

УДК 519.63+533.6

О РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ВИХРЕВОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ

А. А. Апарин¹, А. В. Сетуха²

Рассматривается программная реализация для многопроцессорных платформ алгоритма вихревого метода решения трехмерных задач аэродинамики в концепции, развиваемой авторами. Проводится анализ основных вычислительных затрат метода, формулируются новые классы задач, на решение которых направлено создание параллельной версии алгоритма. Приводятся результаты расчетов, иллюстрирующие возможности, возникающие за счет повышения производительности вычислений. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты ОФИ–М–2013–13–01–12061, М–2013–13–08–90468).

Ключевые слова: вихревые методы, параллельные вычисления, быстрые матричные алгоритмы, аэродинамика, несжимаемая жидкость.

1. Введение. Вихревые методы эффективно используются при решении различных прикладных задач аэродинамики в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости. Основная идея таких методов связана с тем, что поле скоростей жидкости ищется как суперпозиция скоростей, индуцируемых дискретными вихревыми элементами. С математической точки зрения такое представление поля скоростей есть дискретизация интегрального выражения для бездивергентного векторного поля через его ротор (в том числе с сингулярным распределением, сосредоточенным в тонкой поверхности разрыва касательной составляющей векторного поля) по закону Био–Савара. Описание вихревых методов и примеры их приложений можно найти в работах [1–4].

В России развитие и применение вихревых методов во многом связано с работами С. М. Белоцерковского и его последователей, начатыми в 50-х годах прошлого столетия. При этом непрерывно шло развитие метода, которое, с одной стороны, выражалось в повышении сложности решаемых задач, а с другой стороны, отражало прогресс в развитии используемой вычислительной техники.

Первые работы С. М. Белоцерковского были связаны с расчетом аэродинамических характеристик профилей крыльев при безотрывном обтекании. Задача решалась в приближении тонкого профиля. Профиль приближенно задавался тонкой срединной линией, которая аппроксимировалась системой дискретных точечных вихрей. Неизвестные циркуляции вихрей находились из системы линейных уравнений, выражающей условие непротекания профиля, проверяемое в специальном образом выбираемых контрольных точках (точках коллокации). Размерность возникающих систем линейных уравнений, определяемая числом дискретных вихрей, не превосходила одного–двух десятков [1].

Следующим шагом стало развитие методов нахождения аэродинамических характеристик тонких несущих поверхностей, которые аппроксимировались системой вихревых отрезков. В 70–80-х гг. XX века были отработаны и широко протестированы численные схемы решения задач об обтекании тонких крыльев в линейной стационарной постановке (в этих задачах предполагается, что на задней кромке крыла формируется вихревой след, который образован прямолинейными вихревыми шнурами, начинающимися на задней кромке и уходящими на бесконечность по скорости невозмущенного потока) и в нелинейной стационарной постановке (предполагается, что вихревой след образован вихревыми шнурами, которые начинаются на задней и боковых кромках крыльев, а также на наплывах крыла; форма этих вихревых шнуров находится итерационно так, чтобы они были направлены по линиям тока жидкости). Такие задачи с вычислительной точки зрения также сводились к решению систем линейных уравнений относительно циркуляций вихревых отрезков, моделирующих поверхность крыла, и вихревых шнуров, моделирующих вихревой след. При этом число уравнений составляло обычно несколько десятков [1].

Одновременно началось решение двумерных задач об отрывном обтекании тел, в которых предполагалось, что поверхность тела по-прежнему аппроксимируется системой точечных вихрей, интенсивности

¹ НИИ парашютостроения, ул. Иркутская, д. 2, корп. 1, 107241, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: andrey.aparinov@gmail.com

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 4, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: setuhaav@rambler.ru

которых, как и в стационарных задачах, находятся в каждый момент времени методом коллокации, а вихревой след за телом возникает на заданных точках отрыва и образован дискретными вихрями, которые движутся вместе в жидкими частицами в соответствии с уравнением переноса завихренности в идеальной несжимаемой жидкости. Преобразование формы вихревого следа на каждом шаге интегрирования по времени требует нахождения скорости жидкости для каждой точки, в которой расположен дискретный вихрь, моделирующий вихревой след, и эта скорость определяется суммированием скоростей, индуцируемых всеми дискретными вихрями. Тем самым, с вычислительной точки зрения, преобразование формы вихревых структур является частным случаем задачи N -тел. В 80-е годы прошлого столетия решались задачи, в которых число дискретных вихрей на поверхности тела обычно не превосходило 100, а число подвижных вихревых элементов достигало нескольких сотен [1, 5].

Моделирование существенно нестационарных трехмерных отрывных течений стало активно развиваться после появления метода замкнутых вихревых рамок, описанного в работах [6, 7]. В этом методе поверхности обтекаемых тел и вихревые следы за ними, образующиеся при отрыве потока с заданных линий отрыва, аппроксимируются системами замкнутых вихревых нитей (вихревых рамок). При этом, если в начале 90-х годов XX века использовались разбиения поверхностей обтекаемых тел, содержащие до 100–200 ячеек, то через 15 лет появилась возможность использовать до 1000 ячеек разбиения.

При увеличении степени детализации течения стал проявляться один из существенных недостатков метода вихревых рамок, заключающийся в том, что с течением времени может происходить сильное нефизичное растяжение сторон этих рамок, связанных в единую поверхность. При этом вихревой след теряет возможность огибать препятствия и теряется возможность моделирования процессов самоорганизации вихревых структур. В связи с этим авторами настоящей статьи развит комбинированный подход, при котором в вихревом следе выделяются две зоны: “ближняя” и “дальняя” [8]. Поверхность тела и ближняя зона вихревого следа аппроксимируются замкнутыми вихревыми рамками, а дальняя зона вихревого следа аппроксимируется изолированными вихревыми отрезками (отметим, что аналогичные приемы использовались в работах [4, 9]). Такой подход позволил проводить моделирование отрывного обтекания объектов сложной формы на существенно больших, чем ранее, временных промежутках развития вихревого следа. При этом возникла острая необходимость повышения производительности вычислений. С этой целью авторами было осуществлено применение методов приближенного ускоренного умножения матриц для пересчета формы вихревых структур [8] с использованием метода мозаично-скелетных аппроксимаций матриц, развиваемого Е. Е. Тыртышниковым [10, 11] (в литературе используется также термин “метод мозаично-скелетонных аппроксимаций матриц”).

В настоящей статье описаны результаты дальнейших разработок авторов по увеличению производительности метода и его адаптации к решению новых задач, связанных с применением многопроцессорных платформ. В статье проводится анализ основных вычислительных затрат метода, формулируются новые классы задач, на решение которых направлено создание параллельной версии алгоритма. Приводятся результаты исследований авторов по оценке роста производительности вычислений и открывающихся возможностей при решении прикладных задач.

2. Структура вычислительного алгоритма. Рассматривается нестационарное отрывное обтекание тела или системы тел в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости потоком, имеющим заданную постоянную скорость на бесконечности. Предполагается, что вихревой след образуется на линиях отрыва потока, заданных на поверхностях обтекаемых тел. На поверхностях тел должно выполняться условие непротекания (отсутствия потока жидкости через поверхность). Подробная постановка задачи и используемая численная схема описаны в работе [8].

В основе метода дискретных вихрей лежит идея замены несущих поверхностей моделируемых объектов системой дискретных вихревых элементов — вихревыми рамками. Интенсивности вихревых рамок являются неизвестными и находятся из граничного условия, проверяемого в точках коллокации. Вихревой след образуется на заданных линиях отрыва на поверхности тела. Вихревые элементы, моделирующие вихревой след, сдвигаются на каждом шаге интегрирования по времени вместе с жидкими частицами в соответствии с уравнением переноса завихренности в идеальной жидкости.

