n} J(K^{n-1} - (H^n + \mu_n E)^{-1} g^n)$ . Величина шага  $\lambda_n$  в обоих вариантах берется равной единице.

Для остановки процесса минимизации использовались два критерия:

- 1) медленная сходимость итерационного процесса  $J(K^{n-1}) - J(K^n) < 0.01J(K^{n-1})$  в течение 3 итераций;
- 2) достижение заданной точности по напору в наблюдательных точках  $r_{\max} = \max_j |h_j(K^n) - h_j^*| \leq 10^{-6}$ .

Для вычисления производных  $\frac{\partial h_j}{\partial K_i}$  использовался метод прямого дифференцирования уравнения фильтрации [1, 2].

Таблица 1

Результаты решения модельных задач, полученные стандартными методами минимизации

| Задача | Методы                            | Начальное состояние |                  | Конечное состояние   |                     |          |
|--------|-----------------------------------|---------------------|------------------|----------------------|---------------------|----------|
|        |                                   | $r_{\max}$          | $\Delta \ln K^0$ | $r_{\max}$           | $\Delta \ln K^{it}$ | $n_{it}$ |
| 1      | Давидона–Флетчера–Пауэлла         |                     |                  | 0.75                 | 1.58                | 45**     |
|        | Бройдена–Флетчера–Голдфарба–Шэнно |                     |                  | 0.76                 | 1.6                 | 69**     |
|        | Левенберга–Марквардта, вариант 1  | 7.2                 | 1.7              | $0.9 \times 10^{-6}$ | 0.24                | 248      |
|        | Левенберга–Марквардта, вариант 2  |                     |                  | $10^{-6}$            | 0.24                | 332      |
|        | Гаусса–Ньютона с поиском шага     |                     |                  | 6.77                 | 2.15                | 4**      |
| 2      | Давидона–Флетчера–Пауэлла         |                     |                  | 0.74                 | 1.54                | 72**     |
|        | Бройдена–Флетчера–Голдфарба–Шэнно |                     |                  | 0.81                 | 1.61                | 65**     |
|        | Левенберга–Марквардта, вариант 1  | 7.5                 | 1.7              | $10^{-6}$            | 0.02                | 48       |
|        | Левенберга–Марквардта, вариант 2  |                     |                  | $10^{-6}$            | 0.02                | 109      |
|        | Гаусса–Ньютона с поиском шага     |                     |                  | 5.42                 | 11.02               | 13**     |

В табл. 1 приведены значение максимальной невязки в наблюдательных точках  $r_{\max}$ , среднеквадратическое отклонение значений коэффициента фильтрации от истинных значений

$$\Delta \ln K^n = \left[ \sum_{k=1}^{71} \frac{(\ln K_{xyk}^{tr} - \ln K_{xyk}^n)^2 + (\ln K_{zk}^{tr} - \ln K_{zk}^n)^2}{142} \right]^{1/2}$$

для начального и конечного состояний процесса идентификации, число выполненных итераций  $n_{it}$ , полученные методом Гаусса–Ньютона с поиском шага, методами Давидона–Флетчера–Пауэлла, Бройдена–Флетчера–Голдфарба–Шэнно, Левенберга–Марквардта. В таблице символы \*\* показывают, что процесс минимизации прерван по критерию медленной сходимости.

Заданная точность по напору была достигнута только при использовании метода Левенберга–Марквардта (оба варианта), в остальных случаях процесс минимизации был прерван по критерию медленной сходимости. При использовании метода Гаусса–Ньютона процесс минимизации прерывался на первой итерации из-за нарушения условия убывания функции невязки.

**4. Построение модифицированных двухшаговых методов Левенберга–Марквардта.** В работах [3,4] были предложены двухшаговые методы Левенберга–Марквардта (ДЛМ), построенные на основе первого и второго вариантов метода Левенберга–Марквардта. В этих методах используется система координат (далее главная система координат), полученная с помощью сингулярного разложения матрицы  $H = V\Sigma V^T$ , где  $V$  — ортогональная матрица,  $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  — диагональная матрица,  $\sigma_i$  — сингулярные числа,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$ . Направления минимизации в главной системе координат условно делятся на две группы: направления, соответствующие большим сингулярным числам, и направления, соответствующие маленьким сингулярным числам.

