УДК 517.911:519.622

ТЕСТЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРАКТИКУМА ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

О. Б. Арушанян[1], С. Ф. Залёткин[1], Н. Н. Калиткин[2]

Приводятся тестовые задачи для выявления рабочих характеристик и областей применимости программ решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Значения конца интервала интегрирования и значения параметров тестовых задач могут варьироваться для получения более полной информации о свойствах исследуемых программ и реализованных в них численных методов.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, численный анализ, численные методы, одношаговые разностные методы, задача Коши, устойчивость, сходимость, аппроксимация.

При проведении занятий по вычислительному практикуму весьма важным является всестороннее тестирование студенческих программ. Таким образом достигается закрепление не только знаний теоретического курса по методам вычислений, но и приемов грамотного программирования. В этом отношении особенный интерес представляет практикум по решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений одношаговыми разностными методами [1].

В настоящей работе предлагается набор тестов, составленных для выявления рабочих характеристик программ и анализа их поведения в зависимости от свойств решаемой задачи. Рассматриваемые здесь тесты (более широкий их набор опубликован в [2, 3]) были в разные годы применены для сертификации программ Библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ [4] из главы “Обыкновенные дифференциальные уравнения”. Эти программы в версиях на языках Фортран и Си помещены на научно-образовательном сервере НИВЦ МГУ по численному анализу (http://www.srcc.msu.su/num_anal) и доступны для общего использования стандартными средствами компьютерной сети Интернет.

Тест 1.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \mu_0 y_1,\\
\frac{dy_2}{dx} &= (\mu_0-\mu_1)y_1 + (\mu_1+\nu_1)y_2 - \nu_1 y_3,\\
\frac{dy_3}{dx} &= (\mu_0-\mu_1-\nu_1)y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1-\nu_1)y_3,\\
\frac{dy_4}{dx} &= (\mu_0-\mu_1-\nu_1)y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1-\nu_1-\mu_2)y_3 + (\mu_2+\nu_2)y_4 - \nu_2 y_5,\\
\frac{dy_5}{dx} &= (\mu_0-\mu_1-\nu_1)y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1-\nu_1-\mu_2-\nu_2)y_3 + 2\nu_2 y_4 + (\mu_2-\nu_2)y_5.
\end{aligned}$$

Пусть $y_2(0) = y_3(0)$ и $y_4(0) = y_5(0)$. Тогда точное решение этой линейной системы имеет вид ($0 \leqslant x \leqslant 1$)

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y_1(0)e^{\mu_0 x},\\
y_2(x) &= y_1(x) + \big(y_2(0)-y_1(0)\big)e^{\mu_1 x}\cos\nu_1 x,\\
y_3(x) &= y_1(x) + \sqrt{2}\,\big(y_2(0)-y_1(0)\big)e^{\mu_1 x}\sin\nu_1(x+\pi/4),\\
y_4(x) &= y_3(x) + \big(y_4(0)-y_2(0)\big)e^{\mu_2 x}\cos\nu_2 x,\\
y_5(x) &= y_3(x) + \sqrt{2}\,\big(y_4(0)-y_2(0)\big)e^{\mu_2 x}\sin\nu_2(x+\pi/4).
\end{aligned}$$

Собственные значения матрицы системы равны $\lambda_1 = \mu_0$, $\lambda_{2,3} = \mu_1 \pm i\nu_1$, $\lambda_{4,5} = \mu_2 \pm i\nu_2$. Тестовый пример подобран таким образом, чтобы его решение при различных значениях параметров содержало

---

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

[2] Институт математического моделирования РАН, 125047, Москва, Миусская пл., 4, корп. А; kalitkin@imamod.ru

чисто вещественную компоненту (растущую или затухающую) и компоненты, носящие периодический характер.

Случай 1: плохо обусловленная задача. Начальные условия:

$$y_1(0) = 0.1, \quad y_2(0) = y_3(0) = 1, \quad y_4(0) = y_5(0) = 0.5\,.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = 10, \quad \mu_1 = 4, \quad \nu_1 = 20\pi, \quad \mu_2 = 5, \quad \nu_2 = 100\,.$$

В этом случае в решении присутствуют быстро растущие компоненты и периодические компоненты.

