

УДК 519.632.4

УНИВЕРСАЛЬНАЯ МНОГОСЕТОЧНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА СТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

С. И. Мартыненко¹

Предложена универсальная многосеточная технология для численного решения эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Данная технология основана на объединении адаптации решаемых задач к численным методам, дискретизации методом контрольного объема и многосеточных итераций в единый вычислительный алгоритм. Специальная последовательность подсеток самой мелкой сетки построена для получения самой мощной стратегии вычисления поправок на грубых сетках. Точность операторов переходов не зависит от величины шага грубых сеток, поэтому многосеточный цикл и сглаживающая процедура могут быть очень простыми. Универсальность технологии является результатом адаптации задач, исключительно точной формулировки дискретных задач на грубых сетках, оригинального построения грубых сеток, самой мощной стратегии отыскания поправок, особой конструкции операторов перехода и отсутствия предварительного сглаживания и интерполяции. В статье представлен алгоритм оценки вычислительных усилий и результаты численных экспериментов, которые демонстрируют эффективность технологии при решении широкого класса задач.

Ключевые слова: многосеточная технология, численные методы, итерационные алгоритмы, эллиптические дифференциальные уравнения, метод контрольного объема, краевые задачи.

1. Введение. Итерационные методы часто применяются для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Как правило, итерационные методы адаптируются к решаемой задаче. В результате, каждый вычислительный алгоритм содержит некоторые проблемно-зависящие компоненты (например, параметр верхней релаксации в методе SOR, операторы переходов и сглаживающая процедура в классических многосеточных методах [1], предобуславливатель в различных вариантах предобусловленного метода сопряженных градиентов и т.д.). В настоящее время предложено огромное количество разнообразных итерационных методов и очень трудно провести их подробный сравнительный анализ. Однако общеизвестно, что некоторый метод, эффективный для решения определенного класса задач, может оказаться малоэффективным для задач другого класса или даже расходиться.

В дальнейшем будем называть итерационный метод универсальным², если он является эффективным для решения широкого класса задач [2]. Автор поддерживает точку зрения, что универсальный метод должен быть основан на *адаптации задачи к вычислительному алгоритму*³. Простейшие задачи требуют тривиальной (проблемно-независимой) модификации, и нет сколь-нибудь заметной разницы между исходной и адаптированными задачами. Однако сложные задачи требуют специальной, проблемно-зависимой модификации для последующего применения численных методов. Например, уравнения Навье–Стокса должны быть модифицированы для получения уравнения, с помощью которого вычисляется давление. Адаптация задач к вычислительному алгоритму позволит получить единый подход к решению всех модифицированных задач.

Классические многосеточные методы (КММ) известны как высокоэффективные алгоритмы для решения дискретизированных дифференциальных уравнений в частных производных [2]. В первой публикации по многосеточным методам [3] Р. П. Федоренко сформулировал многосеточный алгоритм для стандартной пятиточечной дискретизации уравнения Пуассона в единичном квадрате, который позволял получить численное решение, выполняя $O(N)$ арифметических операций. К настоящему времени предложено несколько псевдо-универсальных вариантов КММ. В отличие от них, предлагаемая универсальная многосеточная технология (УМТ) основана на следующих принципах:

¹Центральный Институт Авиационного Моторостроения им. П. И. Баранова, ул. Авиамоторная, 2, 111250, Москва; e-mail: martyn_s@mail.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

²В данной статье термин “универсальный” используется в том же самом смысле, что и общепринятый термин “robust”, т.е. эффективный для решения широкого класса задач.

³Идея об адаптации задачи к вычислительному алгоритму не нова. Еще Н. Е. Жуковский утверждал, что настоящий механик должен уметь записывать уравнения движения так, что они интегрируются, а К. И. Бабенко называл априорную адаптацию задач искусством вычислителя.

- *адаптация решаемых задач к многосеточному методу.* Именно данная адаптация позволит получить проблемно-независимый вычислительный алгоритм.
- *применение нескольких сеток на одном сеточном уровне для вычисления поправки.* Дополнительные сетки снижают требования, которые предъявляются к сглаживающей процедуре.
- *оригинальное построение грубых сеток.* Преимущество данного построения состоит в возможности получения проблемно-независимых операторов перехода.
- *использование только дискретизации методом контрольного объема.* Данная дискретизация является более предпочтительной, чем конечно-разностная, при решении ряда задач и имеет прямую физическую трактовку.

Целью данной статьи является разработка единственного многосеточного алгоритма для решения модифицированных эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных на структурированных сетках.