На первом шаге этих методов допускается увеличение функции невязки за счет направлений с большими сингулярными числами. На втором шаге вдоль этих направлений проводится дополнительное смещение параметров. При построении методов используются запасы чувствительности [3, 9]. Запасом чувствительности  $i$ -й переменной называется величина  $P_i = -d_i g_i$ , где  $d_i$  — компоненты вектора спуска Гаусса–Ньютона,  $g_i$  — компоненты градиента функции невязки. В окрестности минимума функции невязки запас чувствительности  $P_i$  характеризует потенциальную возможность  $i$ -й переменной к минимизации функции невязки. Если число наблюдений равно числу переменных минимизации и матрица чувствительности невырожденная, то сумма запасов чувствительности всех переменных минимизации (запас чувствительности функции невязки) равна квадрату вектора невязки. Если число наблюдений больше числа переменных минимизации, то запас чувствительности функции невязки не превосходит квадрата вектора невязки.

Каждая итерация двухшагового метода ДЛМ1, построенного на основе первого варианта метода Левенберга–Марквардта (ЛМ1), включает в себя последовательность следующих операций:

1) вычисляется  $J^1(\mu_n) = J(K^{n-1} + d^1)$ , где  $d^1 = -(H + \mu_n E)^{-1}g$ ; затем проверяется неравенство  $J^1(\mu_n) < J(K^{n-1})$ ; если оно выполняется, то  $K^n = K^{n-1} + d^1$ ,  $\mu_{n+1} = \frac{1}{2}\mu_n$ , и итерация заканчивается, иначе выполняется пункт 2;

2) вычисляется  $J^2(\mu_n) = J(K^{n-1} + d^1 + d^2)$ , где  $d^2 = V\tilde{d}_V$ ,  $\tilde{d}_V$  — вектор с компонентами  $\tilde{d}_{V_i} = \frac{-\tilde{g}_{V_i}}{\sigma_i + \mu_n}$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $\tilde{d}_{V_i} = 0$ ,  $i = q + 1, \dots, n$ ,  $\tilde{g}_{V_i}$  — компоненты вектора  $\tilde{g}_V = V^T \tilde{g}$ ,  $\tilde{g} = A^T \tilde{R}$ ,  $\tilde{R}$  — вектор невязок в точке  $K^{n-1} + d^1$ , номер оси  $q$  выбирается из условия  $\sigma_q > \mu_n \geq \sigma_{q+1}$ ; проверяется условие  $J^2(\mu_n) < J(K^{n-1})$ ; если оно выполняется, то  $K^n = K^{n-1} + d^1 + d^2$ ,  $\mu_{n+1} = \frac{1}{2}\mu_n$ , и итерация заканчивается. В противном случае значение  $\mu_n$  полагается равным  $2\mu_n$  и повторяется пункт 1.

Двухшаговый метод ДЛМ2, построенный на основе второго варианта метода Левенберга–Марквардта (ЛМ2), отличается от метода ДЛМ1 выбором параметра  $\mu_n$ . На каждой итерации метода ДЛМ2 методом золотого сечения определяется  $\mu_n^* = \arg \min_{\mu_n} \Phi(\mu_n)$ , где  $\Phi(\mu_n) = \min \{J^1(\mu_n), J^2(\mu_n)\}$ . Затем проверяется условие  $J^1(\mu_n^*) \leq J^2(\mu_n^*)$ . Если оно выполняется, то  $K^n = K^{n-1} + d^1$ , в противном случае  $K^n = K^{n-1} + d^1 + d^2$ .

