

УДК 519.6, 517.958:5

О ПРИМЕНИМОСТИ ПОСЛОЙНЫХ МОДЕЛЕЙ В РЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ТОМОГРАФИИ

Г. М. Агаян¹, Вад. В. Воеводин¹, С. Ю. Романов¹

Статья посвящена проведению математического моделирования в сверхбольших задачах распространения ультразвуковых волн и в диагностике трехмерных физических сред на суперкомпьютерах. Результаты позволят использовать ультразвуковые исследования в диагностике рака молочной железы. Стандартные подходы в задачах томографии предлагают исследовать 3D объекты по их двумерным сечениям. Эта схема идеально реализуется для рентгеновской томографии. В ультразвуковой томографии выделение тонких слоев не всегда оправдано, поскольку лучи могут искривляться из-за рефракции и покидать слой. В настоящей статье эта проблема иллюстрируется расчетом модельной задачи для шара, рассеяние на котором допускает аналитическое решение в виде рядов по спецфункциям. Это решение использовалось в качестве модельных данных прямой задачи для послойной реконструкции шара. Результаты моделирования свидетельствуют о возможности использования послойных схем в ультразвуковой томографии, однако необходимо учитывать ухудшение разрешения в ортогональном к слоям направлении. Проведено исследование эффективности коммуникаций и оптимизация кода программ с помощью средств профилировки и анализа трасс библиотеки mpiR. Разработаны высокопроизводительные программы для мощных суперкомпьютеров с высокой степенью масштабируемости. Модельные расчеты проводились на суперкомпьютерах МГУ им. М. В. Ломоносова “Чебышёв” и “Ломоносов”. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 13-07-00824-а).

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, волновое уравнение, суперкомпьютерное моделирование, ультразвуковая 3D томография, параллельные вычисления.

Введение. Развитие суперкомпьютеров позволяет исследовать все более сложные проблемы, возникающие в различных областях человеческой деятельности. Еще недавно представлялось совершенно невозможным количественное исследование процессов, приводящих, например, к сложным трехмерным обратным задачам математической физики именно по причине огромного объема вычислений. К таким проблемам относятся рассматриваемые в настоящей статье задачи математического моделирования распространения ультразвука в неоднородной среде и обратные задачи ультразвуковой томографии.

Ультразвук используется в совершенно различных областях, начиная от неразрушающего контроля сварных швов [1], велосиметрии потоков жидкости в биологических средах [2], томографии неоднородностей морского дна [3] и кончая ультразвуковой диагностикой в медицине [4–6]. Именно развитие методов ультразвуковой томографии для ранней диагностики рака молочной железы и является той задачей, которая лежит в основе настоящего исследования.

Всем известны потрясающие по качеству и точности результаты обследований, которые получаются при использовании рентгеновской и магнитно-резонансной томографии. Однако рентгеновская диагностика не безвредна для организма человека и магнитно-резонансная томография достаточно дорогостоящая, а потому оба эти способа не могут применяться часто. Ультразвуковое излучение не приносит никакого вреда для пациента, и поэтому разработка устройств, использующих его в качестве сканирующего поля и имеющих разрешение, приближающееся к показателям, достигнутым в томографических аппаратах, является основной целью всех исследований в ультразвуковой диагностике в медицине.

Одна из проблем ультразвуковой томографии состоит в решении трехмерных нелинейных обратных задач реконструкции внутренней структуры объекта из-за чрезвычайно огромного объема вычислений. В этой связи очень привлекательно использовать классическую томографическую схему, в которой строятся двумерные сечения 3D объектов. Для решения двумерных задач используются данные, полученные

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 4, 119992, Москва; Г. М. Агаян, науч. сотр., e-mail: agagal@rambler.ru; Вад. В. Воеводин, науч. сотр., e-mail: vadim_voevodin@mail.ru; С. Ю. Романов, вед. науч. сотр., e-mail: romanov60@gmail.com

с помощью приемников и источников, расположенных в одной плоскости. Таким образом, трехмерная по сути задача заменяется на последовательность более простых двумерных задач. Эта идея заимствована из рентгеновской томографии, где использование послойных исследований возможно благодаря тому, что коэффициент рефракции для рентгеновского излучения практически не отличается от единицы, а следовательно, лучи практически не отклоняются от прямой. В ультразвуковой томографии надежды на выделение тонких слоев аналогично рентгеновской томографии не всегда оправданы, поскольку лучи могут искривляться из-за наличия эффектов рефракции как в пределах исследуемого двумерного слоя, так и в третьем измерении и покидать слой. Добавим сюда также волновые эффекты дифракции и переотражения.

Таким образом, в задачах ультразвуковой томографии использование послойных томографических схем не является строго обоснованным. В настоящей работе делается попытка оценки возможности использования двумерных послойных схем в исследовании трехмерных объектов. Такая оценка представляет интерес из-за большой популярности послойного подхода в ультразвуковой томографии [6–9]. Выбор параметров математических моделей в настоящей работе был ориентирован на решение задачи дифференциальной диагностики заболеваний молочной железы.

Указанная проблема иллюстрируется нами расчетом тестовой модельной задачи. Для моделирования авторы выбрали самый простой трехмерный объект — однородный шар, рассеяние на котором звуковой волны допускает аналитическое решение. Этот подход хорошо исследован в литературе [10]. Используя разработанную в этих публикациях технологию разложения в ряды по спецфункциям, можно рассчитать волновое поле в любой точке выделенной плоскости трехмерного пространства, пересекающей шар. Таким образом, мы решаем трехмерную прямую задачу распространения волны независимым методом. Далее, решив по полученным данным двумерную обратную задачу в этой плоскости численными методами, мы можем сравнить результат с соответствующим сечением шара.