Коротко опишем структуру вычислительного алгоритма в случае, когда обтекаемые тела неподвижны. Поверхности обтекаемых тел аппроксимируются системой ячеек σ_i , $i = 1, \dots, n$, заданной формы, а линия отрыва потока аппроксимируется ломаными, звенья которых являются сторонами ячеек разбиения поверхности тела. Требования к разбиению поверхности описаны в [3]. По контуру каждой ячейки разбиения поверхностей тел размещается замкнутая вихревая нить (вихревая рамка). Вихревой след возникает за счет формирования в каждый момент времени вихревых рамок, примыкающих к линии отрыва, которые далее движутся вместе с жидкостью, имея не зависящие от времени циркуляции. Далее предпола-

гается, что каждый вихревой отрезок, образованный соседними сторонами таких рамок, через некоторое заданное число шагов после своего образования на линии отрыва преобразуется в изолированный отрезок, длина которого не должна увеличиваться. В результате отрезки, связанные в замкнутые рамки, разрываются и образуется участок вихревого следа (дальняя зона), моделируемый изолированными вихревыми отрезками (рис. 1).

Скорость жидкости в каждый дискретный момент времени $t_k = (k - 1)\Delta t$ ищется в виде

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_\infty + \sum_{i=1}^n \Gamma_i^k \mathbf{w}[\partial\sigma_i](\mathbf{x}) + \sum_{r=1}^{n_k} g_r \mathbf{w}[l_r](\mathbf{x}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — точка в области течения; $\mathbf{W}[l]$ — поле скоростей, индуцируемое вихревой нитью единичной циркуляции, расположенной на ориентированной кривой l : $\mathbf{w}[l](\mathbf{x}) = \int_l \mathbf{l}(\mathbf{y}) \times \mathbf{V}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds_y$,

$\mathbf{V}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}$, ds_y — элемент длины дуги,

$\mathbf{l}(\mathbf{y})$ — единичный вектор положительной касательной к кривой l в точке \mathbf{y} ; $\partial\sigma_i$ — контур, ограничивающий ячейку разбиения σ_i ; Γ_i^k — циркуляция вихревой рамки, размещенной на контуре $\partial\sigma_i$ в момент времени t_k ; l_r — вихревые отрезки, моделирующие вихревой след; g_r — их циркуляции (число таких отрезков n_k и их положения зависят от момента времени t_k).

На каждой ячейке σ_i выбирается точка коллокации \mathbf{x}_i , задается орт положительной нормали к поверхности тела \mathbf{n}_i и предполагается, что если при обходе контура $\partial\sigma_i$ в направлении вектора \mathbf{l}_y вектор положительной нормали к поверхности ячейки σ_i направлен вверх, то поверхность остается слева. Циркуляции вихревых рамок, моделирующих поверхность тела Γ_i^k , в каждый момент времени Δt должны удовлетворять системе линейных уравнений, выражающей равенство нулю нормальной компоненты вектора скорости (1) к поверхности в точках \mathbf{x}_i :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \Gamma_j^k = f_i^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $a_{ij} = \mathbf{w}[\partial\sigma_j](\mathbf{x}_i) \mathbf{n}_i$, $f_i^k = -\mathbf{W}_\infty \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_i \sum_{r=1}^{n_k} g_r \mathbf{w}[l_r](\mathbf{x}_i)$, \mathbf{n}_i — вектор нормали.

Опишем последовательность решения задачи. В начальный момент времени t_1 вихревого следа нет, и циркуляции $\Gamma_i^1, i = 1, \dots, n$, определяются из уравнений (2) с правыми частями $f_i^1 = -\mathbf{W}_\infty \mathbf{n}_i$. Затем в каждую из угловых точек ячеек, лежащих на линии отрыва, помещается жидкая частица и определяется ее положение в момент времени t_2 по формуле

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{W}(\mathbf{x})\Delta t \quad (3)$$

где $k = 1$, \mathbf{x} и \mathbf{x}' — точки, в которых находится рассматриваемая частица жидкости в моменты времени t_1 и t_2 (рис. 2). Каждая пара соседних угловых точек рамок \mathbf{x} и \mathbf{y} на линии отрыва L вместе с парой точек \mathbf{x}' и \mathbf{y}' , в которые сместились частицы жидкости из точек \mathbf{x} и \mathbf{y} , образуют четырехугольную рамку $\mathbf{x}\mathbf{x}'\mathbf{y}'\mathbf{y}$, которая рассматривается как рамка, лежащая на поверхности вихревого следа в момент времени t_2 . Интенсивность такой рамки определяется из условия равенства нулю суммарной интенсивности вихревого отрезка, получаемого при суммировании интенсивностей вихревого отрезка данной рамки и всех вихревых отрезков рамок поверхности тела, которые совпадают с данным отрезком линии отрыва. Таким образом, получена форма вихревого следа и циркуляции σ_r рамок, моделирующих след в момент времени

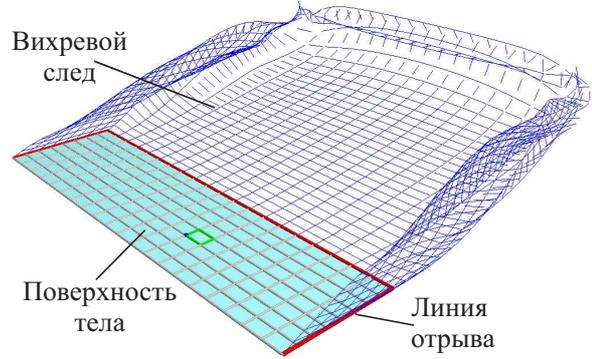


Рис. 1. Дискретизация тела и вихревого следа

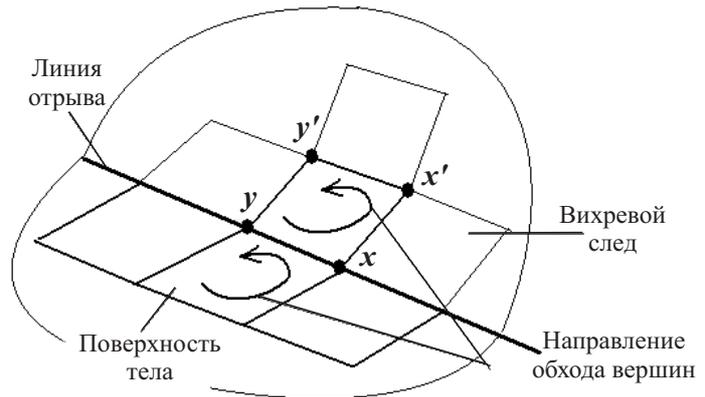


Рис. 2. Образование вихревой рамки на линии отрыва

t_2 . Затем находятся соответствующие циркуляции вихревых рамок на теле из системы (2) для момента времени t_2 .

Далее, на каждом k -м шаге предполагаются известными положения угловых точек рамок, моделирующих вихревой след, и их интенсивности в момент времени t_k . Каждая угловая точка рамки \mathbf{x} , моделирующей вихревой след, сдвигается по скорости жидкости в новое положение \mathbf{x}' в соответствии с формулой (3). Так же как и на первом шаге, на линии отрыва образуется новый слой вихревых рамок и определяются их интенсивности. Интенсивности рамок в вихревом следе, образовавшихся на предыдущих шагах, предполагаются неизменными в соответствии с уравнением переноса завихренности в идеальной жидкости.