Отметим, что в методах ДЛМ1 и ДЛМ2 для определения вектора  $d^1$  используются значения невязок в точке  $K^{n-1}$ , а для определения вектора  $d^2$  — значения невязок в точке  $K^{n-1} + d^1$ , при этом используется матрица чувствительности  $A$ , вычисленная в точке  $K^{n-1}$ . Формирование матрицы чувствительности требует больших вычислительных затрат, и использование одной и той же матрицы  $A$  для обоих шагов позволяет их сократить.

В двухшаговых методах Левенберга–Марквардта второй шаг проводится для уменьшения запаса чувствительности, сосредоточенного на осях, соответствующих большим сингулярным числам. Рассмотрим распределение запаса чувствительности в главной системе координат на 15-й итерации метода ДЛМ2 при решении первой модельной задачи (рис. 1), где  $\mu_{15} = 1.34 \times 10^{-5}$ .

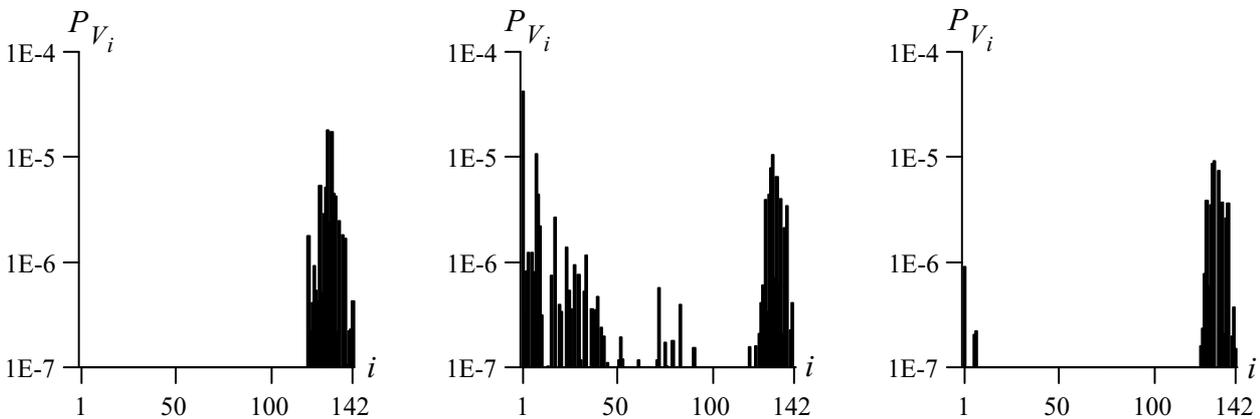


Рис. 1. Распределение запаса чувствительности на 15-й итерации: в начале (слева), после первого шага (в центре) и после второго шага (справа) для  $\mu_{15} = 1.34 \times 10^{-5}$

Из рис. 1 видно, что запас чувствительности на осях, соответствующих большим сингулярным числам, после второго шага меньше, чем после первого шага, но больше, чем в начале итерации. Проведем