Для оценки качества послойных моделей обратная задача решалась в нескольких слоях. Результаты свидетельствуют о принципиальной возможности использования послойных схем в ультразвуковой томографии. Однако при интерпретации данных, полученных в рамках послойной модели, необходимо иметь в виду как геометрические искажения, так и возникающие из-за послойной модели артефакты. Эти выводы находятся в согласии с результатами работы [11].

Решение двумерных задач ультразвуковой томографии как коэффициентных обратных задач с высокой точностью само по себе является сложной задачей. Используемые алгоритмы базируются на прямом вычислении градиента функционала невязки через решение сопряженной задачи [12–14]. Большой объем вычислений, необходимый при численном решении обратных задач, обусловил необходимость применения суперкомпьютерных комплексов “Ломоносов” и “Чебышев”, работающих в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова [15]. Оптимизация программного кода, полученного в работах [16, 17], позволила в настоящей работе в 2–4 раза увеличить скорость выполнения программы. Для этих целей было проведено исследование эффективности коммуникаций с помощью средств профилировки и анализа трасс библиотеки `mpi`.

2. Постановка и методы численного решения прямой и обратной задачи. Скалярное уравнение линейной акустики в неоднородной среде хорошо известно и может быть получено при следующих предположениях [18]. Будем считать, что движение среды является адиабатическим движением идеальной жидкости. Пусть колебания среды описывается малыми колебаниями сжимаемой жидкости. Тогда из уравнения непрерывности, уравнения состояния и уравнения движения Эйлера можно получить уравнение линейной акустики для колебания давления $p(r, t)$ в среде с переменной плотностью $\rho_0(r)$ и фазовой скоростью $c(r)$:

$$\frac{1}{c^2} p_{tt} + \frac{(\nabla \rho_0 \cdot \nabla p)}{\rho_0} - \Delta p = 0. \quad (1)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа и ∇ — градиент по переменной $r \in R^N$. В случае слабо меняющейся плотности выражение $\nabla \rho_0(r)$ мало и, пренебрегая величиной второго порядка малости $\frac{(\nabla \rho_0 \cdot \nabla p)}{\rho_0}$, получаем стандартное волновое уравнение, которое при наличии точечного источника, располагающегося в точке r_0 и генерирующего импульс $f(t)$, имеет вид

$$v(r)p_{tt}(r, t) - \Delta p(r, t) = \delta(r - r_0)f(t), \quad (2)$$

где $v^{-0.5}(r) = c(r)$ — скорость волны в среде и t — время. Предполагается также, что давление $p(r, t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$p(r, t = 0) = p_t(r, t = 0) = 0 \quad (3)$$

и условию Зоммерфельда на бесконечности.

Существуют трехмерные, двумерные и одномерные постановки коэффициентных обратных задач для волнового зондирования [12, 13, 19–21], доказаны теоремы единственности [22], разработаны эффективные алгоритмы решения на суперкомпьютерах [23, 24]. Предположим, что неоднородность, вызванная изменениями скорости $c(r)$, расположена целиком внутри области $P \subset R^N$, а в окрестности границы Γ области P и вне области P имеем $c(r) = \text{const} = c_0$, причем константа c_0 — известна. Обратная задача состоит в нахождении описывающей неоднородность неизвестной функции $c(r)$ в области P по экспериментальным данным измерения волны $U(\gamma, t) = p(\gamma, t)$ на границе Γ в течение времени $(0, T)$ для достаточно большого значения T при различных положениях r_0 источника на границе Γ . Обратную задачу поставим как задачу минимизации функционала невязки

$$\Phi(p(v)) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (p(\gamma, t) - U(\gamma, t))^2 d\gamma dt. \tag{4}$$

Выражение для градиента функционала невязки $\Phi(p(v))$ получено в работах [9, 12–14] и имеет вид

$$\Phi'_v(p(v)) = \int_0^T w_t(r, t) p_t(r, t) dt. \tag{5}$$

Здесь $p(r, t)$ — решение основной задачи (2), (3), а $w(r, t)$ — решение “сопряженной” задачи [14]. Зная Φ'_v из (5), можно построить различные итеративные схемы для минимизации функционала невязки (4). Таким образом, для вычисления градиента функционала необходимо решить основную и “сопряженную” задачи. Отметим еще раз, что методы решения прямой и обратной задачи линейной акустики приведены в предположении, что плотность среды, входящая в общее уравнение (1), слабо меняется или постоянна в области P . Численные аспекты решения прямой и обратной задачи описаны в работах [16, 17].

3. Исследование эффективности коммуникаций и оптимизация программы. Большой объем и время вычислений, необходимые при численном моделировании в рассматриваемой задаче, обусловили необходимость оптимизации программного кода, полученного в предыдущих работах [16, 17]. Для этого было выполнено исследование масштабируемости и эффективности программы с точки зрения выполняемых пересылок данных.

Для исследования масштабируемости программы была проведена серия экспериментов с различным числом процессов (табл. 1, исходный вариант).

Таблица 1
Время выполнения программы (NX_ALL=NY_ALL=1002)

Число процессов	144	196	256	324	400	484	576	676	784
Время, сек. (исходный вариант)	152	104	84	71	66	61	60	58	55
Время, сек. (оптимизация 1)	116	73	50	44	38	34	36	33	30
Время, сек. (оптимизация 2)	94	53	38	28	22	20	17	15	14

Используемое число процессов определяется по формуле NITER_SOU*NX_PAR*NY_PAR [16], где
 1) NX_PAR*NY_PAR равно числу прямоугольных областей, на которые разбита двумерная сетка расчетов; вычисления в каждой области выполняются в рамках отдельного процесса;

2) NITER_SOU определяет число различных положений источника.