Случай 2: мягкая (хорошо обусловленная) задача. Начальные условия:

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = y_3(0) = 1.5, \quad y_4(0) = y_5(0) = 2.5\,.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = -2, \quad \mu_1 = 1, \quad \nu_1 = 1, \quad \mu_2 = -1, \quad \nu_2 = 10\,.$$

В этом случае в решении присутствуют слабо растущие компоненты и слабо затухающие компоненты.

Случай 3: быстроосциллирующая задача. Начальные условия:

$$y_1(0) = 0.5, \quad y_2(0) = y_3(0) = 0.8, \quad y_4(0) = y_5(0) = 2\,.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = -2, \quad \mu_1 = 1, \quad \nu_1 = 1, \quad \mu_2 = -1, \quad \nu_2 = 1000\,.$$

В этом случае в решении присутствуют медленно меняющиеся и быстро меняющиеся компоненты (последние определяют трудоемкость задачи).

Случай 4: жесткая задача. Начальные условия:

$$y_1(0) = 10, \quad y_2(0) = y_3(0) = 11, \quad y_4(0) = y_5(0) = 111\,.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = -100, \quad \mu_1 = -1, \quad \nu_1 = 1, \quad \mu_2 = -10\,000, \quad \nu_2 = 10 \ \ (\text{или} \ \ \nu_2 = 1000)\,.$$

В этом случае в решении присутствуют сильно затухающие компоненты, которые быстро осциллируют, причем за одну осцилляцию соответствующая компонента существенно затухает.

Случай 5: жесткоосциллирующая задача. Начальные условия:

$$y_1(0) = 100, \quad y_2(0) = y_3(0) = 101, \quad y_4(0) = y_5(0) = 201\,.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = -10\,000, \quad \mu_1 = 1, \quad \nu_1 = 1, \quad \mu_2 = -100, \quad \nu_2 = 1000\,.$$

В этом случае в решении присутствуют сильно затухающие компоненты, которые быстро осциллируют, причем за одну осцилляцию соответствующая компонента мало затухает.

Тест 2.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \mu_1 y_1, \\
\frac{dy_2}{dx} &= y_1 + \mu_1 y_2, \\
\frac{dy_3}{dx} &= \mu_2 y_3, \\
\frac{dy_4}{dx} &= y_3 + \mu_2 y_4, \\
\frac{dy_5}{dx} &= 2y_4 + \mu_2 y_5, \\
\frac{dy_6}{dx} &= 3y_5 + \mu_2 y_6.
\end{aligned}$$

Точное решение этой линейной системы, у которой матрица правой части состоит из двух жордановых клеток, имеет вид ($0 \leqslant x \leqslant 1$)

$$
\begin{aligned}
&y_1(x) = y_1(0)e^{\mu_1 x},\\
&y_2(x) = \big(y_2(0) + y_1(0)x\big)e^{\mu_1 x},\\
&y_3(x) = y_3(0)e^{\mu_2 x},\\
&y_4(x) = \big(y_4(0) + y_3(0)x\big)e^{\mu_2 x},\\
&y_5(x) = \big(y_5(0) + 2y_4(0)x + y_3(0)x^2\big)e^{\mu_2 x},\\
&y_6(x) = \big(y_6(0) + 3y_5(0)x + 3y_4(0)x^2 + y_3(0)x^3\big)e^{\mu_2 x}.
\end{aligned}
$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = y_6(0) = 1000$$

данная линейная система является жесткой, если значения параметров равны

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = -10\,000\,.$$

Тест 3.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= 6y_1 + 3y_2 + 6\cos x + 4\sin x,\\
\frac{dy_2}{dx} &= 4y_1 + 5y_2 + 3\cos x + 5\sin x.
\end{aligned}
$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 0$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = -\cos x, \quad y_2 = -\sin x.$$

Из общего решения системы

$$y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{9x} - \cos x, \quad y_2 = -\frac{4}{3}\,C_1e^{2x} + C_2e^{9x} - \sin x$$

видно, что частное решение системы (рассматриваемое на всей положительной полуоси) является неустойчивым по отношению к начальным данным и ошибкам округления.