Разделение вихревого следа на “ближнюю” и “дальнюю зону” производится по следующей схеме (рис. 3). Совпадающие стороны соседних рамок, образующихся на линии отрыва, можно объединить в единые вихревые отрезки. При этом данные отрезки связаны в единую сеть, в каждом узле которой стыкуются 4 вихревых отрезка (за исключением узлов, лежащих на линии отрыва или на краю вихревой пелены, где могут стыковаться три или два вихревых отрезка). Предполагается, что каждый такой отрезок через некоторое заданное число шагов интегрирования по времени после своего образования на линии отрыва преобразуется в изолированный отрезок, длина которого не должна увеличиваться.

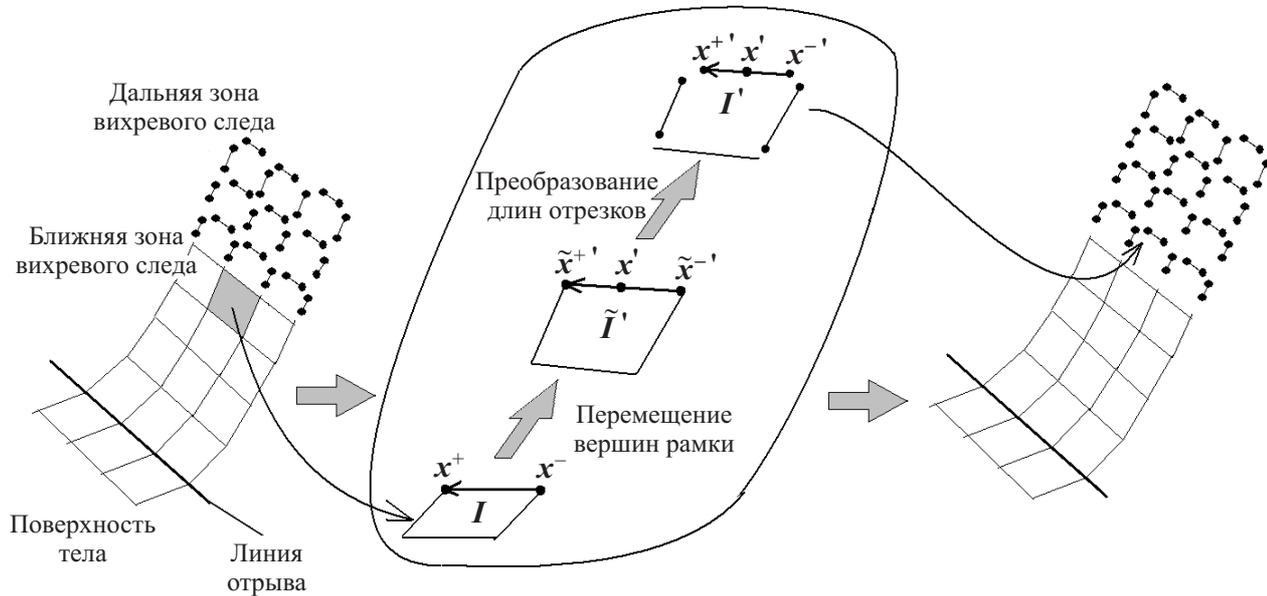


Рис. 3. Преобразование вихревых рамок в отрезки

Это делается следующим образом. Пусть на некотором шаге интегрирования по времени Γ , \mathbf{x}^+ и \mathbf{x}^- есть циркуляция, начало и конец такого отрезка и пусть $\mathbf{l} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$. При переходе к следующему шагу интегрирования по времени сначала находятся точки $\mathbf{x}^{\pm'} = \mathbf{x}^{\pm} + \mathbf{W}(\mathbf{x}^{\pm})\Delta t$, вектор $\mathbf{l}' = \mathbf{x}^{+'} - \mathbf{x}^{-'}$ и точка $\mathbf{x}' = (\mathbf{x}^{+'} + \mathbf{x}^{-'})/2$ — середина вихревого отрезка на новом шаге. Далее находится коэффициент $\lambda = \max\{|\mathbf{l}'|/|\mathbf{l}|, 1\}$ и полагается $\mathbf{l}' = \lambda\mathbf{l}$, $\mathbf{x}^{\pm'} = \mathbf{x}^{\pm} \pm \mathbf{l}'/2$, $\Gamma' = \lambda\Gamma$. Тем самым найдены новые циркуляция, начало и конец вихревого отрезка на следующем временном шаге, причем длина данного вихревого отрезка не увеличилась.

После описанного преобразования формы вихревых структур из системы уравнений (2) находятся неизвестные интенсивности Γ_j^{k+1} рамок, моделирующих тело, $j = 1, \dots, n$, в завершение шага k .

После выполнения каждого шага интегрирования по времени можно рассчитать поле скоростей на основании формулы (1) и поле давления. Алгоритм вычисления поля давлений и аэродинамических нагрузок описан в работе [12]. Отметим, что определение массива значений давления жидкости в точках коллокации \mathbf{x}_i с точки зрения вычислительных затрат сводится к расчету скорости жидкости в каждой из этих точек.

Таким образом, основными вычислительными операциями метода являются следующие.

1. Определение неизвестных интенсивностей вихревых элементов на каждом шаге интегрирования по времени путем решения системы (2) линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

2. Преобразование формы вихревых элементов

$$\mathbf{x}^k(t + \Delta t) = \mathbf{x}^k(t) + \mathbf{W}(\mathbf{x}^k)\Delta t, \quad (4)$$

где \mathbf{x}^k — массив всех концов вихревых отрезков, моделирующих ближнюю и дальнюю зону вихревого следа, причем в соответствии с выражением (1) можем записать

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{W}_\infty + \sum_l \Gamma_l \mathbf{w}_l(\mathbf{x}^k), \quad (5)$$

где сумма берется по всем вихревым отрезкам l , моделирующим поверхность тела, ближнюю и дальнюю зону вихревого следа; \mathbf{w}_l — скорость, индуцируемая таким отрезком единичной циркуляции в точке \mathbf{x} ; Γ_l — циркуляция соответствующего вихревого отрезка. При этом определение массива значений вектора скорости $\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)$ с алгоритмической точки зрения есть умножение матрицы на вектор-столбец.

3. Расчет распределения аэродинамических нагрузок по поверхностям обтекаемых тел, сводящийся к вычислению скорости жидкости в каждой точке коллокации.

3. Оценка вычислительной сложности аэродинамических задач. Основными параметрами, определяющими вычислительную сложность выполнения одного шага интегрирования по времени, являются число n ячеек разбиения поверхности тела и суммарное число вихревых отрезков, моделирующих в данный момент ближнюю и дальнюю зоны вихревого следа: $m = m(t_k)$.

Тогда для основных вычислительных операций метода в предположении, что система линейных уравнений (2) решается путем умножения на обратную матрицу, вычисляемую методом Гаусса (или на основе LU-разложения матрицы системы [13]), а преобразование формы вихревых структур производится непосредственно по формулам (4)–(5), справедливы следующие оценки сложности основных вычислительных процедур по числу арифметических операций.

1. Решение СЛАУ:

a) обращение матрицы (LU-разложение) — $O(n^3)$ операций;
 b) вычисление правых частей — $O(nm)$ операций;
 c) умножение обратной матрицы на правую часть (решение системы с треугольной матрицей в случае предварительно выполненного LU-разложения) — $O(n^2)$ операций.

2. Преобразование формы вихревых структур — $O((m+n)m)$ операций.

3. Вычисление нагрузок — $O(nm)$ операций.