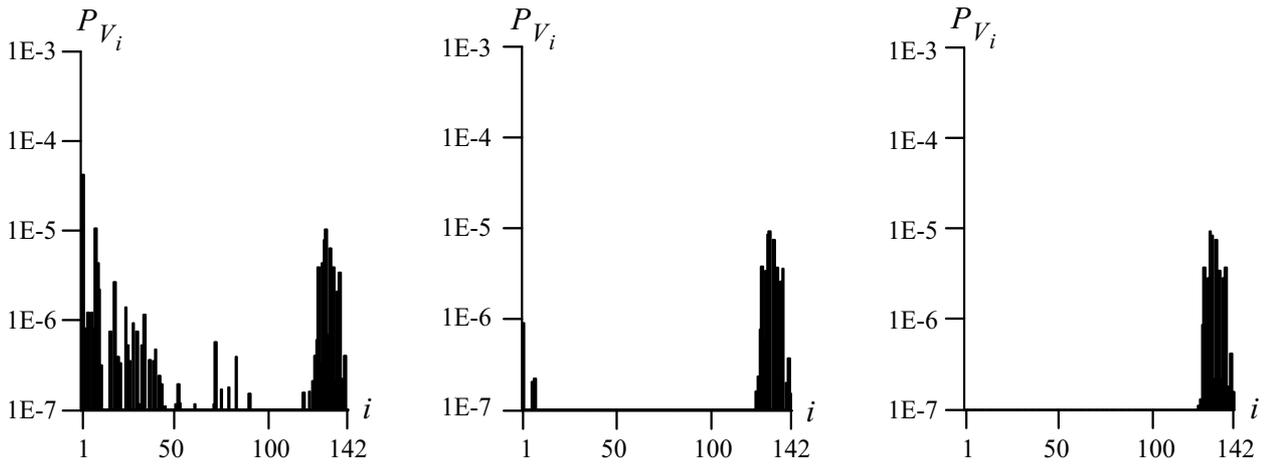


Рис. 2. Распределение запаса чувствительности на 15-й итерации: после первого (слева), второго (в центре) и пятого (справа) шагов для  $\mu_{15} = 1.34 \times 10^{-5}$

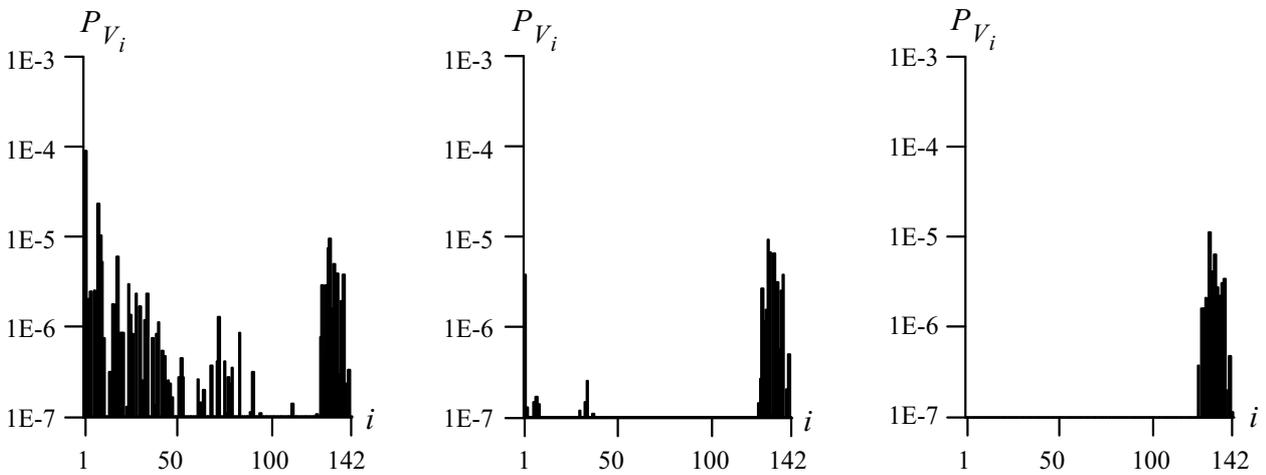


Рис. 3. Распределение запаса чувствительности на 15-й итерации: после первого (слева), второго (в центре) и восьмого (справа) шагов для  $\mu_{15} = 1.0 \times 10^{-5}$