Тест 4.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= 4y_1 - 3y_2 + \sin x,\\
\frac{dy_2}{dx} &= 2y_1 - y_2 - 2\cos x.
\end{aligned}
$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = \cos x - 2\sin x, \quad y_2 = 2\cos x - 2\sin x.$$

Из общего решения системы

$$y_1 = C_1e^{x} + 3C_2e^{2x} + \cos x - 2\sin x, \quad y_2 = C_1e^{x} + 2C_2e^{2x} + 2\cos x - 2\sin x$$

видно, что частное решение системы (рассматриваемое на всей положительной полуоси) является неустойчивым по отношению к начальным данным и ошибкам округления.

Тест 5.

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= y_1^2 y_2,\\
\frac{dy_2}{dx} &= -\frac{1}{y_1}.
\end{aligned}
$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}.$$

Имеем случай, когда одна компонента решения и ее производная быстро растут, а другая компонента решения и ее производная быстро убывают.

Тест 6.

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{2}{x}\,y_1 + 1,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{x+2}{x}\,y_1 + y_2 - 1.$$

При начальных условиях

$$y_1(-10) = -10/3, \quad y_2(-10) = 10/3$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = x/3, \quad y_2 = -x/3.$$

Из общего решения системы

$$y_1 = \frac{x}{3} + \frac{C_1}{x^2}, \quad y_2 = -\frac{x}{3} - \frac{C_1}{x^2} + C_2 e^x$$

видно, что из-за члена C_1/x^2 частное решение системы чувствительно к ошибкам округлений при значениях x, достаточно близких к нулю. Погрешность вычислений правой части системы выражается через погрешность ее решения δ_1 и δ_2 следующим образом: $-2\delta_1/x$ для y_1' и $\delta_1 + 2\delta_1/x + \delta_2$ для y_2'. Следовательно, эта погрешность становится большой при $x \to 0$ и может привести к появлению в численном решении члена C_1/x^2.

Тест 7.

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{y_2}{x},$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{y_1}{x}.$$

При начальных условиях

$$y_1(-10) = -10/3, \quad y_2(-10) = 10/3$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = x/3, \quad y_2 = -x/3.$$

Из общего решения системы

$$y_1 = C_1 x + \frac{C_2}{x}, \quad y_2 = -C_1 x + \frac{C_2}{x}$$

видно, что из-за члена C_2/x частное решение системы чувствительно к ошибкам округлений при значениях x, достаточно близких к нулю. Погрешность вычислений правой части системы выражается через погрешность ее решения δ_1 и δ_2 следующим образом: $-\delta_2/x$ для y_1' и $-\delta_1/x$ для y_2'. Следовательно, эта погрешность становится большой при $x \to 0$ и может привести к появлению в численном решении члена C_2/x.

Тест 8.

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 \cos x,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 e^{-\sin x}.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = e^{\sin x}, \quad y_2 = x + 1.$$

Данный тест соответствует случаю, когда решение имеет периодическую компоненту.

Тест 9.

$$\frac{dy_1}{dx} = -3y_2 + \cos x,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = 4y_2 - \cos x.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = -3/17, \quad y_2(0) = 4/17$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = \frac{5}{17}\sin x - \frac{3}{17}\cos x, \quad y_2 = -\frac{1}{17}\sin x + \frac{4}{17}\cos x.$$

Из общего решения системы

$$y_1 = \frac{5}{17}\sin x - \frac{3}{17}\cos x + C_1 + 3C_2e^{4x}, \quad y_2 = -\frac{1}{17}\sin x + \frac{4}{17}\cos x - 4C_2e^{4x}$$

видно, что частное решение системы (рассматриваемое на всей положительной полуоси) является неустойчивым по отношению к начальным данным и ошибкам округления.

Тест 10.

$$\frac{dy_1}{dx} = -5y_1 - 2y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 - 7y_2.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = (2\sin x + 2\cos x)\, e^{-6x}, \quad y_2 = 2\sin x\, e^{-6x}$$

и является быстрозатухающим.