Стандартной практической задачей является задача о моделировании обтекания одиночного неподвижного тела и нахождении действующих на него осредненных по времени аэродинамических сил. Для такой задачи типичной является ситуация, когда $m \gg n$. Следует также учесть, что матрица системы линейных уравнений (2) зависит только от геометрии объекта; поэтому ее обращение выполняется один раз, в то время как все остальные операции делаются на каждом шаге интегрирования по времени (на практике вычисленную обратную матрицу можно запомнить и использовать, например, для серии расчетов при различных значениях вектора скорости набегающего потока или для серии методических расчетов по подбору различных вычислительных настроек, не связанных с изменением разбиения поверхности объекта). Таким образом, наиболее трудоемкой является процедура “Преобразование формы вихревых структур”.

Затраты на преобразование формы вихревых структур существенно зависят от временного интервала, на котором производится моделирование: с увеличением этого временного интервала число m вихревых элементов в вихревом следе растет.

Вихревые методы на протяжении всего времени своего развития с успехом применялись также в задачах об обтекании подвижных объектов. Когда обтекаемые объекты осуществляют движение по заданному закону, алгоритм решения задачи отличается тем, что конфигурация объектов, т.е. положение расчетной сетки вместе с линией отрыва, пересчитывается на каждом шаге интегрирования по времени, а правые части уравнений (2) имеют вид

$$f_i^k = \mathbf{W}_0(\mathbf{x}_i)\mathbf{n}_i - \mathbf{W}_\infty\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_i \sum_{r=1}^{n_k} g_r \mathbf{w}[l_r](\mathbf{x}_i),$$

где \mathbf{W}_0 — собственная скорость движения точек поверхности тела и \mathbf{n}_i — вектор нормали.

Вихревые методы могут использоваться также при решении связанных задач динамики (когда рассматривается движение твердых тел под действием аэродинамических сил и задача об обтекании этих

тел решается одновременно с уравнениями их динамики) и в задачах аэроупругости (когда задача обтекания тел решается одновременно с уравнениями, описывающими деформации этих тел под действием аэродинамических сил).

Необходимое время моделирования в задачах об обтекании подвижных объектов обычно существенно больше, чем в задачах об обтекании неподвижных тел; следовательно, вычислительные затраты на преобразование вихревых структур возрастают.

Когда происходит изменение формы обтекаемых объектов или когда меняется взаимное расположение нескольких объектов, матрица системы (2) становится зависящей от времени. При использовании точных методов решения систем линейных уравнений требуется порядка $O(n^3)$ операций на каждом шаге интегрирования по времени, что делает затраты машинного времени на решение этой системы сопоставимыми с затратами на преобразование формы вихревых структур. К таким задачам относятся связанные задачи динамики нескольких объектов, задачи, связанные с расчетом аэродинамической интерференции воздушных винтов с другими элементами конструкций, задачи аэроупругости летательных аппаратов. В частности, к задачам такого типа относится задача формообразования парашютов. Вообще говоря, особенность задач аэродинамики парашютов состоит в том, что форма купола парашюта заранее не известна, и поэтому задачи определения формы купола парашюта и определения его аэродинамических характеристик часто необходимо решать совместно. Один из алгоритмов решения такой задачи состоит в том, что начинается аэродинамический расчет для некоторой приближенной начальной формы (которая может достаточно сильно отличаться от окончательной), в ходе которого периодически происходит уточнение формы купола путем решения упругой задачи на основе текущих аэродинамических нагрузок. В задачах формообразования планирующих парашютов, которые отличаются высокой сложностью конструкции, затраты машинного времени на решение системы (2) могут даже превосходить затраты на преобразование формы вихревых структур.

Другой особенностью задач аэродинамики парашютов (равно как и других тканевых конструкций) является необходимость учета проницаемости ткани. В простейшей постановке это делается путем задания в каждой контрольной точке \mathbf{x}_i соотношения между перепадом давления Δp на поверхности ткани и нормальной составляющей потока жидкости: $\Delta p = c_w \rho U_n^2$, где ρ — плотность жидкости, U_n — нормальная составляющая скорости потока жидкости сквозь ткань, c_w — коэффициент сопротивления ткани. В этом случае правые части системы (2) принимают вид

$$f_i^k = -W_\infty n_i - n_i \sum_{r=1}^{n_k} g_r w[l_r](\mathbf{x}_i) + \sqrt{\Delta p(\mathbf{x}_i)} / \sqrt{\rho c_w}.$$

Система становится нелинейной, поскольку значения перепада давления $\Delta p(\mathbf{x}_i)$ зависят от циркуляций вихревых рамок на теле. Обычно эту систему решают итерационными методами, при этом затраты на ее решение возрастают на $O(SN_1N_2)$ операций, где S — число итераций.

4. Параллельный алгоритм и аппроксимация матриц. Применим два основных подхода к ускорению вычислений в вихревых методах — распараллеливание вычислений и применение специальных алгоритмов для аппроксимации плотных матриц большой размерности и быстрого выполнения линейных операций с такими матрицами. Естественно, что эти два подхода являются взаимодополняющими. Вычислительный алгоритм, созданный авторами настоящей статьи, использует как распараллеливание вычислений, так и применение метода мозаично-скелетных аппроксимаций матриц [11].

Суть метода заключается в следующем. Матрица системы (2), равно как и матрица, возникающая при преобразовании формы вихревых структур по формулам (4)–(5), устроены таким образом, что каждый элемент описывает влияние некоторого вихревого элемента (источника) на некоторую расчетную точку (приемник), причем функция этого влияния быстро убывает с увеличением расстояния между приемником и источником. Матрицу можно составить и разбить на прямоугольные блоки таким образом (осуществить мозаичное биение), чтобы каждый блок описывал взаимодействие некоторой группы источников и некоторой группы приемников. Разбиение на такие группы производится по пространственному положению элементов. Если блоки описывают взаимодействие удаленных друг от друга групп элементов, то соответствующий блок можно приблизить матрицей малого ранга, которая, в свою очередь, представляется в виде суммы произведений векторов (строк и столбцов), количество которых равно этому рангу. Разбиение на блоки можно осуществить таким образом, что для представления матрицы формата $N \times N$ в таком мозаично-скелетном виде необходимо вычислить порядка $O(N \log_2^4 N)$ элементов (столько же чисел необходимо хранить в памяти). В итоге, использование такого представления матрицы ведет к тому, что на операцию умножения матрицы на столбец требуется порядка $O(N \log_2^4 N)$ элементарных операций вместо N^2 , используемых при непосредственном умножении.

При преобразовании формы вихревых структур по формулам (4)–(5) используется преобразование, описанное в работе [8], которое позволяет свести процедуру нахождения массива векторов скоростей $\mathbf{W}(\mathbf{x}^k)$ во всех точках-приемниках \mathbf{x}^k к 6 умножениям одной матрицы со скалярными элементами, модули которых монотонно убывают при увеличении расстояния между источником и приемником, на векторы-столбцы со скалярными элементами, а к указанной скалярной матрице применяется мозаично-скелетная аппроксимация (быстрый алгоритм). Такое специальное представление матрицы используется и в приближенном методе решения системы линейных уравнений (2) с помощью процедуры GMRES [14], что ведет не только к сокращению времени вычислений, но и к существенному уменьшению памяти, необходимой для хранения обратной матрицы.

Численная схема описываемого вихревого метода состоит из следующих шагов.

1. Генерация матрицы с элементами a_{ij} для системы уравнений (2). Если геометрия системы объектов не меняется, то осуществляется однократно, иначе генерация осуществляется при каждом изменении в геометрии.