2. Многосеточная структура. Для простоты рассмотрим одномерную задачу и предположим, что вычислительная сетка $G(0; 1)$ уже построена в области $\Omega = [0, 1]$. Равномерная вычислительная сетка $G(0; 1)$ для дискретизации методом контрольного объема задается в виде объединения двух систем сеточных точек¹

$$G(0; 1) = G^v(0; 1) \cup G^f(0; 1),$$

определяемых как

$$\begin{aligned} G^v(0; 1) &= \{x_i^v : x_i^v = \Delta(i-1), \quad i = 1, \dots, N_0 + 1, \quad \Delta = N_0^{-1}\}, \\ G^f(0; 1) &= \{x_i^f : x_i^f = 0,5(x_i^v + x_{i+1}^v), \quad i = 1, \dots, N_0\}. \end{aligned}$$

Представим самую мелкую сетку $G(0; 1)$ в виде объединения трех более грубых подсеток $G(1; 1)$, $G(1; 2)$ и $G(1; 3)$. Кроме того, потребуем, чтобы все грубые подсетки не имели между собой общих точек и каждая точка грубой сетки совпадала с единственной точкой самой мелкой сетки, т.е.

$$G(0; 1) = \bigcup_{k=1}^3 G(1; k) \quad \text{и} \quad G(1; n) \cap G(1; m) = \emptyset, \quad n \neq m.$$

Будем полагать, что самая мелкая сетка $G(0; 1)$ образует нулевой сеточный уровень, а три ее подсетки $G(1; 1)$, $G(1; 2)$ и $G(1; 3)$ — первый. Далее построение еще более грубых подсеток осуществляется рекуррентным образом: каждая из сеток $G(L; k)$, $k = 1, \dots, 3^L$, L -го уровня рассматривается как самая мелкая для сеток $G(L+1; j)$, $j = 1, \dots, 3^{L+1}$, последующего уровня $L+1$. Полученные из трех сеток первого уровня девять еще более грубых сеток образуют второй уровень и т.д. Построение уровней завершается, когда самые грубые сетки будут иметь несколько сеточных точек. Очевидно, что самая мелкая сетка может быть представлена как совокупность всех сеток L -го уровня:

$$G(0; 1) = \bigcup_{k=1}^{3^L} G(L; k) \quad \text{и} \quad G(L; n) \cap G(L; m) = \emptyset, \quad n \neq m, \quad L = 1, \dots, L^+,$$

где L^+ есть номер уровня с самыми грубыми сетками. Пример построения грубых сеток показан на рис. 1. В дальнейшем, совокупность всех сеток, включая построенную ранее самую мелкую, будет называться *многосеточной структурой* (рис. 2).

Все сетки многосеточной структуры имеют фиктивные сеточные точки. Самые грубые сетки имеют только две фиктивные точки x^v или x^f , следовательно число фиктивных точек на сетках L -го уровня составит $2 \cdot 3^{L^+ - L}$. Данные фиктивные точки предназначены для вычисления оператора ограничения в УМГ (см. раздел 5).

Оригинальное построение грубых сеток, которое используется в УМГ, состоит в удалении двух точек из каждой системы G^v и G^f , как показано на рис. 3. Шаг сетки L -го уровня есть $\Delta 3^L$, где Δ — шаг самой мелкой сетки $G(0; 1)$.

¹В КММ процесс построения грубых сеток (coarsening) зависит от определения искомого сеточной функции на самой мелкой сетки. В УМГ такой зависимости нет, поэтому x^f и x^v названы сеточными точками. Какие из них будут узлами сетки, а какие — гранями контрольных объемов, будет оговариваться отдельно для каждой задачи после построения грубых сеток, но перед дискретизацией модифицированной краевой задачи.