В данных исследованиях значение NITER_SOU не меняется и всегда равно 4, поскольку изменение этого параметра приводит к прямо пропорциональному изменению объема производимых вычислений и коммуникаций, а потому выбор этого параметра не существен для целей исследования. Кроме того, важными параметрами являются NX_ALL и NY_ALL, которые определяют размерность двумерной сетки расчетов. Везде далее NX_ALL=NY_ALL и NX_PAR=NY_PAR. Все замеры времени выполняются для 20 итераций итерационного процесса минимизации функционала невязки (4).

Как видно из табл. 1, при размерности сетки NX_ALL=NY_ALL=1002, что примерно соответствует значениям в реальных задачах, время выполнения программы достигает минимума на 784 процессах и практически перестает уменьшаться при дальнейшем увеличении числа процессов.

Изучим возможные способы оптимизации программы за счет организации более эффективного обмена данными между процессами.

3.1. Оптимизация объема пересылаемых данных. Обмен данными в программе реализован с помощью функций библиотеки MPI. Для изучения влияния MPI-операций на общее время выполнения программы хорошо подходит библиотека mpiP [25]. Эта библиотека осуществляет профилирование программы и выдает разнообразную статистику как по отдельным MPI-операциям, так и по группам однотипных MPI-операций. Для сбора статистики необходимо слинковать исследуемую программу с mpiP, после чего запустить на счет обычным образом. По окончании выполнения создается текстовый файл, в котором содержится вся собранная с помощью mpiP информация о программе.

Для нас основной интерес представляют данные о том, сколько времени в целом программа потратила на выполнение всех MPI-операций, а также какие MPI-операции заняли больше всего времени. Все эксперименты проводились на суперкомпьютере “Ломоносов”.

По данным mpiP, 77% времени выполнения исходной версии программы (NX_ALL=1002, NX_PAR=10) было потрачено на MPI-операции. Операции, выполнявшиеся дольше всего, а также их доля от всего времени выполнения MPI-операций приведены в табл. 2. Каждому столбцу в таблице соответствует одна MPI-операция на определенной строке исходного кода, причем считается суммарное время всех вызовов данной операции.

Таблица 2
Данные профилировки исходного варианта программы (NX_ALL=1002, NX_PAR=10)

MPI-вызов	Barrier	Barrier	Barrier	Allreduce	Waitall	Waitall	Waitall
% времени от MPI	12.49	11.93	10.63	7.14	5.10	4.48	4.26

Можно видеть, что большая часть времени требуется на выполнение коллективных операций, особенно на синхронизацию. Три операции MPI_Waitall расположены в практически идентичных фрагментах исходного текста программы, в которых выполняется обмен всех граничных значений прямоугольных областей с соседями на каждой итерации по времени явной разностной схемы [16]. Рассмотрим общий вид такого фрагмента:

```
<цикл по всем соседям некоторой области>
{
  <получение всех граничных значений от соседа с помощью MPI_Irecv>
  <передача всех граничных значений соседу с помощью MPI_Isend>
}
MPI_Waitall (<ожидаем завершение всех асинхронных операций>)
```

Поскольку нет необходимости пересылать все граничные значения каждому соседу, первая оптимизация заключается в сокращении объема передаваемых данных при обмене граничными значениями. Это привело к достаточно заметному уменьшению времени выполнения программы (табл. 1, оптимизация 1).

3.2. Оптимизация коллективных операций. Далее были проведены две оптимизации использования коллективных операций. Во-первых, были рассмотрены операции синхронизации MPI_Barrier. Основных операций синхронизации три, и они расположены сразу же после указанных выше операций MPI_Waitall. Однако наличие данных точек синхронизации избыточно: каждый процесс после точек синхронизации использует только новые граничные данные, полученные от соседей, а их получение гарантируется выходом из операции MPI_Waitall. Поэтому эти вызовы MPI_Barrier можно опустить.

Во-вторых, была рассмотрена операция MPI_Allreduce. С ее помощью на каждой итерации по времени осуществляется рассылка промежуточных значений частичной невязки, полученной на каждом процессе. При этом в алгоритме используется только полная невязка, получаемая после выполнения всего цикла по времени. Таким образом, можно вынести операцию MPI_Allreduce за цикл по времени, т.е. выполнить следующую оптимизацию: промежуточные значения невязки суммируются по всем итерациям по времени на каждом процессе независимо, а после цикла выполняется одна операция MPI_Allreduce для рассылки финального значения.

Эти достаточно несложные преобразования позволили сократить долю времени выполнения MPI-операций до 58% (с исходных 77%) и привели к дальнейшему заметному уменьшению времени выполнения программы (табл. 1, оптимизация 2).

Анализ с помощью инструмента библиотеки mpiP показывает, что список самых затратных по времени MPI-операций изменился (табл. 3).

Можно заметить, что операции MPI_Allreduce и MPI_Waitall не только остались в списке, но теперь даже занимают большую часть времени, нежели в исходной программе. Однако это связано с тем, что, во-первых, теперь не выполняются операции синхронизации с помощью барьера MPI_Barrier, а во-

Таблица 3

Данные профилировки оптимизированного варианта программы (NX_ALL=1002, NX_PAR=10)

MPI-вызов	Allreduce	Waitall	Waitall	Waitall	Comm_split	Bcast	Isend
% времени от MPI	18.37	11.85	11.80	11.57	4.37	3.73	3.07

вторых, уменьшился общий объем коммуникаций. Интересным является тот факт, что согласно данным mpiP вызов операции Allreduce, которая является самой затратной по времени (18.37% всего времени выполнения MPI-операций), происходит всего один раз (при этом передается всего 8 байт) в каждом цикле итерационного процесса минимизации. Это говорит о неэффективности данной операции.

Таким образом, проведенные оптимизации позволили сократить время выполнения исходной программы в 2–4 раза. При этом также удалось снизить скорость уменьшения эффективности при увеличении числа процессов (табл. 1): отношение времени исходного варианта к финальной оптимизированной версии на 144 процессах равно 1.61 и затем начинает расти, достигая на 784 процессах значения в 3.93. Однако и в оптимизированной, и в исходной версии минимум по времени достигается на том же числе процессов. При дальнейшем увеличении числа процессов время выполнения практически не меняется.