2. Обращение матрицы системы (2) или ее приближенное представление в мозаично-скелетном формате [11].

3. Вычисление правых частей f_i^k системы (2) на каждом шаге интегрирования по времени.

4. Решение системы (2) для нахождения неизвестных интенсивностей вихревых рамок, моделирующих объекты.

5. Расчет давлений и аэродинамических нагрузок [12]. Если решается задача с учетом проницаемости поверхности, то этот шаг осуществляется S раз.

6. Сдвиг вихревой пелены в соответствии с уравнениями (5) [8].

7. Переход к шагу 2 (или 1 в случае изменений в геометрии).

С точки зрения вычислительной сложности можно выделить два основных момента:

— решение СЛАУ (2) может осуществляться прямым методом, например с использованием LU-разложения [13] (прямой алгоритм) или приближенным методом GMRES [14], модифицированным для использования мозаично-скелетного разложения (быстрый алгоритм);

— вычисление скоростей, индуцированных вихревыми элементами в заданных точках (необходимо при вычислении правой части, расчете давлений, сдвиге пелены), является задачей взаимодействия $M \times N$ частиц; решение этой задачи прямым и быстрым алгоритмами подробно расписано в [8].

В обоих случаях быстрый алгоритм является приближенным и сводится к применению мозаично-скелетных аппроксимаций, для которого существует параллельная реализация, разработанная группой под руководством Е. Е. Тыртышникова. Для прямого решения СЛАУ могут быть использованы процедуры пакета ScaLAPACK, а прямой алгоритм метода вычисления взаимодействия в задаче $M \times N$ частиц хорошо распараллеливается.

С использованием стандарта MPI нами реализован параллельный алгоритм метода дискретных вихревых отрезков, который позволяет производить описанные выше вычисления прямым или быстрым методами. При реализации параллельного алгоритма были использованы следующие предпосылки.

1. Чтение геометрии объектов и начальных данных осуществляется “головным” процессором, а данные пересылаются на все остальные процессоры.

2. Вычисление массива скоростей, индуцируемых вихревыми элементами, осуществляется процессорами таким образом, что каждый процессор считает скорости, индуцированные “своей” группой элементов при прямом счете или как это описано в [15] с некоторыми модификациями при использовании мозаично-скелетных аппроксимаций. Результаты вычислений скоростей объединяются и пересылаются между всеми процессорами.

3. Линейная система решается с использованием процедур ScaLAPACK (LU-разложение и последующее решение треугольных систем) или методом GMRES с модификациями, позволяющими использовать мозаично-скелетные аппроксимации. Результаты решения СЛАУ пересылаются между всеми процессорами.

5. Особенности работы с оперативной памятью. При практических расчетах важно учитывать не только время вычислений, определяемое числом элементарных операций, но и размер необходимой оперативной памяти. Поэтому ниже приводится модельный расчет необходимых ресурсов по памяти для задачи с заданными параметрами, а также описываются особенности реализации алгоритма, связанные с тем, что память выделяется не единым пространством, а частями, каждая из которых связана с одним процессором. Задачу оценки объема необходимой памяти разделим на составляющие: размещение геометрии задачи; размещение матрицы для решения СЛАУ (2); размещение матрицы для решения задачи взаимодействия $m \times n$ частиц. При этом будем оценивать не только общую память, требуемую для

решения задачи, но и занимаемую память на каждом отдельном процессоре.

Будем предполагать, что поверхности обтекаемых объектов аппроксимируются n ячейками. В соответствии с алгоритмом метода на каждом шаге интегрирования по времени в потоке возникают новые вихревые элементы. Будем считать, что общее их число составляет не более m элементов.

Информация о геометрии обтекаемого объекта, действующих на него нагрузках, конфигурации вихревого следа, а также об интенсивностях вихревых элементов, моделирующих поверхности обтекаемых тел и вихревой след, иллюстрируется следующими цифрами.

1. Каждая ячейка на поверхности обтекаемых тел характеризуется 4 вершинами, точкой коллокации, интенсивностью размещенной на ней вихревой рамки g и давлением p . Сохраняются значения всех параметров на текущем и предыдущем временных шагах. Для описания объектов требуется $34n$ слов (число в формате double precision в языке Fortran на 64-разрядных системах занимает 16 байт).

2. Каждый вихревой элемент в потоке характеризуется началом, концом и центром, интенсивностью g и некоторыми другими параметрами. Сохраняются значения всех параметров на текущем и предыдущем временных шагах. Для описания требуется $16m$ слов.

Для решения СЛАУ в случае прямого алгоритма требуется память для хранения LU-факторизации. Размер требуемой памяти примерно равен размеру матрицы, т.е. порядка $n \times n$ слов. В случае использования мозаично-скелетных аппроксимаций по статистике для хранения матрицы требуется вычислить менее 1% элементов. Для сдвига пелены требуется умножение матрицы размером $(m+n) \times m$ на вектор. В случае прямого умножения дополнительная память не требуется, поскольку последовательно вычисляются взаимодействия одного элемента на другой и далее суммируются. В случае быстрого умножения матрицы на вектор, как показала практика, тоже требуется хранение до 1% элементов от матрицы размера $(m+n) \times m$.

При оценке размера памяти, требуемого для аппроксимации матриц, следует учитывать следующие особенности алгоритма мозаично-скелетных аппроксимаций:

- при аппроксимации блока проводится априорная оценка размера памяти, необходимого для хранения этого блока, и память выделяется в соответствии с этой оценкой, которая существенно зависит от заданного для алгоритма параметра максимального числа матриц единичного ранга, которые могут быть использованы для аппроксимации блока; таким образом, размер памяти, выделяемой для аппроксимации, может быть в несколько раз выше реально требуемого, особенно если параметр максимального числа матриц единичного ранга задан большим;

- блоки матрицы равномерно распределяются по процессорам, однако каждый блок размещается на одном процессоре. При этом могут возникать очень большие блоки, для хранения мозаично-скелетных аппроксимаций которых требуется памяти больше, чем доступно на данном процессоре; это приводит к тому, что дисковое пространство начинает использоваться уже тогда, когда общий объем оперативной памяти вполне позволяет разместить необходимые структуры;

- ближние блоки не аппроксимируются, а целиком вычисляются и сохраняются в памяти; это приводит к дополнительному “расходу” оперативной памяти.

Нами реализованы модификации мозаично-скелетного алгоритма, которые позволяют “разбивать” очень большие блоки на несколько. Это немного увеличивает общий объем памяти, необходимый на хранение матрицы, однако решает проблему хранения одного блока в памяти одного процессора. “Ближние” блоки не хранятся в памяти, а вычисляются в момент умножения матрицы на вектор.

Из приведенных оценок можно сделать вывод, что число процессоров, необходимое для решения задачи, определяется не только требованиями к скорости вычислений, но и объему физической памяти, доступной каждому процессору.

Следует учитывать, что аэродинамические расчеты, осуществляемые методом дискретных вихревых отрезков, могут использоваться в конструкторских разработках для оценки перспективности разных геометрий объектов, поэтому число расчетов, которые будут проводиться для геометрий объектов с незначительными отличиями и в разных положениях относительно набегающего потока воздуха, исчисляется десятками. Это означает, что максимально приемлемое время одного расчета — несколько часов, возможно 1–2 суток. Таким образом, в настоящее время без распараллеливания вычислений удастся решать задачи, в которых число ячеек n на поверхности тела составляет до нескольких тысяч, а число вихревых элементов в потоке m не превосходит 10^5 .