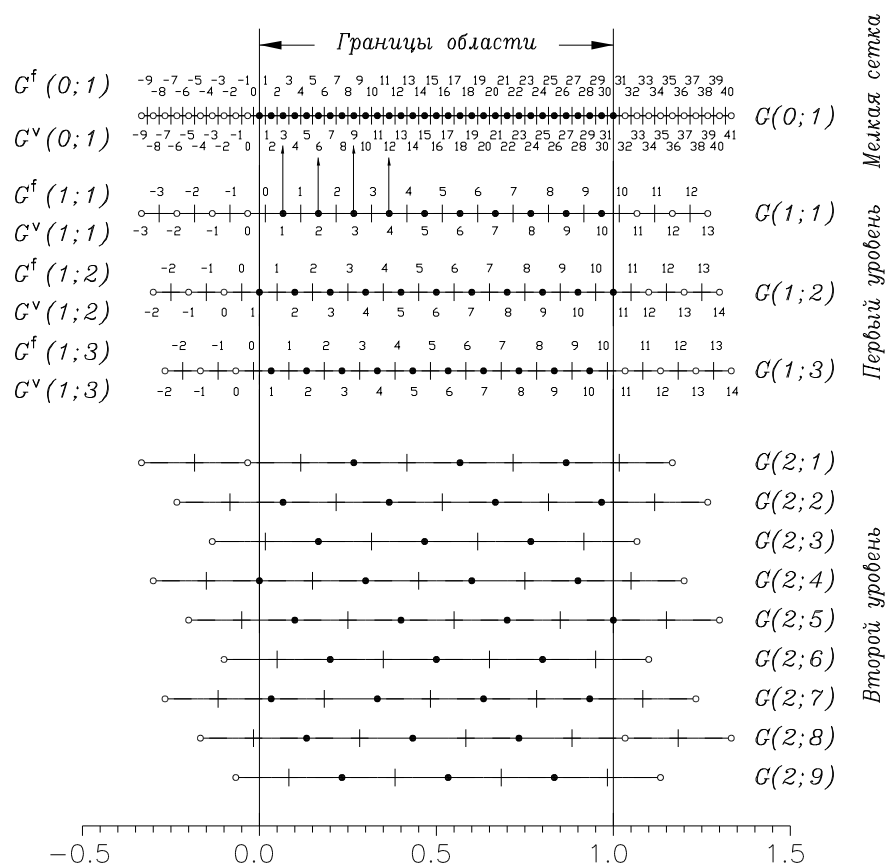


Рис. 1. Пример построения грубых сеток в одномерном случае

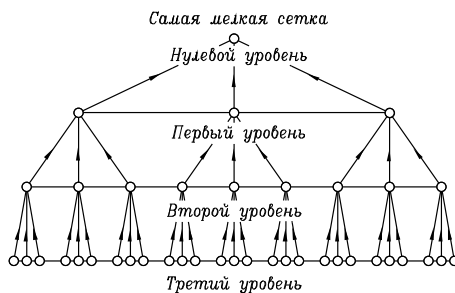


Рис. 2. Многосеточная структура

Искомая сеточная функция может быть задана как в сеточных точках x^v , так и в x^f . В первом случае точки x^v являются узлами сетки, точки x^f — гранями контрольных объемов, а сам объем определяется в виде $[x_{i-1}^f, x_i^f]$. В втором случае точки x^f являются узлами сетки, точки x^v — гранями контрольных объемов, а сам объем определяется в виде $[x_i^v, x_{i+1}^v]$. Заметим, что контрольный объем на грубой сетке $G(L; k)$, $k = 1, \dots, 3^L$, является объединением 3^L контрольных объемов на самой мелкой сетке.

В действительности выражение “сетка L -го уровня” означает взаимно однозначное отображение индексов сеточных точек данной и самой мелкой сетки. В дальнейшем данное отображение индексов будет обозначаться фигурными скобками $\{\}$. Например, отображение индексов сеточных точек x^v записывается как $x_{\{i\}}^v$, где i и $\{i\}$ есть индексы данной и самой мелкой сетки соответственно. Как видно из рис. 1, для первой сетки первого уровня справедливо: $\{1\} = 3$; $\{2\} = 6$; $\{3\} = 9$; ... Подобное соглашение позволяет записывать сеточные уравнения в унифицированном виде. Например, вторая производная в сеточных точках $x_{\{i\}}^v$ может

²В КММ оба этих случая рассматриваются отдельно и называются vertex-centred discretization и cell-centred discretization [2]. Соответственно и процессы построения грубых сеток для обоих случаев различны (vertex-centred coarsening и cell-centred coarsening). В конечном итоге, получаются два варианта КММ: vertex-centred multigrid и cell-centred multigrid. С точки зрения УМГ, нет никакой необходимости отдельного рассмотрения этих случаев.

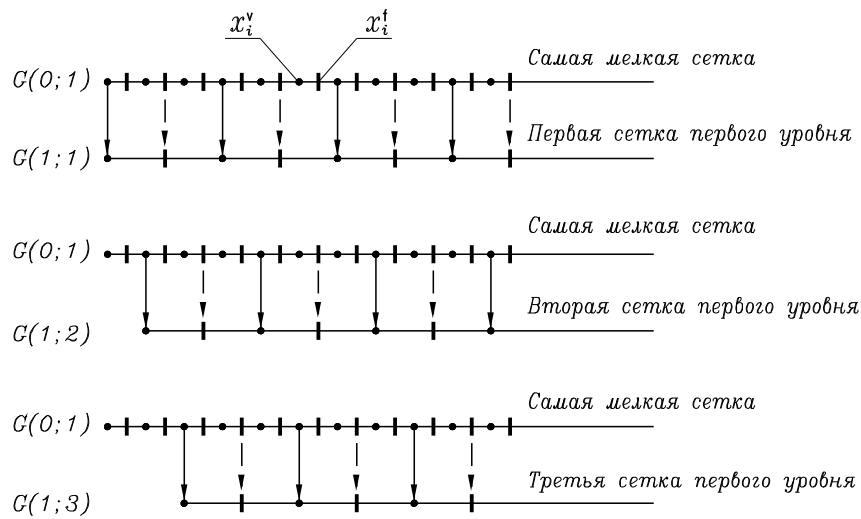


Рис. 3. Процесс построения грубых сеток в одномерном случае

быть представлена в виде

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x_{\{i\}}^v} = \frac{u_{\{i-1\}} - 2u_{\{i\}} + u_{\{i+1\}}}{\Delta^2 3^{2L}} + o(\Delta^2 3^{2L}).$$

В узле $x_{\{2\}}^v$ первой сетки первого уровня, согласно рис. 1, это выражение принимает вид

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x_{\{2\}}^v} \approx \frac{u_{\{1\}} - 2u_{\{2\}} + u_{\{3\}}}{\Delta^2 3^2}, \quad \text{что означает} \quad \frac{u_3 - 2u_6 + u_9}{\Delta^2 3^2}.$$

Отображение индексов сеточных точек x^f осуществляется аналогичным образом.