4. Аналитические решения 3D задачи рассеяния ультразвукового излучения для неоднородности в виде шара. Целью модельных расчетов в настоящей работе является исследование возможностей использования послойных схем томографической реконструкции 3D объектов в волновой томографии. Пусть неоднородность представляет собой трехмерный шар, помещенный в однородную среду. Выбор в качестве объекта исследования шара (рис. 1), определяется тем, что для сферически симметричного объекта можно в явном виде через разложение по спецфункциям выписать решение прямой задачи [10]. Возможность решения прямой задачи аналитическим способом делает вычислительный эксперимент более “чистым” и позволяет также дополнительно проконтролировать численные методы решения прямой задачи. Аналогичный подход применялся для решения задачи рассеяния звука для более сложного объекта — шара с неконцентрической полостью [26].

Аналитические методы решения задачи рассеяния на однородном шаре $\Omega \subset R^3$ с помощью метода разделения переменных хорошо известны [10]. Рассмотрим сначала звуковое давление в виде гармонического по времени колебания с частотой ω . В этом случае $p(r, t) = \text{Re}(u(r)e^{i\omega t})$ и волновое уравнение (2) преобразуется в уравнение Гельмгольца

$$\Delta u(r) + k^2(r)u(r) = 0, \tag{6}$$

где $k(r) = \omega/c(r)$ — волновое число. Предположим, что внутри шара $\Omega \subset R^3$ (рис. 1), имеющего границу S , скорость распространения звука равна $c(r) \equiv c_\Omega = \text{const}$. Вне шара скорость звука равна $c(r) \equiv c_0 = \text{const}$. Будем считать, что неоднородность среды вызвана только изменением скорости звука, а плотности внутри и вне шара равны $\rho = \text{const}$. Предположим, что падающее поле $u^i(r)$ ($r \notin \Omega \subset R^3$) представляет собой плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси Z : $u^i(r) = e^{-ikz}$. Полное поле вне шара Ω ($r \notin \Omega \subset R^3$) обозначим через $u(r)$. Оно представляет собой сумму падающей волны и неизвестного рассеянного поля $u^s(r)$, т.е. $u(r) = u^i(r) + u^s(r)$. Эти функции вне шара удовлетворяют уравнению Гельмгольца с волновым числом $k = \omega/c_0$. Внутри шара полное поле обозначим через $u^\Omega(r)$. Оно удовлетворяет уравнению Гельмгольца внутри шара с волновым числом $k_\Omega = \omega/c_\Omega$. На границе S шара поле $u(r)$ и поле $u^\Omega(r)$ удовлетворяют условиям сопряжения [27]

$$u = u^\Omega, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^\Omega}{\partial \nu}, \tag{7}$$

где $\partial/\partial \nu$ — производная по внешней нормали на границе S . Эти соотношения выражают непрерывность давления на границе.

Задача рассеяния падающего поля $u^i(r)$ на шаре состоит в нахождении рассеянного поля $u^s(r)$ вне шара $\Omega \subset R^3$, удовлетворяющего условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности, и поля $u^\Omega(r)$ внутри шара. Решение поставленной задачи может быть выписано в виде рядов по специальным функциям.

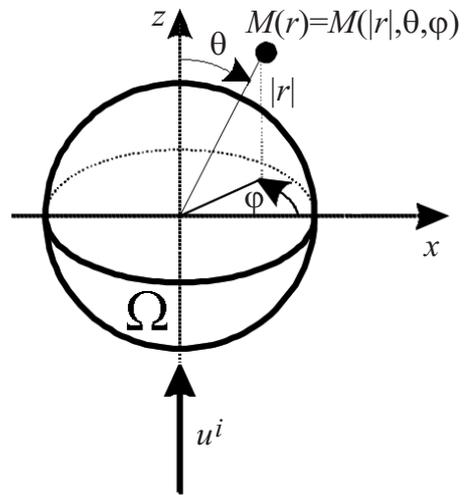


Рис. 1. К выводу аналитической решения задачи рассеяния

Введем сферические координаты, т.е. точка M с координатами (x, y, z) будет иметь координаты $(|r|, \theta, \varphi)$. В этом случае падающее поле может быть представлено в виде ряда

$$u^i(|r|, \theta) = e^{-ik|r| \cos \theta} = \sum_{m \geq 0} \delta_m (-i)^m T_m j_m(k|r|),$$

где $T_m = P_m(\cos \theta)$, $P_m(x)$ — полиномы Лежандра, $\delta_m = 2m + 1$, $j_m(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{m+1/2}(x)$ — сферическая функция Бесселя первого рода.

Внутри области Ω решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условию сопряжения (7), имеет вид

$$u^\Omega(|r|, \theta) = \sum_{m \geq 0} F_m \delta_m (-i)^m T_m j_m(k|r|),$$

где $F_m = \frac{j_m(kR) h'_m(kR) - j'_m(kR) h_m(kR)}{j_m(k_\Omega R) h'_m(kR) - C j'_m(k_\Omega R) h_m(kR)}$.

Решение поставленной задачи рассеяния — это волна $u^s(r)$, которая является решением уравнения Гельмгольца (6) вне области Ω , удовлетворяющая условию излучения Зоммерфельда, и такая, что $u^i(r) + u^s(r)$ удовлетворяет условию сопряжения (7):

$$u^s(|r|, \theta) = \sum_{m \geq 0} D_m \delta_m (-i)^m T_m h_m(k|r|). \tag{8}$$

Здесь $D_m = \frac{C j_m(kR) j'_m(k_\Omega R) - j'_m(kR) j_m(k_\Omega R)}{j_m(k_\Omega R) h'_m(kR) - C j'_m(k_\Omega R) h_m(kR)}$, $C = \frac{k_\Omega \rho}{k \rho_\Omega} = \frac{c \rho}{c_\Omega \rho_\Omega}$, $h_m(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{m+1/2}(x)$ — сферическая функция Ханкеля второго рода. Сходимость рядов, представляющих решение задачи рассеяния, исследована в [28].