Для примера укажем, какой объем памяти требуется при моделировании поверхностей обтекаемых тел системой из 32 000 ячеек и при моделировании не более чем 10^6 элементов в потоке:

- 270 Мб на каждом процессоре на размещение геометрии;
- 15 Гб на размещение матрицы СЛАУ (2) при прямом обращении; при использовании быстрого

алгоритма около 1.5 Гб;

— около 150 Гб для аппроксимации матрицы, возникающей при преобразовании формы вихревых структур с использованием быстрого алгоритма.

Следовательно, при наличии, например, 3 Гб памяти на один процессор потребуется не менее 50 процессоров при прямом обращении матрицы и не менее 55 процессоров при быстром обращении матрицы. При реальных расчетах такие оценки являются недостижимыми, так как в алгоритме мозаично-скелетных аппроксимаций используются априорные оценки для вычисления необходимой памяти для размещения каждого блока в памяти, которые всегда хуже, чем реальное сжатие. Поэтому для оценки числа процессоров при реальных расчетах имеет смысл увеличивать расчетный показатель минимум на 30%.

6. Тестовые расчеты и анализ результатов. Проведена серия тестовых расчетов, в которых оценивались как эффективность выполнения отдельных операций, так и эффективность алгоритма в целом.

Оценка времени решения системы линейных уравнений и времени выполнения преобразования формы вихревых структур на одном шаге интегрирования по времени осуществлялась на примере задачи об обтекании трехкупольной парашютной системы (рис. 4). При этом поверхности трех парашютов аппроксимировались с использованием разбиения на 32 000 ячеек.

Расчеты проводились на компьютере “Ломоносов” суперкомпьютерного центра МГУ им. М. В. Ломоносова на узлах конфигурации 2 x Xeon 5570/2.93 ГГц, память 3 Гб на ядро [16].

На рис. 5 показана зависимость полного времени однократного решения системы линейных уравнений от числа процессоров при использовании прямого и быстрого алгоритмов. Заметим, что под полным временем однократного решения системы понималось для прямого алгоритма суммарное время выполнения LU-разложения матрицы системы (при уже рассчитанной матрице) и решения системы с треугольной матрицей, для быстрого — выполнение мозаично-скелетного разложения матрицы (включая вычисление необходимых ее коэффициентов) и итерационного решения системы с разложенной матрицей с использованием процедуры GMRES. Кроме того, на рис. 5 приведена зависимость уменьшения времени вычислений при решении СЛАУ от числа процессоров для прямого и быстрого алгоритмов. Здесь время решения T_N линейной системы на N процессорах сравнивается со временем решения T_9 на 9 процессорах (на меньшем числе процессоров для прямого алгоритма не хватает оперативной памяти). Видно, что при увеличении числа процессоров с 9 до 20 происходит сокращение времени вычислений в 1.5 раза при прямом алгоритме и примерно в 1.3 раза при быстром. При числе процессоров около 50 в обоих случаях происходит насыщение, и для матрицы такого размера дальнейшее увеличение числа процессоров нецелесообразно. При этом быстрый алгоритм работает для данной системы примерно в 10 раз быстрее, чем прямой.

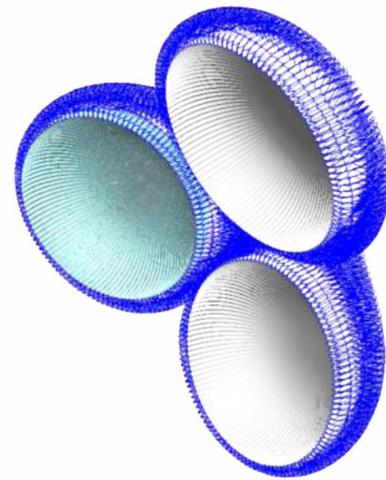


Рис. 4. Модельная парашютная система, 32 000 рамок на поверхности

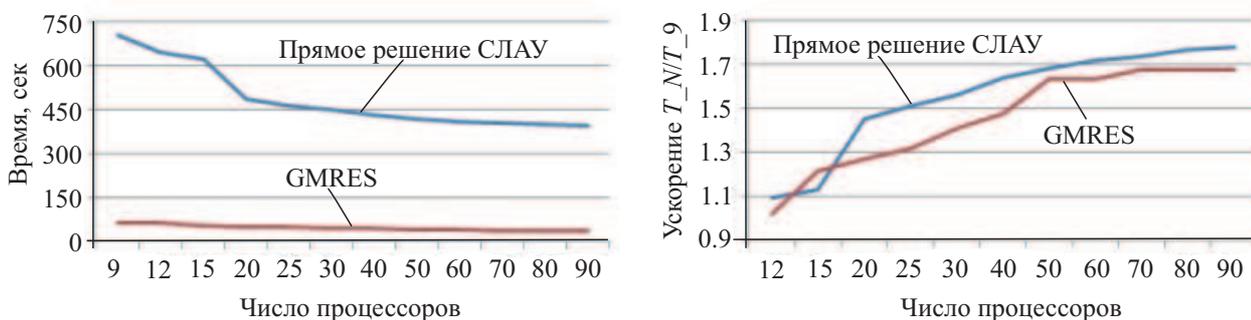


Рис. 5. Зависимость времени решения СЛАУ (левый график) и ускорения (правый график) от числа процессоров

Здесь следует заметить, что, как отмечалось ранее, полное решение системы актуально в тех случаях, когда геометрия обтекаемых объектов изменяется на каждом шаге интегрирования по времени или имеются существенные ограничения по оперативной памяти. В случае моделирования обтекания объекта

с неизменной геометрией матрица системы не зависит от времени. При использовании прямого алгоритма LU-разложение матрицы выполняется один раз заранее и на каждом шаге осуществляется решение системы с уже посчитанной треугольной матрицей (напомним, что LU-разложение требует порядка $O(N^3)$ арифметических операций, тогда как решение системы с треугольной матрицей $O(N^2)$ арифметических операций, N — число уравнений). В этом случае (по крайней мере для систем с $N \leq 30$ тыс.) имеет смысл использовать прямой метод, так как решение системы с уже имеющейся треугольной матрицей выполняется существенно быстрее, чем итерационное решение с применением алгоритма GMRES даже при использовании уже произведенного мозаично-скелетного разложения матрицы.

Для оценки времени выполнения преобразования формы вихревых структур был проведен расчет обтекания данной модели парашютной системы на 300 шагов интегрирования по времени с использованием прямого алгоритма вычисления массива вектора скорости (прямой счет) и с использованием мозаично-скелетных аппроксимаций (быстрый счет). Оба расчета проводились на 128 ядрах с памятью 3 Гб суперкомпьютера “Ломоносов”. Целью моделирования являлось оценить вычислительные возможности параллельного алгоритма и провести сравнение прямого и быстрого алгоритмов. Графики на рис. 6 иллюстрируют зависимость времени выполнения однократного преобразования формы вихревых структур от числа вихревых элементов (по оси абсцисс отложено количество точек-приемников — концов вихревых отрезков, которое увеличивается с увеличением номера шага интегрирования по времени, число источников примерно в 2 раза меньше). Здесь следует отметить рост времени выполнения преобразования формы вихревых структур от числа вихревых элементов в виде квадратичной зависимости для прямого алгоритма и близкий к линейному для быстрого (теоретическая оценка $O(m \log^4 m)$). Для числа приемников, равного 800 000, быстрый алгоритм работает примерно в 9 раз быстрее, чем прямой.