Грубые сетки для решения N -мерных задач строятся по каждому пространственному направлению. Каждый уровень состоит из 3^{NL} грубых сеток. Контрольный объем на грубых сетках есть объединение 3^{NL} контрольных объемов на самой мелкой сетке.

3. Описание многосеточной технологии. Для наглядности рассмотрим следующую краевую задачу

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 10 e^x, \quad f(0) = f(1) = 0 \quad (1)$$

в $\Omega = (0,1)$. Точное решение данной задачи есть

$$f(\varrho) = 10(e^\varrho + (1 - e)\varrho - 1). \quad (2)$$

Все решаемые задачи должны быть адаптированы к УМГ *перед* дискретизацией. Решение f уравнения (1) может быть представлено в виде

$$f = c + \hat{f}. \quad (3)$$

В дальнейшем функция \hat{f} будет приближением к искомому решению, а функция c будет поправкой, которая отыскивается на многосеточной структуре¹. Представление (3) будет называться Σ -модификацией решения. Подстановка (3) в (1) приводит к следующей Σ -модифицированной форме уравнения (1):

$$\frac{d^2 c}{dx^2} = 10 e^x - \frac{d^2 \hat{f}}{dx^2}, \quad c|_{\partial\Omega} = -\hat{f}|_{\partial\Omega}. \quad (4)$$

Σ -модификация является одним из возможных способов адаптации уравнения (1) к УМГ.

Предположим, что многосеточная структура построена и функция f определена в сеточных точках x^v . Для некоторого уравнения (или системы уравнений) сеточные уравнения могут быть получены несколькими

¹В КММ функция c получила название coarse grid correction [2]. В данном случае этот термин представляется неудачным, так как адаптация дифференциальных уравнений к УМГ осуществляется перед построением сетки и дискретизацией. Функция \hat{f} получила название approximation to the solution [2]. Этот термин также представляется неудачным в УМГ. Однако, следуя традициям, в УМГ сохранена устоявшаяся терминология.

способами. Наиболее популярным способом дискретизации является метод контрольного объема [4]. Вычислительная область разделяется на ряд непересекающихся контрольных объемов таким образом, что только один объем окружает узел сетки. Дифференциальные уравнения интегрируются по каждому контрольному объему. Наиболее привлекательная особенность данной дискретизации состоит в том, что полученные численные решения будут удовлетворять интегральным законам сохранения над любой группой контрольных объемов. В дополнение, дискретизация методом контрольного объема является более точной, чем конечно-разностная, при решении задач с разрывными коэффициентами [2]. Интегрирование уравнения (4) по контрольному объему $[x_{\{i-1\}}^f, x_{\{i\}}^f]$ позволяет получить следующую конечно-разностную схему:

$$\frac{c_{\{i-1\}} - 2c_{\{i\}} + c_{\{i+1\}}}{\Delta^2 3^{2L}} = J_{\{i\}}, \quad \text{где} \quad J_{\{i\}} = \frac{1}{\Delta 3^L} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \left(10 e^x - \frac{d^2 \hat{f}}{dx^2} \right) dx. \quad (5)$$

Значения сеточной функции c в узлах сетки, которые расположены вне области Ω , могут быть исключены при помощи следующих интерполяционных формул:

а) условия Дирихле на границе $x = 0$:

$$c_{\{0\}} = \frac{2}{\xi(\xi+1)} c|_{x=0} + 2 \frac{\xi-1}{\xi} c_{\{1\}} - \frac{\xi-1}{\xi+1} c_{\{2\}} + o(\Delta^3 3^{3L}); \quad (6)$$

б) условия Неймана на границе $x = 0$:

$$c_{\{0\}} = -\frac{2\Delta 3^L}{2\xi+1} \left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=0} + 4 \frac{\xi}{2\xi+1} c_{\{1\}} - \frac{2\xi-1}{2\xi+1} c_{\{2\}} + o(\Delta^3 3^{3L}); \quad (7)$$

в) условия Дирихле на границе $x = 1$:

$$c_{\{N_L+2\}} = \frac{2}{\xi(\xi+1)} c|_{x=1} + 2 \frac{\xi-1}{\xi} c_{\{N_L+1\}} - \frac{\xi-1}{\xi+1} c_{\{N_L\}} + o(\Delta^3 3^{3L}); \quad (8)$$

г) условия Неймана на границе $x = 1$:

$$c_{\{N_L+2\}} = \frac{2\Delta 3^L}{2\xi+1} \left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=1} + 4 \frac{\xi}{2\xi+1} c_{\{N_L+1\}} - \frac{2\xi-1}{2\xi+1} c_{\{N_L\}} + o(\Delta^3 3^{3L}), \quad (9)$$

где

$$\xi = \begin{cases} \frac{x_{\{1\}}^v}{\Delta 3^L}, & x = 0, \\ \frac{1 - x_{\{N_L+1\}}^v}{\Delta 3^L}, & x = 1. \end{cases}$$