Решение задачи рассеяния выписано в предположении, что ультразвуковое возмущение является гармоническим по времени. В этом случае значения акустического давления могут быть получены на основе (8). Предположим теперь, что падающее поле представляет собой плоскую волну в виде короткого импульса, распространяющегося вдоль оси OZ : $p^i(r, t) = f\left(t - \frac{z}{c_0}\right)$, где функция $f(t)$ отлична от нуля на интервале $(t_*, t_* + \tau)$, τ — длительность импульса. На рис. 2 изображен график зондирующего импульса как функции от времени, использовавшегося нами при решении обратной задачи. Будем рассматривать функцию $f(t)$ в виде следующего конечного ряда Фурье на отрезке $(-T_0, T_0)$:

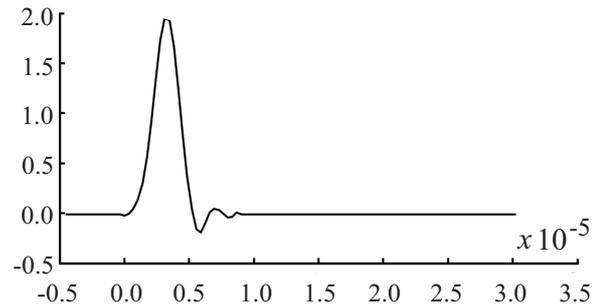


Рис. 2. Форма короткого зондирующего импульса

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N f_n \exp(i\omega_n t), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T_0}, \tag{9}$$

где T_0 выбирается из условия полного прохождения импульса в интересующей нас области. Значение $t = 0$ соответствует началу прохождения импульса через точку $x = y = z = 0$.

Пользуясь линейностью уравнения Гельмгольца и условий сопряжения, можно решать задачу рассеяния по формулам (8) отдельно для каждой гармоники ω_n ($k_n = \omega_n/c_0$) соотношения (9) и получать решения $u^s(r, \omega_n)$. Общим решением поставленной задачи на интервале $(-T_0, T_0)$ будет сумма решений, полученных для рассматриваемых гармоник: $p(r, t) = \sum_{n=-N}^N u^s(r, \omega_n) \exp(i\omega_n t)$. Заметим, что, поскольку $f(t)$ действительная функция, проводить расчеты можно только для половины слагаемых.

5. Модельная задача.

5.1. Постановка численного эксперимента. Значения параметров численного эксперимента являются характерными для ультразвукового обследования молочной железы. Схема численного эксперимента показана на рис. 3. Здесь изображен куб, внутри которого проводилось численное моделирование взаимодействия ультразвукового излучения с неоднородностью. Центр куба расположен в начале координат,

ось Z направлена вверх. Размер ребра куба — 20 см. Он заполнен однородной средой с неоднородностью Ω , обозначенной цифрой 1. Среда имеет плотность 1 г/см^3 , скорость распространения ультразвука $c_0 = 1500 \text{ м/с}$ (вода). Неоднородность имеет форму шара радиусом $R = 6 \text{ см}$. Значение скорости звука внутри шара $c_\Omega = 1600 \text{ м/с}$. Плотность шара равняется плотности окружающей среды.

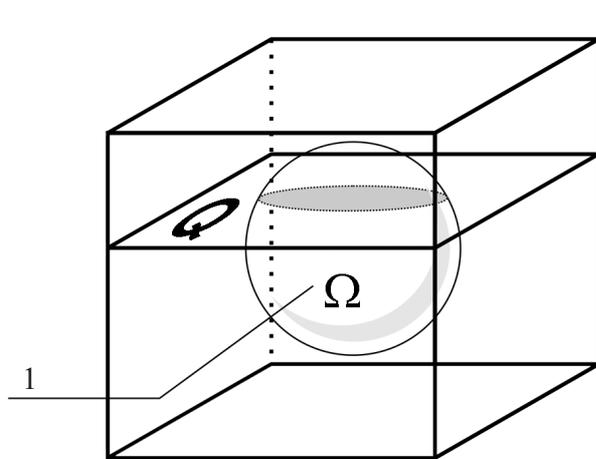


Рис. 3. Схема численного эксперимента в 3D

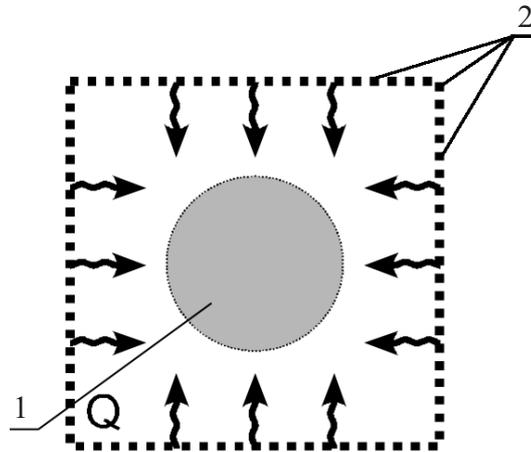


Рис. 4. Схема численного эксперимента в 2D

В качестве излучения при решении прямой задачи в 3D использовалась плоская волна, падающая на шар перпендикулярно оси Z с четырех боковых сторон вдоль осей X и Y . На рис. 2 изображен график зондирующего импульса. Размер импульса $\lambda = 7 \text{ мм}$. Расстояние между приемниками, расположенными на сторонах куба, не превосходило $\lambda/3$.