Тест 11.

$$\frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - 4y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -2y_1 - 5y_2.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = 0$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = 2e^{-x} + e^{-7x}, \quad y_2 = -e^{-x} + e^{-7x}$$

и является быстрозатухающим.

Тест 12.

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = e^x(\sin x + \cos x), \quad y_2 = e^x(\sin x - \cos x).$$

Данный тест соответствует случаю систем с быстрорастущими или имеющими характер быстронарастающих колебаний решениями.

Тест 13.

$$\frac{dy}{dx} = y - \frac{2x}{y}.$$

При начальном условии $y(0)=1$ решение уравнения имеет вид

$$y=\sqrt{2x+1}.$$

Общее решение уравнения:

$$y=\pm\sqrt{2x+1+Ce^{2x}}.$$

Правая часть уравнения вдоль частного решения записывается так:

$$y-\frac{2x}{y}=\sqrt{2x+1}-\frac{2x}{\sqrt{2x+1}}=\sqrt{2x+1}-\frac{\sqrt{2x+1}}{1+1/(2x)}.$$

Следовательно, правая часть является разностью двух близких величин при достаточно больших x, а это приводит к тому, что ошибки округления при ее вычислении будут значительными. Эти ошибки в конечном счете приведут к появлению в численном решении экспоненты Ce^{2x}. Поэтому частное решение уравнения (хотя оно и не является быстрорастущим) неустойчиво на всей положительной полуоси по отношению к начальным данным и ошибкам округления.

Тест 14.

$$\frac{dy}{dx}=a\left(y-x^2\right).$$

При начальном условии $y(0)=2/a^2$ решение уравнения имеет вид

$$y=\frac{2}{a^2}+\frac{2}{a}x+x^2.$$

Из общего решения

$$y=\frac{2}{a^2}+\frac{2}{a}x+x^2+Ce^{ax}$$

следует, что при $a>0$ частное решение неустойчиво на положительной полуоси по отношению к начальным данным и ошибкам округления. Кроме того, при значениях a, много больших длины интервала интегрирования, появляющаяся из-за ошибок округления экспонента Ce^{ax} может достичь значительных размеров, даже если интервал интегрирования мал.

Тест 15.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-x}.$$

При начальном условии $y(0)=1$ решение уравнения имеет вид

$$y=1-\ln(1-x).$$

Данный тест соответствует случаю уравнений, правые части которых имеют особенности.

Тест 16.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sin 2x-y\cos x.$$

При начальном условии $y(0)=0$ решение уравнения имеет вид

$$y=\sin x-1+e^{-\sin x}.$$

Данный тест соответствует случаю уравнений, решения которых имеют периодические компоненты.

Тест 17.

$$\frac{dy}{dx}=e^{-\sin x}-y\cos x.$$

При начальном условии $y(0)=1$ решение уравнения имеет вид

$$y=(x+1)e^{-\sin x}.$$

Данный тест соответствует случаю уравнений, решения которых имеют характер нарастающих колебаний.

Тест 18.

$$\frac{dy}{dx}=y^2+3y-4.$$

При начальном условии $y(0) = -3$ решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{1 - 16e^{5x}}{1 + 4e^{5x}}.$$

Это частное решение асимптотически приближается к прямой $y = -4$.

Тест 19.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + 3xy.$$

При начальном условии $y(0) = -1$ решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{3}{-2e^{-3x^2/2} - 1}.$$

Это частное решение асимптотически приближается к прямой $y = -3$.

Тест 20.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{x^2}\,y.$$

При начальном условии $y(1) = e$ решение уравнения имеет вид

$$y = xe^{1/x}.$$

Это частное решение асимптотически приближается к прямой $y = x$.

Тест 21.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x^2+1}\,y + \frac{2x^2}{x^2+1}.$$

При начальном условии $y(0) = 0$ решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{2}{3}\,\frac{x^3}{x^2+1}.$$

Это частное решение асимптотически приближается к прямой $y = 2x/3$.