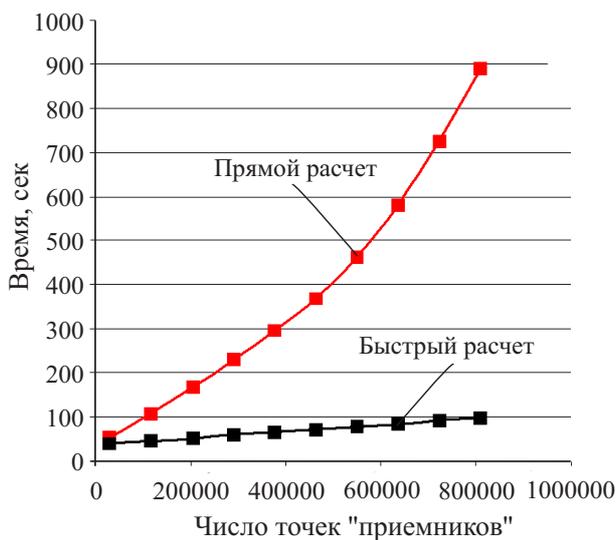


Рис. 6. Сравнение времени сдвига вихревой пелены на одном шаге в зависимости от числа вихревых элементов в потоке

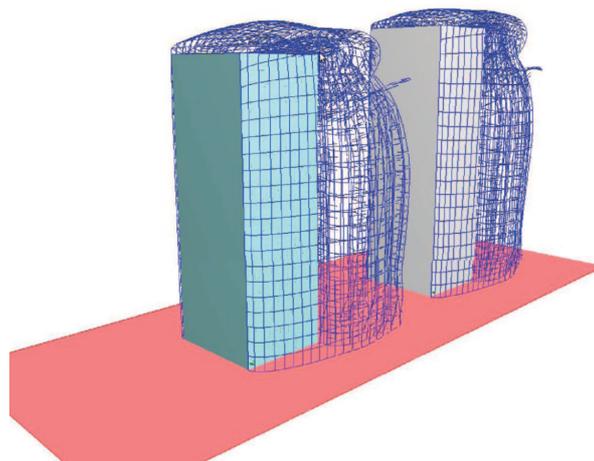


Рис. 7. Моделирование обтекания тандема из двух зданий

Общее время выполнения шага интегрирования по времени анализировалось на примере задачи об обтекании тандема из двух зданий, расположенных последовательно друг за другом в потоке (рис. 7). Расчет производился методом отражения [8] с учетом поверхности Земли, на которой ставится условие непротекания. Была исследована зависимость времени выполнения одного шага интегрирования по времени от числа процессоров при различном числе вихревых элементов в потоке при использовании быстрого алгоритма для пересчета формы вихревых структур (рис. 8). На этом рисунке N — число ядер, T_1 — время одного шага интегрирования по времени на одном процессоре, T_N — время одного шага интегрирования по времени на N процессорах. Для решения СЛАУ (2) использовался прямой метод с однократным выполнением LU-разложения матрицы перед началом интегрирования по времени. Поверхности зданий моделировались 1798 ячейками, моделирование проводилось на 100 шагов безразмерного времени. Видно, что при малом числе вихревых элементов распараллеливание дает малый эффект, однако с увеличением числа вихревых элементов достигаемое ускорение растет. При числе вихревых элементов 85 000 время расчета на 30 процессорах в 9 раз меньше, чем на одном процессоре. Эти данные свидетельствуют о том, что оптимальное число процессоров следует подбирать с учетом вычислительной сложности задачи.

Данная задача была исследована не только с точки зрения анализа быстродействия алгоритма, но и с точки зрения выяснения открывающихся новых принципиальных возможностей при моделировании сложных аэродинамических эффектов. Конфигурация упомянутых зданий воспроизводит один из вариантов эксперимента, проведенного в аэродинамической трубе НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова [17]. В этой серии экспериментов измерялись значения коэффициента давления в точках-приемниках на поверхностях обоих зданий, конфигурация моделей зданий в эксперименте и расположение точек-приемников давления показаны на рис. 9. Геометрические параметры модели связаны соотношениями $L = 0.6H_2$, $D_1 = 0.314H_1$, $A_1 = 0.361D_1$, $D_2 = 0.268H_2$, $A_2 = 0.319H_2$, $H_2 = 1.117H_1$. Крестиками на рис. 9 помечены точки расположения датчиков замера давления в эксперименте, которые находились на каждой стене каждого дома на высотах, соответствующих 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 высоты каждого дома. Нулевой отметкой считается плоскость поверхности, на которой расположены дома.

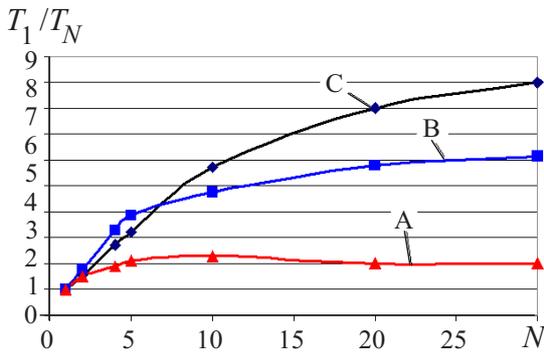


Рис. 8. Зависимость ускорения быстрого алгоритма от числа процессоров. Соответствие кривых числу вихревых элементов в потоке: А) 16 000, В) 50 000, С) 85 000

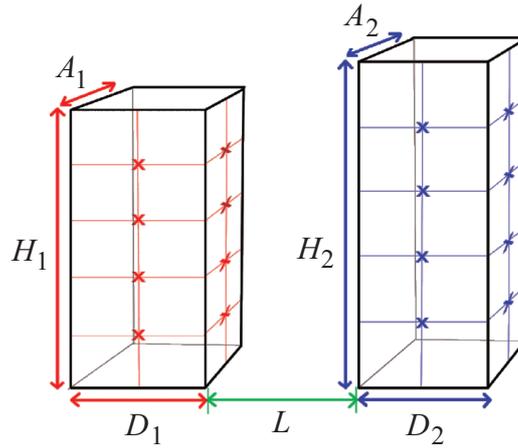


Рис. 9. Схема расположения датчиков приемников давления в эксперименте

Ранее авторами настоящей статьи были проведены расчеты для данной конфигурации на персональном компьютере без распараллеливания вычислений, но с использованием быстрого алгоритма при преобразовании формы вихревых структур. При этом было использовано разбиение зданий на 770 ячеек. Расчет проводился с безразмерным шагом интегрирования по времени $\Delta\tau = 4.0$. Методические расчеты показали, что для получения осредненных по времени значений коэффициента давления необходимо осуществить моделирование до момента безразмерного времени $\tau = 9$, что соответствует 150 шагам интегрирования по времени. Безразмерное время вводилось по формуле $\tau = \frac{t|W_\infty|}{H_2}$. При этом в потоке моделировалось до 80 000 вихревых элементов. На рис. 10 приведены значения коэффициента давления в точках-приемниках давления, полученные в расчетах, в сравнении с результатами эксперимента [17] (по оси абсцисс отложено отношение высоты расчетной точки к высоте здания, по оси ординат значение коэффициента давления).

Полученные в расчете с разбиением на 770 ячеек значения коэффициента давления в точках-приемниках хорошо согласуются с результатами эксперимента на переднем здании, однако на заднем здании имеются существенные отличия (рис. 10, нижние графики), особенно на задней стенке. Здесь следует заметить, что для одиночного здания хорошее согласование с экспериментальными данными удавалось получить и ранее при гораздо более скромных вычислительных возможностях [3], однако можно предположить, что для вычисления нагрузок на заднем здании, которое находится в зоне вихревого следа, возникающего за передним зданием, необходимо более точное моделирование движения вихревых структур. В то же время оказалось, что данный расчет лежит на пределе возможностей вычислений по используемым авторами алгоритмам на одном ядре современных персональных компьютеров — при использовании быстрого алгоритма пересчета формы вихревых структур расчет длился несколько часов, но при этом мы вышли на ограничение по оперативной памяти. Такой же расчет по прямому алгоритму не привел бы к ограничению по памяти, но занимал бы несколько суток.