В качестве примера рассмотрим трехуровневый алгоритм. Порядок посещения уровней многосеточной структуры является пилообразным циклом. Пилообразный цикл представляет частный случай V-цикла, в котором сглаживание перед вычислением поправки (так называемое предварительное сглаживание или pre-smoothing) отсутствует [2]. Итерации начинаются с уровня L^+ , который состоит из самых грубых сеток (рис. 2). Рассмотрим некоторую сетку данного уровня (рис. 4). Интеграл $J_{\{i\}}$ в правой части уравнения (5) должен быть вычислен перед сглаживающими итерациями. Поскольку контрольный объем $[x_{\{1\}}^f, x_{\{2\}}^f]$ на данной грубой сетке является объединением девяти контрольных объемов на самой мелкой сетке

$$[x_{\{1\}}^f, x_{\{2\}}^f] \equiv [x_5^f, x_{14}^f] = [x_5^f, x_6^f] \cup [x_6^f, x_7^f] \cup \dots \cup [x_{12}^f, x_{13}^f] \cup [x_{13}^f, x_{14}^f],$$

то интеграл $J_{\{2\}}$ может быть вычислен как

$$J_{\{2\}}^{L=2} = \frac{1}{\Delta 3^2} \left[\int_{x_5^f}^{x_6^f} \left(10 e^x - \frac{d^2 \hat{f}}{dx^2} \right) dx + \dots + \int_{x_{13}^f}^{x_{14}^f} \left(10 e^x - \frac{d^2 \hat{f}}{dx^2} \right) dx \right].$$

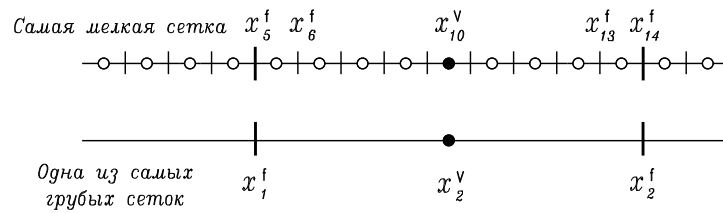
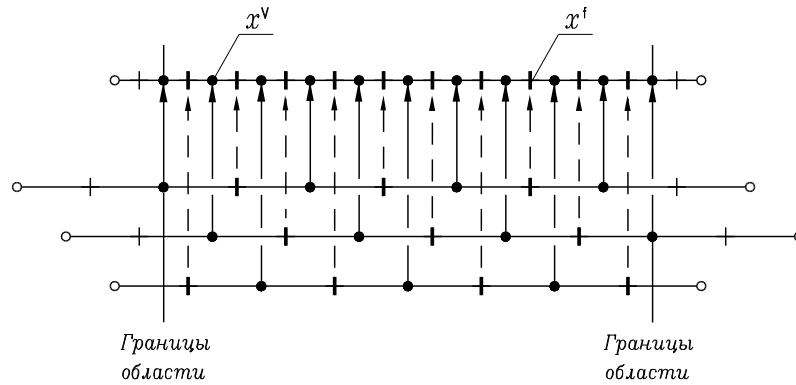
Рис. 4. Одна из сеток уровня L^+ 

Рис. 5. Оператор пролонгации многосеточной технологии

Введем обозначение

$$R_m^* = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{m-1}^f}^{x_m^f} \left(10 e^x - \frac{d^2 \hat{f}}{dx^2} \right) dx = 10 e^{x_m^v} - \frac{\hat{f}_{m-1} - 2\hat{f}_m + \hat{f}_{m+1}}{\Delta^2} + o(\Delta^2).$$

Очевидно, что интегралы R_m^* являются невязками сеточных уравнений, вычисленными на самой мелкой сетке. Тогда интеграл $J_{\{2\}}$ может быть переписан в виде

$$J_{\{2\}}^{L=2} = \frac{1}{3^2} (R_6^* + \dots + R_{14}^*) + o(\Delta^2).$$

Нетрудно видеть, что интеграл J есть среднеарифметическое значение невязок, которые вычислены в узлах самой мелкой сетки x_i^v , расположенных внутри данного контрольного объема на данной грубой сетке (т.е. в узлах $x_i^v \in [x_{\{1\}}^f, x_{\{2\}}^f]$). Интеграл J является оператором ограничения УМГ. Поскольку интегралы $J_{\{i\}}$ вычисляются на самой мелкой сетке, точность этих вычислений не зависит от величины шага грубых сеток. В общем случае оператор ограничения использует 3^{NL} узлов самой мелкой сетки для осреднения невязок на сетках L -ого уровня. Трехуровневый алгоритм рассмотрен только для иллюстрации данной особенности оператора ограничения.

После вычисления интегралов $J_{\{i\}}$ во всех узлах $x_{\{i\}}^v$, Σ -модифицированное уравнение (5) решается прямым методом. Подобные вычисления проводятся на каждой сетке уровня L^+ , как показано на рис. 2. После получения поправки c на всех сетках уровня L^+ осуществляется переход к последующему уровню $L^+ - 1$ с более мелкими сетками (рис. 5). Следует заметить, что данный переход не вносит каких-либо погрешностей в численное решение, поскольку все грубые сетки являются подсетками самой мелкой сетки (рис. 1). Данный переход есть оператор пролонгации УМГ.