Тест 22.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x^2-1}\,y + \frac{\cos x}{x^2-1}.$$

При начальном условии $y(0) = 1$ решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{-1 + \sin x}{x^2 - 1}.$$

Данный тест соответствует случаю уравнений, правые части которых имеют особенности.

Тест 23.

$$\frac{dy_1}{dx} = -20y_1 + y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 20y_2,$$
$$\frac{dy_3}{dx} = -21y_1 - 19y_2.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 10, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0$$

решение системы имеет вид

$$y_1 = 10e^{-20x}\cos x, \quad y_2 = -10e^{-20x}\sin x, \quad y_3 = y_1 + y_2 - 10.$$

Матрица системы имеет следующие собственные значения: $\lambda_1 = -20 + i$, $\lambda_2 = -20 - i$, $\lambda_3 = 0$. Видно, что большие по модулю собственные значения обладают большими отрицательными вещественными частями. Таким образом, заключаем, что данная система является жесткой.

Тест 24.

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = 2y_2' + y_1 - \frac{(1-\mu)(y_1+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(y_1-1+\mu)}{r_2^3}, \quad r_1^2 = (y_1+\mu)^2 + y_2^2,$$
$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = -2y_1' + y_2 - \frac{(1-\mu)y_2}{r_1^3} - \frac{\mu y_2}{r_2^3}, \qquad r_2^2 = (y_1-1+\mu)^2 + y_2^2.$$

При начальных условиях

$$y_1(0) = 0.994, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = -2.0317326295573368$$

и при $\mu = 0.012277471$ система описывает движение по замкнутой орбите с периодом $T = 11.124340337266$ (параметры теста даны здесь приближенно).

Малые изменения порядка 10^{-n} ($n = 4, 8, 12, 16$) в начальной скорости $y_2'(0)$ вызывают большие изменения в y_1, y_1' и y_2' в конце периода. Данная система имеет следующий интеграл:

$$J(y_1, y_2, y_1', y_2') = \frac{1}{2}\left({y_1'}^2 + {y_2'}^2 - y_1^2 - y_2^2\right) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}.$$

Этот интеграл (называемый интегралом Якоби) может быть использован для проверки точности приближенного решения.

Тест 25.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{a}{b}\, y_2 + \lambda y_1 \left(\sqrt{(y_1/a)^2 + (y_2/b)^2} - 1\right),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{b}{a}\, y_1 + \lambda y_2 \left(\sqrt{(y_1/a)^2 + (y_2/b)^2} - 1\right).$$

Пусть заданы начальные условия

$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}.$$

Тогда точное решение имеет вид

$$y_1(x) = a\rho(x)\sin(x+\varphi_0), \quad y_2(x) = b\rho(x)\cos(x+\varphi_0),$$

где

$$\rho(x) = \frac{\rho_0}{\rho_0 - (\rho_0 - 1)\exp(\lambda x)}, \quad \rho_0 = \sqrt{(y_{10}/a)^2 + (y_{20}/b)^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{by_{10}}{ay_{20}}.$$

При вещественных значениях $\lambda < 0$ решение имеет устойчивый предельный цикл — эллипс с полуосями a и b:

$$(y_{1\infty}/a)^2 + (y_{2\infty}/b)^2 = 1.$$

При $\lambda \ll -1$ задача является жесткой.

Пример: взять $\lambda = -1000$, $a = 1$, $b = 100$, $y_{10} = 5$, $y_{20} = 0.001$; вычислить решение и построить его на фазовой плоскости.

Тест 26.

$$\frac{dy}{dx} = \lambda\left(y^2 - a^2\right), \quad a > 0, \quad y(0) = y_0.$$

Задача имеет точное решение

$$y(x) = a\,\frac{y_0 + a + (y_0 - a)\exp(2\lambda a x)}{y_0 + a - (y_0 - a)\exp(2\lambda a x)}$$

и два предельных решения $y(x) = a$ и $y(x) = -a$. При $\lambda < 0$ первое предельное решение устойчиво, второе неустойчиво; при начальных данных из диапазона $-a < y_0 < +\infty$ решение сходится к первому предельному, при $-\infty < y_0 < -a$ быстро уходит на минус бесконечность. Если $\lambda \ll -1$, то в диапазоне $0 < y_0 < +\infty$ задача жесткая, в диапазоне $-\infty < y_0 < 0$ — плохо обусловленная. Таким образом, если $-a < y_0 < 0$, то задача сначала плохо обусловлена, но по ходу расчета становится жесткой.