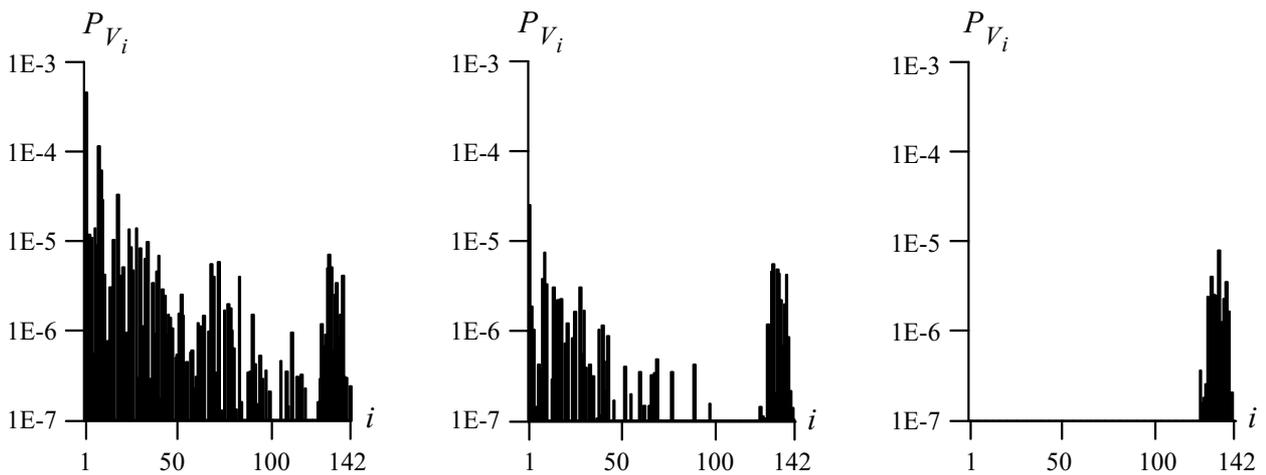


Рис. 4. Распределение запаса чувствительности на 15-й итерации: после первого (слева), второго (в центре) и восьмого (справа) шагов для  $\mu_{15} = 0.5 \times 10^{-5}$

еще несколько шагов, аналогичных второму шагу. Полученные распределения запаса чувствительности после первого, второго и пятого шагов показаны на рис. 2. Из рис. 2 видно, что после пятого шага запас чувствительности на осях, соответствующих большим сингулярным числам, практически полностью

обнуляется.

Аналогично проведем смещение параметров на 15-й итерации с другими значениями параметра  $\mu_{15}$ . Распределение запаса чувствительности после первого, второго и восьмого шагов для  $\mu_{15} = 1.0 \times 10^{-5}$  показаны на рис. 3, для  $\mu_{15} = 0.5 \times 10^{-5}$  — на рис. 4. Значения функции невязки приведены в табл. 2.

Из рис. 3 и 4 видно, что для всех приведенных значений запаса чувствительности после нескольких смещений в направлениях, соответствующих большим сингулярным числам, практически полностью обнуляется на осях, соответствующих большим сингулярным числам. Из результатов, приведенных в табл. 2, видно, что, уменьшая значение параметра Марквардта и выполняя несколько дополнительных смещений параметров в направлениях, соответствующих большим сингулярным числам, можно получить значение функции невязки меньшее, чем значение, полученное методом ДЛМ2.

Таблица 2

Значения функции невязки, полученные при различных значениях  $\mu_{15}$  на 15-й итерации

| $\mu_{15}$            | В начале итерации     | После 1-го шага       | После 2-го шага       | В конце итерации      |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $1.34 \times 10^{-5}$ |                       | $1.26 \times 10^{-4}$ | $4.73 \times 10^{-5}$ | $4.57 \times 10^{-5}$ |
| $1.0 \times 10^{-5}$  | $7.12 \times 10^{-5}$ | $2.16 \times 10^{-4}$ | $4.75 \times 10^{-5}$ | $4.1 \times 10^{-5}$  |
| $0.5 \times 10^{-5}$  |                       | $9.55 \times 10^{-4}$ | $1.05 \times 10^{-4}$ | $3.19 \times 10^{-5}$ |

Построим модификацию метода ДЛМ1, в которой на каждой итерации смещение переменных по направлениям, соответствующим большим сингулярным числам, проводится несколько раз (далее метод ДЛМ1М). Каждая итерация метода ДЛМ1М состоит из последовательности следующих операций:

1) вычисляется  $J^1(\mu_n) = J(K^{n1})$ , где  $K^{n1} = K^{n-1} + d^1$ ; проверяется неравенство  $J^1(\mu_n) < J(K^{n-1})$ ; если оно выполняется, то  $K^n = K^{n1}$ ,  $\mu_{n+1} = \frac{1}{2} \mu_n$ , и итерация заканчивается, иначе выполняется пункт 2;

2) последовательно вычисляются значения  $J^t(\mu_n) = J(K^{nt})$ ,  $t = 2, 3, \dots$ , где  $K^{nt} = K^{n,t-1} + d^t$ ,  $d^t = V\tilde{s}_V$ ,  $\tilde{s}_V = \frac{\tilde{g}_V}{\sigma_i + \mu_n}$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $\tilde{s}_V = 0$ ,  $i = q + 1, \dots, N$ ,  $\tilde{g}_V$  — компоненты вектора  $\tilde{g}_V = V^T \tilde{g}$ ,  $\tilde{g} = A^T \tilde{R}$ ,  $\tilde{R}$  — вектор невязок в точке  $K^{n,t-1}$ , номер оси  $q$  выбирается из условия  $\sigma_q > \mu_n \geq \sigma_{q+1}$ ; значения  $J^t(\mu_n)$  вычисляются, пока выполняется условие  $J^{t-1}(\mu_n) - J^t(\mu_n) > 0.01 J^{t-1}(\mu_n)$ ,  $t \geq 2$ ; если минимальное из двух последних вычисленных  $J^t(\mu_n)$  меньше  $J(K^{n-1})$ , то за новые значения параметров принимаются значения, соответствующие минимальному  $J^t(\mu_n)$ , параметр Марквардта уменьшается в два раза, и итерация заканчивается; в противном случае параметр Марквардта увеличивается в два раза и возвращаемся к пункту 1.

Аналогично методу ДЛМ1М строится метод ДЛМ2М, в основе которого лежит метод ДЛМ2.

На каждой итерации метода ДЛМ2 методом золотого сечения определяется  $\mu_n^* = \arg \min_{\mu_n} \Phi(\mu_n)$ , где  $\Phi(\mu_n) = \min_t \{J^t(\mu_n)\}$ . За новые значения параметров принимаются значения, соответствующие значению  $\Phi(\mu_n^*)$ .

Основные вычислительные затраты минимизации функции невязки при решении задачи идентификации коэффициента фильтрации приходятся на вычисление значений функции невязки (решение уравнения фильтрации) и на вычисление элементов матрицы чувствительности (решение уравнений, полученных прямым дифференцированием уравнения фильтрации). Для оценки этих затрат введем число  $n_c$ , равное сумме числа уравнений, решенных для вычисления значений функции невязки, и числа уравнений, решенных для вычисления матрицы чувствительности в течение всего процесса минимизации. Результаты решения модельных задач методами Левенберга–Марквардта (ЛМ1 и ЛМ2), двухшаговыми методами Левенберга–Марквардта (ДЛМ1 и ДЛМ2) и их модификациями (ДЛМ1М и ДЛМ2М) приведены в табл. 3, где  $n_{it}$  — число итераций.

Из табл. 3 видно, что заданная точность по напорам в наблюдательных точках достигается всеми приведенными методами Левенберга–Марквардта. Сравнение методов показывает, что модифицированные двухшаговые методы для обеих модельных задач сходятся за меньшее число итераций и с меньшими вычислительными затратами.

**5. Решение модельных задач с погрешностями в замерах напора.** В реальных задачах идентификации коэффициента фильтрации в замерах напора всегда присутствует некоторая погрешность, связанная с точностью измерений. Математическое моделирование реального объекта предполагает некоторое упрощение задачи, что так же является источником погрешностей. Как правило, при наличии по-