Гладкие (длинноволновые) части погрешности удаляются на всех более мелких сетках уровня $L^+ - 1$ аналогичным образом (т.е. вычисление интегралов J и сглаживающие итерации). Оператор ограничения на первом уровне определяется как

$$J_{\{i\}}^{L=1} = \frac{1}{3} (R_{\{i-1\}}^* + R_{\{i\}}^* + R_{\{i+1\}}^*) + o(\Delta^2).$$

Поправка c добавляется к \hat{f} на самой мелкой сетке ($\hat{f} := \hat{f} + c$). Многосеточные итерации последовательно приближают \hat{f} к искомому решению, до тех пор пока очередное приближение \hat{f} не станет достаточно точным.

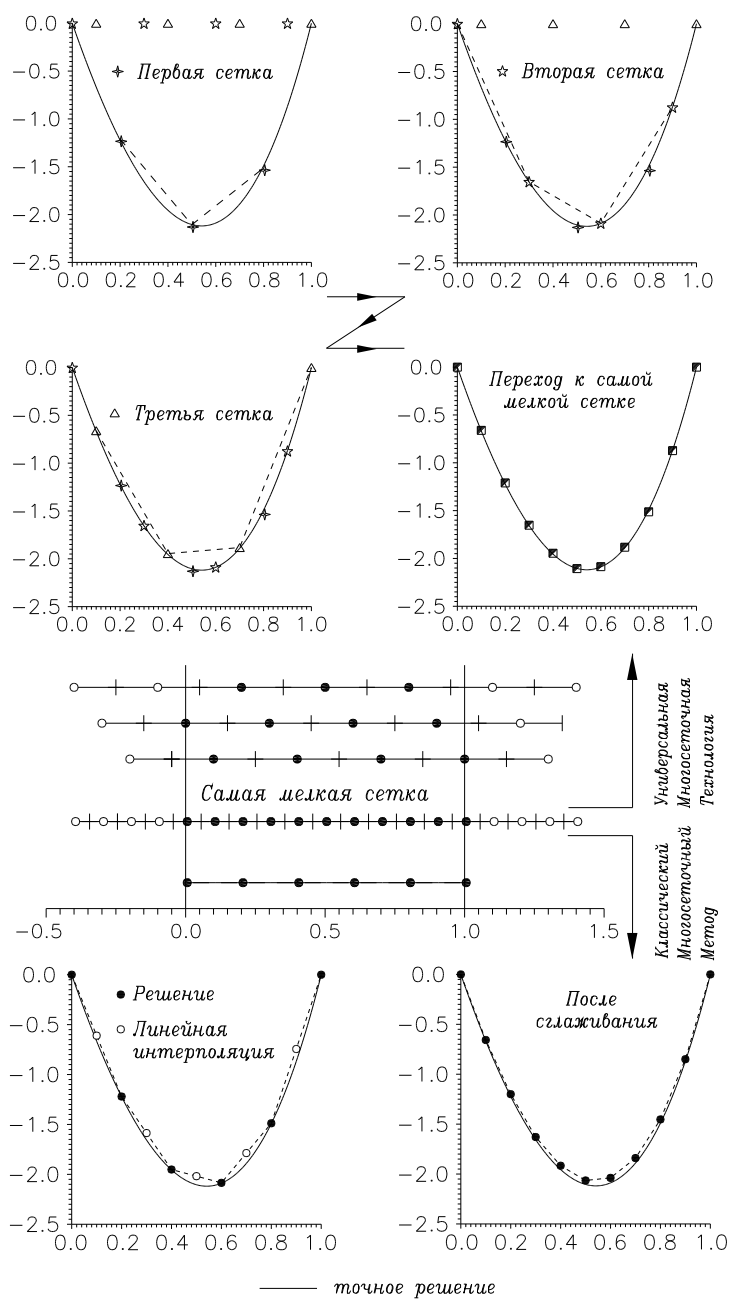


Рис. 6. Сравнение многосеточной технологии и классических многосеточных методов на примере одномерной задачи

Для иллюстрации УМГ в пошаговом режиме рассмотрим решение уравнения (1) на равномерной сетке ($\Delta = H_0^{-1} = 0.1$, двухуровневая структура: $L^+ = 1$), начиная с нулевого начального приближения. Для наглядности подробно будет рассмотрена только первая многосеточная итерация. Вычисления начинаются на первой сетке первого уровня: $\{1\} = 3, \{2\} = 6, \{3\} = 9$ (рис. 6). После чего сеточные уравнения решаются на второй сетке ($\{1\} = 1, \{2\} = 4, \{3\} = 7, \{4\} = 10$) первого уровня. Окончательно сеточные уравнения решаются на третьей сетке ($\{1\} = 2, \{2\} = 5, \{3\} = 8, \{4\} = 11$) первого уровня. Все численные решения показаны на рис. 6. Следующий этап состоит в переходе на самую мелкую сетку. В действительности, этот переход является изменением идентификации индексов: $\{i\} \equiv i$. На самой мелкой сетке выполнено три итерации Зейделя ($\nu = 3$) для того, чтобы удалить грубые части ошибки. Для иллюстрации сходимости УМГ, погрешность численного решения определялась в виде $E = \max_{\{i\}} |f(x_{\{i\}}^y) - c_{\{i\}}|$, где f есть точное решение, полученное из (2). Изменение погрешности приведено в Табл. 1, первый ряд которой соответствует данному (нулевому) начальному приближению.