Тест 27.

$$\frac{dy_1}{dx} = \big(a - b\cos(2\omega x)\big)\, y_1 + \big(b\sin(2\omega x) + \omega\big)\, y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \big(b\sin(2\omega x) - \omega\big)\, y_1 + \big(a + b\cos(2\omega x)\big)\, y_2;$$
$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}.$$

Матрица системы явно зависит от x, но ее собственные значения постоянны: $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$; подбором параметров их нетрудно сделать вещественными. Однако точное решение при этом будет осциллирующим:

$$y_1(x) = y_{20} \sin(\omega x) e^{(a+b)x} + y_{10} \cos(\omega x) e^{(a-b)x},$$
$$y_2(x) = y_{20} \cos(\omega x) e^{(a+b)x} - y_{10} \sin(\omega x) e^{(a-b)x}.$$

Можно выбрать такие параметры, когда спектр матрицы будет жестким, а задача — плохо обусловленной (например, $a = -51$, $b = 61$, $\omega = 60$; $\lambda_1 = -40$, $\lambda_2 = -62$, $a + b = 10$, $a - b = -112$).

Тест 28.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{(y-b)^n}, \quad y(0) = y_0, \quad a > 0, \quad n > 0 \text{ (четное целое)}.$$

Точное решение имеет вид (оно монотонно возрастает)

$$y(x) = b + \left((y_0 - b)^{n+1} + (n+1)\, ax\right)^{1/(n+1)}.$$

Если выбрать $y_0 < b$, то решение имеет бесконечную производную при

$$x_* = \frac{(b - y_0)^{n+1}}{a(n+1)},$$

причем $y(x_*) = b$. Цель теста: проверка того, как различные численные методы проходят эту особенность.

Тест 29.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{a^3}{3b^3} \frac{y_2^3}{y_1^2} + \lambda y_1 \left(\sqrt{(y_1/a)^6 + (y_2/b)^6} - 1 \right),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{b^3}{3a^3} \frac{y_1^3}{y_2^2} + \lambda y_2 \left(\sqrt{(y_1/a)^6 + (y_2/b)^6} - 1 \right).$$

Пусть заданы начальные условия

$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}.$$

Точное решение имеет вид

$$y_1(x) = a\rho(x)\big(\sin(x + \varphi_0)\big)^{1/3}, \quad y_2(x) = b\rho(x)\big(\cos(x + \varphi_0)\big)^{1/3},$$

где

$$\rho(x) = \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 - (\rho_0 - 1)\exp(3\lambda x)} \right)^{1/3}, \quad \rho_0 = \sqrt{(y_{10}/a)^6 + (y_{20}/b)^6}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{b y_{10}}{a y_{20}} \right)^3.$$

При вещественных значениях $\lambda < 0$ решение имеет устойчивый предельный цикл

$$(y_{1\infty}/a)^2 + (y_{2\infty}/b)^2 = 1.$$

Трудным является прохождение точек, в которых $y_1(x) = 0$ или $y_2(x) = 0$, поскольку при этом производные решения бесконечны. При $\lambda \ll -1$ задача является жесткой.

Пример: взять $\lambda = -300$, $a = 1$, $b = 5$, $y_{10} = 2$, $y_{20} = 0.01$; вычислить решение и построить его на фазовой плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф.* Практикум на ЭВМ. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений одношаговыми разностными методами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
2. *Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф., Захаров А.Ю., Калиткин Н.Н.* О тестировании программ решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт ИПМ АН СССР им. М. В. Келдыша, № 139. М., 1983.
3. *Залёткин С.Ф.* Коллекция дифференциальных уравнений для тестирования вычислительных алгоритмов и программ // Вопросы конструирования библиотек программ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 54–71.
4. *Арушанян О.Б.* Автоматизация конструирования библиотек программ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Поступила в редакцию
25.03.2000