Таблица 3

Результаты решения модельных задач без погрешности в замерах напора методами Левенберга–Марквардта

| Задача | Методы | Начальное состояние |                  | Конечное состояние |                     |          |       |
|--------|--------|---------------------|------------------|--------------------|---------------------|----------|-------|
|        |        | $r_{\max}$          | $\Delta \ln K^0$ | $r_{\max}$         | $\Delta \ln K^{it}$ | $n_{it}$ | $n_c$ |
| 1      | ЛМ1    | 7.18                | 1.7              | $9 \times 10^{-7}$ | 0.24                | 248      | 35670 |
|        | ДЛМ1   |                     |                  | $9 \times 10^{-7}$ | 0.27                | 110      | 15946 |
|        | ДЛМ1М  |                     |                  | $7 \times 10^{-7}$ | 0.27                | 59       | 8666  |
|        | ЛМ2    |                     |                  | $1 \times 10^{-6}$ | 0.24                | 332      | 50700 |
|        | ДЛМ2   |                     |                  | $8 \times 10^{-7}$ | 0.26                | 82       | 13368 |
|        | ДЛМ2М  |                     |                  | $4 \times 10^{-7}$ | 0.25                | 17       | 4534  |
| 2      | ЛМ1    | 7.46                | 1.7              | $1 \times 10^{-6}$ | 0.02                | 48       | 6867  |
|        | ДЛМ1   |                     |                  | $2 \times 10^{-6}$ | 0.02                | 47       | 6727  |
|        | ДЛМ1М  |                     |                  | $6 \times 10^{-7}$ | 0.02                | 45       | 6547  |
|        | ЛМ2    |                     |                  | $1 \times 10^{-6}$ | 0.02                | 109      | 16646 |
|        | ДЛМ2   |                     |                  | $7 \times 10^{-7}$ | 0.02                | 35       | 5697  |
|        | ДЛМ2М  |                     |                  | $9 \times 10^{-7}$ | 0.03                | 17       | 4010  |

грешностей в замерах напора значения идентифицируемых параметров в процессе минимизации начинают с некоторой итерации удаляться от своих истинных значений, хотя при этом функция невязки продолжает уменьшаться. Одним из регуляризирующих элементов решения таких задач является применение специальных правил останова процесса минимизации. В данной работе итоговые значения коэффициента фильтрации берутся с  $k - i$  итерации, где  $k$  — номер итерации, с которого начинается медленная сходимость процесса минимизации,  $i$  — наибольший номер ( $i = 1, 2, \dots$ ), при котором выполняется условие  $J^{k-i} < 1.5J^k$  [3]. Результаты решения модельных задач с различными погрешностями  $\delta_j$  в замерах напора, полученные методами ЛМ1, ДЛМ1М, ЛМ2 и ДЛМ2М, приведены в табл. 4 и 5.

Таблица 4

Результаты решения модельных задач с погрешностями в замерах напора методами ЛМ1, ДЛМ1М

| Задача | $\delta_j$ | $\Delta \ln K^0$ | ЛМ1                 |                  |       | ДЛМ1М               |                  |       |
|--------|------------|------------------|---------------------|------------------|-------|---------------------|------------------|-------|
|        |            |                  | $\Delta \ln K^{it}$ | $\Delta \ln K^s$ | $n_c$ | $\Delta \ln K^{it}$ | $\Delta \ln K^s$ | $n_c$ |
| 1      | 0.1        | 1.7              | 1.08                | 1.02             | 6885  | 1.08                | 1.02             | 5368  |
|        | 0.01       |                  | 0.83                | 0.79             | 5872  | 0.9                 | 0.8              | 5816  |
|        | -0.1       |                  | 1.47                | 1.07             | 6307  | 1.54                | 1.04             | 5215  |
|        | -0.01      |                  | 0.52                | 0.61             | 11058 | 0.55                | 0.62             | 6284  |
| 2      | 0.1        | 1.7              | 1.25                | 1.08             | 5733  | 1.2                 | 1.09             | 5353  |
|        | 0.01       |                  | 0.86                | 0.52             | 8602  | 1.06                | 0.56             | 6222  |
|        | -0.1       |                  | 1.08                | 1.0              | 5878  | 1.07                | 0.99             | 5655  |
|        | -0.01      |                  | 1.59                | 0.6              | 0.55  | 1.59                | 0.59             | 0.55  |

Из результатов, приведенных в табл. 4 и 5, видно, что итоговые значения коэффициента фильтрации, полученные модифицированными двухшаговыми методами, сравнимы со значениями, полученными стандартными методами Левенберга–Марквардта. При этом использование модифицированных двухшаговых методов сокращает вычислительные затраты по сравнению со стандартными методами.