Таблица. 1
Изменение погрешности в классических итерациях (справа)
и итерациях многосеточной технологии (слева)

Уровень	Сетка	Погрешность E	Сетка	Погрешность E
—	—	$2,12 \cdot 10^{+0}$	—	$2,12 \cdot 10^{+0}$
1	1	$2,17 \cdot 10^{-2}$	1	$3,48 \cdot 10^{-3}$
1	2	$4,49 \cdot 10^{-3}$	—	—
1	3	$9,41 \cdot 10^{-3}$	—	—
0	1	$3,84 \cdot 10^{-3}$	1	$5,03 \cdot 10^{-2}$

В дополнение уравнение (1) было решено при помощи КММ (пилообразный цикл и линейная интерполяция). Результаты вычислений показаны на рис. 6 и Табл. 1.

Результаты проведенного вычислительного эксперимента показывают, что очень трудно сделать точное сравнение скорости сходимости УМГ и КММ. С одной стороны, УМГ аппроксимирует длинноволновые части погрешности на грубых сетках более точно, чем КММ. Как ожидается, УМГ требует наименьшего числа многосеточных итераций для получения численного решения. В общем случае УМГ использует наименьшее число сеточных уровней для вычисления поправки s . С другой стороны, вычислительная стоимость итераций УМГ выше, чем стоимость классических итераций. Кроме того, подобное сравнение сильно зависит от решаемой задачи.

4. Преимущества многосеточной технологии. В этом разделе будут обобщены преимущества УМГ над КММ и объяснены некоторые особенности технологии:

1. *Исключительно точная формулировка дискретных задач на грубых сетках.* В качестве примера рассмотрим двухмерную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma(x, y) u = F(x, y), \quad u|_{\partial\Omega} = g.$$

Данное уравнение может быть переписано в Σ -модифицированной форме следующим образом:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \gamma(x, y) c = r(x, y), \quad c|_{\partial\Omega} = g - \hat{u}|_{\partial\Omega},$$

где

$$r(x, y) = F(x, y) - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} - \gamma(x, y) \hat{u}.$$

Предположим, что функции \hat{u} и c заданы в сеточных точках (x^v, y^v) . Интегрирование Σ -модифицированного уравнения по контрольному объему $\bar{\Omega}_{\{ij\}}$

$$\bar{\Omega}_{\{ij\}} = \{(x, y) \mid x_{\{i-1\}}^f \leq x \leq x_{\{i\}}^f, y_{\{j-1\}}^f \leq y \leq y_{\{j\}}^f\} \quad (10)$$

позволяет получить следующую конечно-разностную схему:

$$\frac{c_{\{i-1j\}} - 2c_{\{ij\}} + c_{\{i+1j\}}}{\Delta^2 3^2 L} + \frac{c_{\{ij-1\}} - 2c_{\{ij\}} + c_{\{ij+1\}}}{\Delta^2 3^2 L} + \langle \gamma \rangle_{\{ij\}} c_{\{ij\}} = J_{\{ij\}},$$

где

$$\langle \gamma \rangle_{\{ij\}} = \frac{1}{\Delta^2 3^2 L} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \gamma(x, y) dy dx. \quad (11)$$

Интегралы J и коэффициенты $\langle \gamma \rangle$ должны быть вычислены на самой мелкой сетке для уменьшения погрешности аппроксимации до $o(\Delta^2)$ с целью получения исключительно точной формулировки дискретных задач на грубых сетках. Полученная система линейных уравнений может быть записана в виде

$$Ax = b.$$

В действительности получается возмущенная система вида

$$(A + \delta_A)(\mathbf{x} + \delta_{\mathbf{x}}) = (\mathbf{b} + \delta_{\mathbf{b}}),$$

где погрешности матрицы коэффициентов (δ_A) и правой части ($\delta_{\mathbf{b}}$) приводят к погрешности решения ($\delta_{\mathbf{x}}$). Именно столь точное вычисление коэффициентов $\langle \gamma \rangle$ и интегралов J минимизирует погрешности δ_A и $\delta_{\mathbf{b}}$, и следовательно $\delta_{\mathbf{x}}$. Точность вычисления поправки c зависит только от числа сглаживающих итераций и шага данной сетки.