С целью исследования возможностей использования послойных схем томографической реконструкции 3D объектов в волновой томографии модельные расчеты по решению двумерной обратной задачи проводились в различных сечениях куба Q , перпендикулярных оси Z и пересекающих шар (рис. 3). Схема эксперимента при решении 2D обратной задачи приведена на рис. 4. Размер квадратных сечений Q , в которых решались 2D обратные задачи, равен $20 \times 20 \text{ см}$, размер сетки расчетов — 1000×1000 точек. Неоднородность имеет вид круга и обозначена цифрой 1. Приемники расположены по периметру квадрата и обозначены цифрой 2. Неоднородность зондируется с каждой стороны квадрата четырьмя плоскими импульсами, обозначенными стрелками.

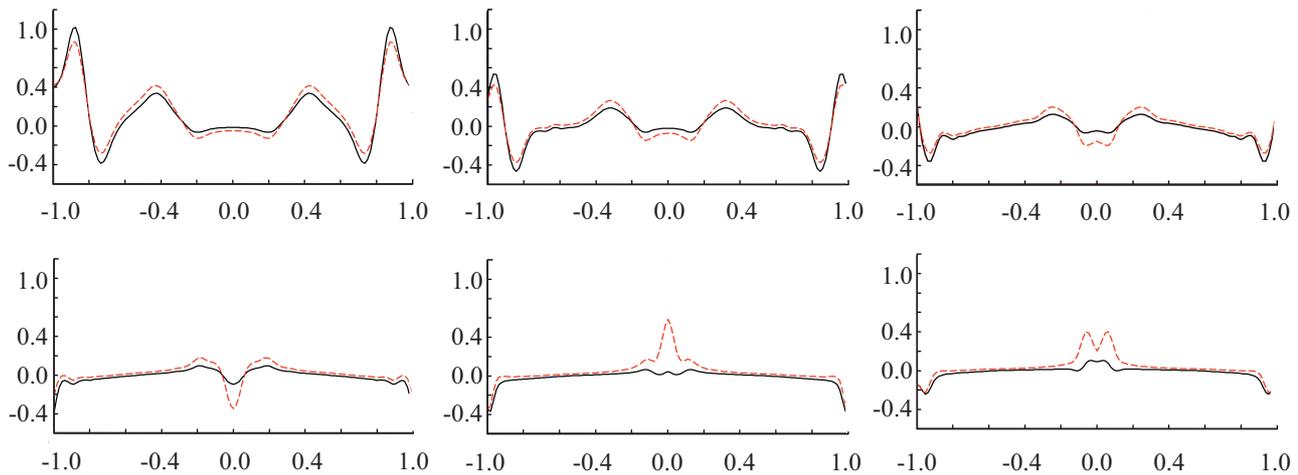


Рис. 5. Сравнение решений прямой задачи для цилиндра и сферы на дальней границе квадрата в последовательные моменты времени

5.2. Сравнение результатов решения прямой задачи в 3D и в 2D. Рассмотрим случай, когда сечение Q лежит в плоскости $Z = 0$ (центральное сечение). Приведем сравнение результатов решения прямой задачи в этом сечении для 3D случая (неоднородность — шар) по формуле (8) и результатов аналитического решения прямой задачи для 2D случая, описанных в [29]. В 2D случае неоднородность имеет вид круга (рис. 4), полученного при пересечении выбранного центрального слоя и шара (рис. 3)

(эта задача эквивалентна рассеянию на цилиндре в 3D). При решении 2D обратной задачи по 2D данным прямой задачи круг восстанавливается с очень высоким качеством [29]. Поэтому сравнение данных прямой задачи в 2D и 3D представляет интерес, так как чем больше отличие, тем худшее качество реконструкции следует ожидать.

На рис. 5 приведены результаты расчета прямой задачи для цилиндра (сплошная линия) и шара (пунктирная линия) на дальней по направлению падающей волны границе квадрата Q центрального сечения. Выбрано несколько последовательных значений времени при прохождении этой границы фронтом рассеянной волны. Сравнение графиков показывает, что наибольшие различия наблюдаются в области геометрической тени за неоднородностью.

Таким образом, даже для центрального сечения, где падающая волна в силу симметрии не выходит из плоскости сечения, имеются расхождения в рассеянии для 2D и 3D задачи, что связано с рефракцией в соседних слоях для 3D случая. Расхождения должны сказываться на качестве реконструкции в центральном слое.

Если выделить параллельное сечение, когда плоскость Q проходит, например, на расстоянии $R/2$ от центра (R — радиус сферы), то вопрос о качестве реконструированного двумерного сечения не является столь очевидным, поскольку волна в этом случае падает под углом 60 градусов к поверхности сферы и в силу рефракции выходит за пределы этого слоя.

5.3. Послойная реконструкция 3D объекта. Модельные расчеты для послойной реконструкции трехмерного объекта состояли в следующем. Выбирается набор горизонтальных сечений шара $z = z_i$, $i = 1, \dots, 5$, и аналитически по формуле (8) решается 3D прямая задача по вычислению рассеянного поля на границе куба расчетов на каждой плоскости $z = z_i$ (рис. 3). По полученным данным решаются 2D обратные задачи (2), (3) в каждом сечении (рис. 4) на основе методов, описанных выше. Полученное решение сравнивается с известным сечением шара в соответствующей плоскости.

На рис. 6б приведены восстановленные в выбранных сечениях $z = 0$ см, $z = 3$ см, $z = 4$ см, $z = 5$ см, $z = 6$ см скоростные разрезы $c(x, y)$, где $z = 0$ проходит через центр шара, при этом значение z возрастает слева направо. На рис. 6а для наглядности приведены модельные сечения шара для тех же z . Видно, что для центрального сечения $z = 0$ восстановленное решение достаточно хорошо совпадает с точным решением. Форма сечения практически совпадает с формой неоднородности в этом сечении. Наличие небольших артефактов связано с расхождениями при решении прямой задачи в 2D и 3D, приведенными на рис. 5. В следующем сечении при $z = 3$ форма неоднородности уже искажается, что связано с явлениями рефракции. При увеличении z увеличивается влияние рефракции, которая приводит к еще большим искажениям для сечений $z = 4$ и $z = 5$. Так, при $z = 6$ все изображение представляет собой артефакт, поскольку точным решением является точка.