**6. Заключение.** Построены модификации двухшаговых методов Левенберга–Марквардта минимизации функции невязки. В этих методах, как и в двухшаговых методах, предложенных ранее, смещение

Таблица 5

Результаты решения модельных задач с погрешностями  
в замерах напора методами ЛМ2, ДЛМ2М

| Задача | $\delta_j$ | $\Delta \ln K^0$ | ЛМ2                 |                  |       | ДЛМ2М               |                  |      |
|--------|------------|------------------|---------------------|------------------|-------|---------------------|------------------|------|
|        |            |                  | $\Delta \ln K^{it}$ | $\Delta \ln K^s$ | $nc$  | $\Delta \ln K^{it}$ | $\Delta \ln K^s$ | $nc$ |
| 1      | 0.1        | -0.1             | 1.05                | 1.03             | 7021  | 1.04                | 0.95             | 3528 |
|        | 0.01       |                  | 0.83                | 0.81             | 8552  | 0.81                | 0.77             | 2892 |
|        | 1.7        |                  | 1.27                | 1.05             | 6564  | 1.46                | 1.09             | 3328 |
|        | -0.01      |                  | 0.53                | 0.62             | 14968 | 0.99                | 0.63             | 4061 |
| 2      | 0.1        | 1.7              | 1.42                | 1.1              | 6248  | 1.41                | 1.3              | 3973 |
|        | 0.01       |                  | 0.72                | 0.52             | 11300 | 1.26                | 0.52             | 4727 |
|        | -0.1       |                  | 1.13                | 1.0              | 6255  | 1.1                 | 1.06             | 3078 |
|        | -0.01      |                  | 1.71                | 0.58             | 10387 | 2.68                | 1.1              | 4338 |

параметров на каждой итерации проводится в два этапа. На первом этапе возможно увеличение функции невязки, но по результатам выполнения итерации значение функции невязки уменьшается. Особенность этих методов заключается в том, что на втором шаге каждой итерации проводится не одно, как в двухшаговых методах, а несколько дополнительных смещений параметров. Это позволяет практически полностью обнулить запас чувствительности на осях, соответствующих большим сингулярным числам (в главной системе координат). На модельных задачах идентификации коэффициента фильтрации показано, что использование дополнительных смещений (спусков ко дну оврага) приводит к уменьшению вычислительных затрат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sun N.-Z. Inverse problems in groundwater modeling. Norwell: Kluwer, 1994.
2. Yeh W.W-G. Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: the inverse problem // Water Resour. Res. 1986. **22**, N 2. 95–108.
3. Мазуров П.А., Елесин А.В., Кадырова А.Ш. Квазиньютоновский двухшаговый метод минимизации функции невязки // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, № 1. 64–71.
4. Елесин А.В., Кадырова А.Ш., Мазуров П.А. Двухшаговые методы Левенберга–Марквардта в задаче идентификации коэффициента фильтрации // Георесурсы. 2009. **4**. 40–42.
5. Мироненко В.А. Динамика подземных вод. М: Изд-во Моск. гос. горного ун-та, 1996.
6. Larabi A., de Smedt F. Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods // Water Resour. Res. 1994. **30**, N 2. 509–521.
7. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988.
8. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2005.
9. Мазуров П.А., Габидуллина А.Н., Елесин А.В., Кадырова А.Ш. Запасы чувствительности в задачах идентификации коэффициента фильтрации трёхмерных пластов // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 1. 50–61.

Поступила в редакцию  
03.06.2013