На рис. 10 (нижний ряд графиков) показаны значения коэффициента давления, полученные при использовании более мелкой сетки на поверхностях зданий (всего 1798 ячеек вместо 770). Расчет про-

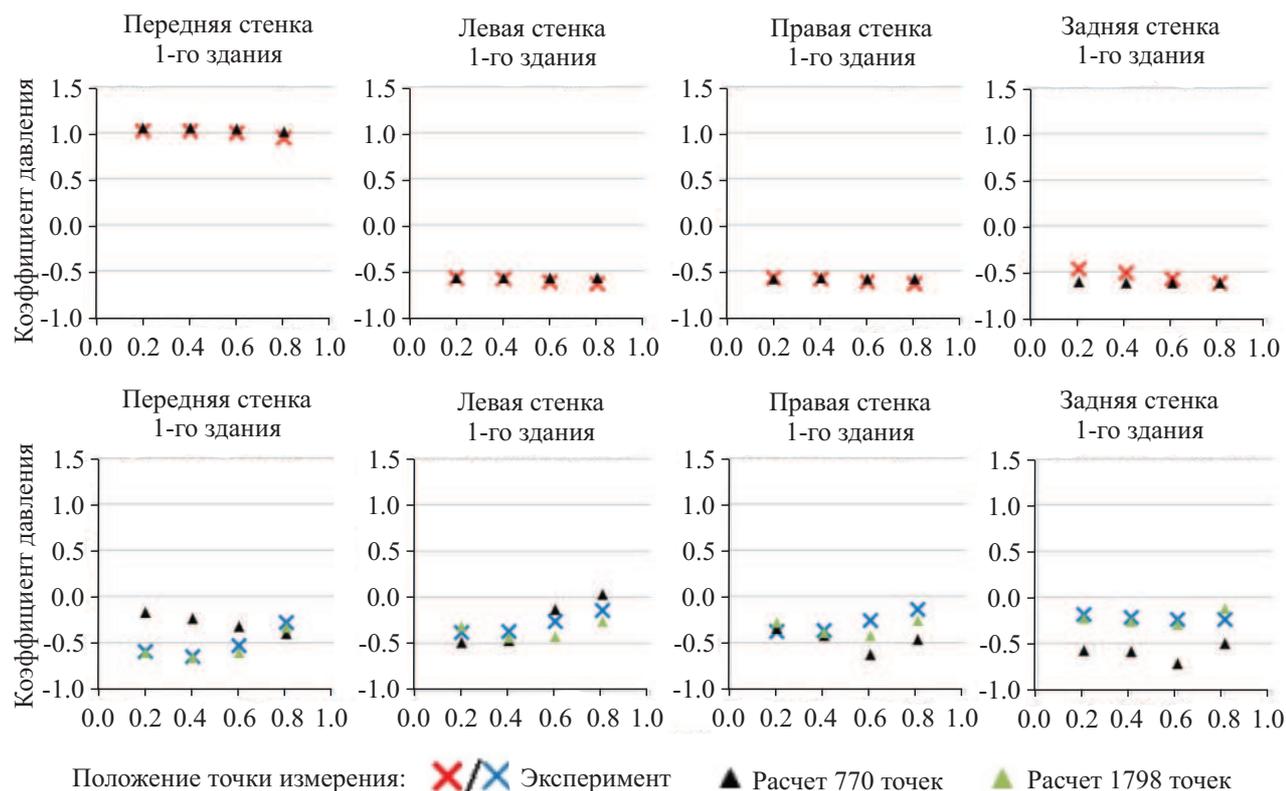


Рис. 10. Значения коэффициента давления в точках-приемниках

изводился на суперкомпьютере “Чебышев” с использованием 16 процессоров, 4 Гб оперативной памяти на ядро, с безразмерным шагом интегрирования по времени 2.5 на 300 шагов, что соответствует безразмерному времени $t = 12$. При этом число вихревых элементов в потоке превышало 300 000. Общее время расчета составило около 1.5 часов. Отметим, что на рис. 8 кривая C соответствует примерно 100-у шагу интегрирования по времени, что близко к пределу возможностей расчета одним ядром, особенно при наличии ограничений на оперативную память, выделяемую одному процессу.

Из приведенных данных видно, что использование суперкомпьютерных технологий позволило провести моделирование, результаты которого лучше согласуются с данными экспериментов, чем расчеты, проведенные на персональных компьютерах, за счет повышения вычислительной сложности моделей зданий.

Таким образом, проведенное тестирование свидетельствует о том, что разработанный программный комплекс для многопроцессорных платформ позволяет существенно сократить время расчета в типовых аэродинамических задачах. Представляется целесообразной его дальнейшая апробация в задачах, ранее не поддававшихся решению из-за больших вычислительных затрат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
2. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006.
3. Гутников В.А., Лифанов И.К., Сетуха А.В. О моделировании зданий и сооружений методом дискретных вихревых рамок // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. 78–92.
4. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. Vortex methods: theory and practice. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
5. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988.
6. Апарин В.А., Дворак А.В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками // Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1986. Вып. 1313. 424–432.
7. Ковалев Е.Д., Лифанов И.К., Михайлов А.А., Ништ М.И., Поликарпов Г.Г. Численный метод расчета летательного аппарата с телесным фюзеляжем // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1989. 29, № 4. 589–597.

8. *Апарин А.А., Сетуха А.В.* О применении метода мозаично-скелетонных аппроксимаций при моделировании трехмерных вихревых течений вихревыми отрезками // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2010. **50**, № 5. 937–948.
9. *Марчевский И.К., Щеглов Г.А.* Модель симметричного вортон-отрезка для численного моделирования пространственных течений идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Баумана. Серия “Естественные науки”. 2008. № 4. 62–71.
10. *Тыртышников Е.Е.* Методы быстрого умножения и решение уравнений // Матричные методы и вычисления. М.: Институт вычислительной математики РАН, 1999. 4–41.
11. *Tyrtushnikov E.E.* Mosaic skeleton approximations // *Calcolo*. 1996. **33**, № 1/2. 47–57.
12. *Сатуф И., Сетуха А.В.* Применение аналога интеграла Коши–Лагранжа для расчета давления при моделировании трехмерного отрывного обтекания тел идеальной жидкостью // Научный вестник Моск. гос. техн. ун-та гражданской авиации. Серия “Аэромеханика и прочность”. 2011. **172**, № 10. 19–26.
13. *Тыртышников Е.Е.* Методы численного анализа. М.: Академия, 2006.
14. *Saad Y.M., Schultz H.* A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // *SIAM J. on Scientific and Statistical Computing*. 1986. **7**, N 3. 856–869.
15. *Савостьянов Д.В., Тыртышников Е.Е.* Применение многоуровневых матриц специального вида для решения прямых и обратных задач электродинамики // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**. 1–16.
16. *Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В., Воеводин Вл.В., Жуматий С.А.* Практика суперкомпьютера “Ломоносов” // Открытые системы. 2012. **7**. 36–40.
17. *Леденев П.В., Синявин А.А.* Экспериментальное исследование ветрового давления при обтекании тандема двух зданий // Вестник Моск. гос. строит. ун-та. 2011. № 3. 371–382.

Поступила в редакцию
04.09.2013