Таким образом, можно считать, что хотя в принципе послойная схема применима в ультразвуковой томографии, ее использование приводит к искажению геометрических параметров неоднородности, к появлению артефактов, изображения размываются вдоль оси Z , что согласуется с результатами работы [11]. Проще всего проблемы, возникающие в послойной томографии, можно описать на физическом уровне строгости в лучевом приближении. В отличие от рентгеновской томографии, лучи в ультразвуковой томографии уже не являются прямыми. Более того, они выходят из плоскости, что и ограничивает возможности использования послойных схем томографии.

6. Выводы. Широко применяемый в настоящее время подход, в рамках которого решение трехмерной задачи ультразвуковой томографии заменяется набором двумерных обратных задач по слоям, не является, строго говоря, обоснованным с математической точки зрения. Однако полученные результаты показывают, что в области параметров, близких к ультразвуковой диагностике заболеваний молочной железы, с некоторой погрешностью удается восстанавливать как форму неоднородного объекта, так и абсолютные значения скорости распространения волны.

Наличие эффектов дифракции, рефракции и переотражения приводит к появлению артефактов в восстановленных сечениях и ухудшению разрешения в направлении, перпендикулярном сечениям. Наиболее значимым физическим эффектом, определяющим такие искажения, является эффект рефракции.

Используемый в модельных расчетах в качестве неоднородности объект (однородный шар) является примитивным. Однако в этом случае удается выписать аналитическое решение для рассеянной волны, что позволяет провести полноценное моделирование и даже у такого простого объекта обнаружить эффекты искажения решения обратной задачи.

Решение большого числа модельных обратных задач в настоящей работе было бы невозможно без использования суперкомпьютеров и разработанного высокомасштабируемого программного кода. Проведенные оптимизации позволили сократить время выполнения исходной программы в 2–4 раза. При этом

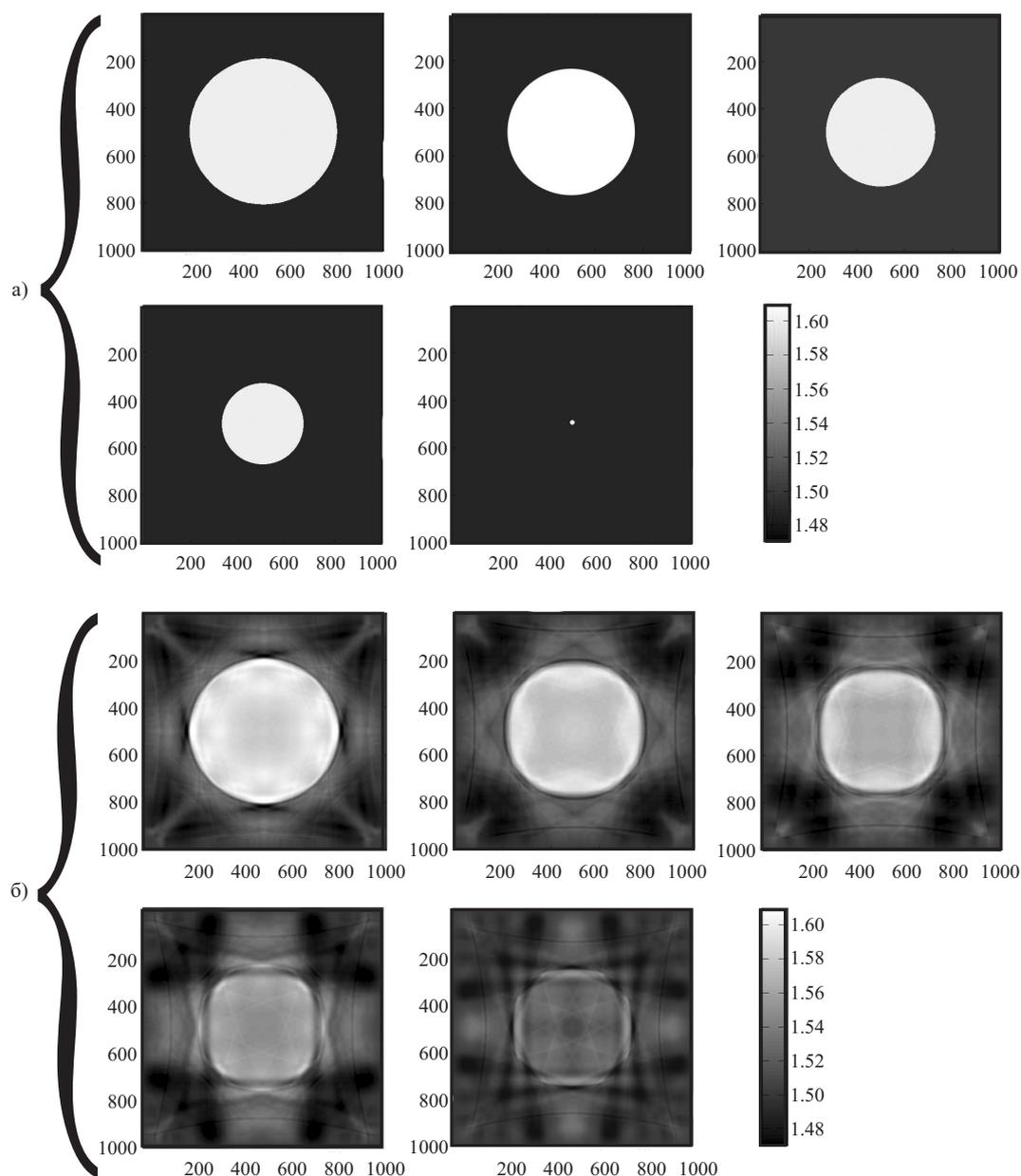


Рис. 6. Модельные (а) и восстановленные (б) сечения шара

также удалось снизить скорость уменьшения эффективности при увеличении числа процессов.

Более перспективным является решение обратных задач ультразвуковой томографии непосредственно в 3D варианте, в котором эффекты дифракции, рефракции и переотражения точно учитываются в постановке задач. Платой за это является огромный объем вычислений при решении обратной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базулин Е.Г.* О возможности использования в ультразвуковом неразрушающем контроле метода максимальной энтропии для получения изображения рассеивателей по набору эхосигналов // Акуст. журн. 2013. **59**, № 2. 235–254.
2. *Смагин Н.В., Пыльнов Ю.В., Преображенский В.Л., Перно Ф.* Диагностика и доплерография потоков жидкости с помощью обращения волнового фронта ультразвука // Акуст. журн. 2009. **55**, № 4–5. 653–661.
3. *Гайкович П.К., Хилько А.И., Гайкович К.П.* Метод многочастотной ближнеполевой акустической томографии объемных неоднородностей морского дна // Изв. высших учебных заведений. Радиофизика. 2011. **54**, № 6. 431–443.
4. *Jirik R., Peterlik I., Ruiter N., Fousek J., Dapp R., Zapf M., Jan J.* Sound-speed image reconstruction in sparse-

- aperture 3D ultrasound transmission tomography // IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2012. **59**, N 2. 254–264.
5. *Wiskin J., Borup D.T., Johnson S.A., Berggren M.* Non-linear inverse scattering: high resolution quantitative breast tissue tomography // J. Acoust. Soc. Am. 2012. **131**, N 5. 3802–3813.
 6. *Glide-Hurst C.K., Duric N., Littrup P.* Volumetric breast density evaluation from ultrasound tomography images // Medical Physics. 2008. **35**. 3988–3997.
 7. *Huang L., Quan Y.* Sound-speed tomography using first-arrival transmission ultrasound for a ring array // Proc. SPIE Medical Imaging. Vol. 6513. 2007. 651306.1–651306.9 pp.
 8. *Roy O., Jovanovi'c I., Hormati A., Parhizkar R., Vetterli M.* Sound speed estimation using wave-based ultrasound tomography: theory and GPU implementation // Proc. SPIE Medical Imaging 2010: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. Vol. 7629. 2010. Paper 7629. 17 pp.
 9. *Goncharsky A.V., Romanov S.Y.* Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // Inverse Problems. 2013. **29**, N 7. Paper 075004. 22 pp.
 10. *Varadan V.V., Ma Y., Varadan V.K., Lakhtakia A.* Scattering of waves by spheres and cylinders // Field Representations and Introduction to Scattering. Amsterdam: North-Holland, 1991. 211–324.
 11. *Lavarello R.J., Oelze M.L.* Tomographic reconstruction of three-dimensional volumes using the distorted Born iterative method // IEEE Trans. Med. Imaging. 2009. **28**. 1643–1653.
 12. *Natterer F., Wubbeling F.A.* Propagation-backpropagation method for ultrasound tomography // Inverse Problems. 1995. **11**, N 6. 1225–1232.
 13. *Beilina L., Klibanov M.V.* Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York: Springer, 2012.
 14. *Гончарский А.В., Романов С.Ю.* О двух подходах к решению коэффициентных обратных задач для волновых уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. **52**, № 2. 263–269.
 15. *Воеводин Вл.В., Жуматый С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В.* Практика суперкомпьютера “Ломоносов” // Открытые системы. 2012. № 7. 36–39.
 16. *Воеводин Вад.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Разработка высокоэффективных масштабируемых программ в задаче ультразвуковой томографии // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 307–315.
 17. *Романов С.Ю.* К вопросу о масштабируемости программы для обратной задачи волновой томографии // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 2. 160–167.
 18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Москва: Наука, 1986.
 19. *Ватульян А.О., Явруян О.В., Богачев И.В.* Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акуст. журн. 2011. **57**, № 6. 723–730.
 20. *Головина С.Г., Романов С.Ю., Степанов В.В.* Об одной обратной задаче сейсмологии // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1994. № 4. 16–21.
 21. *Гончарский А.В., Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Об одной задаче волновой диагностики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2010. № 1. 7–13.
 22. *Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю.* Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2003. **43**, № 8. 1201–1209.
 23. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Харченко С.А.* Обратная задача акустической диагностики трехмерных сред // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**. 113–121.
 24. *Овчинников С.Л., Романов С.Ю.* Организация параллельных вычислений при решении обратной задачи волновой диагностики // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**. 338–345.
 25. Средство профилирования mpiP (<http://mpip.sourceforge.net/>).
 26. *Иванов В.И., Скобельцын С.А.* Моделирование задачи идентификации положения полости в упругом препятствии по рассеянному звуковому полю // Изв. Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2011. № 3. 74–86.
 27. *Angell T.S., Kleinman R.E., Hettlich F.* The resistive and conductive problems for the exterior Helmholtz equation // SIAM J. Appl. Math. 1990. N 50. 1607–1622.
 28. *Korneev V.A., Johnson L.R.* Scattering of elastic waves by a spherical inclusion. 1. Theory and numerical results // Geophys. J. Int. 1993. N 115. 230–250.
 29. *Агаян Г.М., Романов С.Ю.* Моделирование на суперкомпьютере в задаче ультразвуковой диагностики с помощью аналитических решений // Научный сервис в сети ИНТЕРНЕТ: все грани параллелизма. Труды Международной суперкомпьютерной конференции (Новороссийск, 23–28 сентября 2013 г.). М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013. 195–201.

Поступила в редакцию
10.11.2013