Следует подробнее остановиться на понятии Σ -модификации. Сначала напомним основные этапы КММ [2]. Рассмотрим линейную задачу

$$\mathcal{L}(u) = f, \quad u|_{\partial\Omega} = g, \tag{12}$$

где \mathcal{L} есть некоторый дифференциальный оператор. Задача (12) может быть дискретизирована при помощи конечных разностей. Полученную систему линейных уравнений запишем в виде

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}. \tag{13}$$

Пусть $\hat{\mathbf{u}}$ будет приближением к решению задачи (13). Ошибка $\mathbf{e} \equiv \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$ аппроксимируется на грубой сетке. В результате, получаем

$$A\mathbf{e} = -\mathbf{r} \equiv A\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b}.$$

Получаемое на грубой сетке приближение $\bar{\mathbf{u}}$ к $-\mathbf{e}$ удовлетворяет соотношению

$$\bar{A}\bar{\mathbf{u}} = R\mathbf{r}, \tag{14}$$

где R — проблемно-зависимый оператор ограничения КММ. В двухуровневом алгоритме предполагается, что (14) решается точно. Поправка, получаемая на грубой сетке и добавляемая к $\hat{\mathbf{u}}$ есть $P\bar{\mathbf{u}}$:

$$\hat{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}} + P\bar{\mathbf{u}},$$

где P — проблемно-зависимый оператор пролонгации КММ.

В противоположность КММ [2] УМГ может быть представлена в виде фиксированного алгоритма, который состоит из следующих шагов:

Шаг 1: *Адаптация задачи* (12) к УМГ. Данная линейная задача может быть переписана в Σ -модифицированном виде как

$$\mathcal{L}(c) = f - \mathcal{L}(\hat{u}), \quad c|_{\Omega} = g - \hat{u}|_{\Omega}.$$

Шаг 2: *Построение многосеточной структуры.*

Шаг 3: *Дискретизация модифицированной задачи методом контрольного объема.* Интегрирование Σ -модифицированной задачи по контрольному объему V_g^L на некоторой вычислительной сетке g L -ого уровня позволяет получить

$$\frac{1}{V_g^L} \int_{V_g^L} \mathcal{L}(c) dv = J, \quad \text{где } J = \frac{1}{V_g^L} \int_{V_g^L} (f - \mathcal{L}(\hat{u})) dv.$$

Интеграл J подобен $R\mathbf{r}$ в КММ. Обозначим полученные сеточные уравнения как

$$\bar{A}\mathbf{c} = J.$$

Шаг 4: *Многосеточные итерации* (пилообразный цикл). Поправка \mathbf{c} , которая вычисляется на грубых сетках, добавляется на самой мелкой сетке к $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\hat{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{c}.$$

На первый взгляд, Σ -модификация $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{c}$ в УМГ аналогична $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{e}$ в КММ, однако именно подобная априорная адаптация решаемых задач, оригинальное построение грубых сеток и дискретизация методом контрольного объема позволяет получить исключительно точную формулировку дискретных задач на грубых сетках. Как следствие, возможно исключить предварительное сглаживание из многосеточных итераций. Другой возможный вариант адаптации задач к УМГ (так называемая Π -модификация) будет обсужден в подразделе 7.4. В действительности априорная адаптация задач является единственным проблемно-зависящим компонентом УМГ.

2. Получение высокоточных решений. В процессе дискретизации желательно, чтобы матрица коэффициентов полученной системы линейных уравнений была бы М-матрицей [2]. Для того чтобы получить М-матрицу в задачах вычислительной гидродинамики, первые производные в уравнениях движения часто аппроксимируются с использованием разностей против потока. Однако подобная дискретизация уменьшает порядок аппроксимации. Для иллюстрации данной проблемы рассмотрим одномерное уравнение

$$\frac{du}{dx} + \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

Представление первой производной центральной разностью позволяет получить

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta} + \varepsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta^2} = 0.$$

Данная схема имеет второй порядок аппроксимации $o(\Delta^2)$, однако для того чтобы получить М-матрицу, вычислительная сетка должна удовлетворять следующему условию: $\Delta < 2\varepsilon$. С другой стороны, представление первой производной посредством разностей против потока позволяет получить М-матрицу

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta} + \varepsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta^2} = 0,$$

однако разности против потока снижают погрешность аппроксимации до $o(\Delta)$. В классических алгоритмах сеточные уравнения должны быть искусственным образом модифицированы для увеличения порядка аппроксимации. Очевидно, что следующая схема

$$\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta} + \varepsilon \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta^2} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta}$$

позволяет получить М-матрицу и второй порядок аппроксимации для сошедшегося решения: $u_i^{n+1} = u_i^n$. Уравнение, адаптированное к УМГ, может быть записано в виде

$$\frac{1}{\Delta 3L} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \left(\frac{dc}{dx} + \varepsilon \frac{d^2c}{dx^2} \right) dx = J_{\{i\}}, \quad \text{где } r(x) = -\frac{d\hat{u}}{dx} - \varepsilon \frac{d^2\hat{u}}{dx^2}.$$

Обе части данного уравнения могут быть дискретизированы отдельно. Левая часть уравнения аппроксимируется для получения М-матрицы при помощи разностей против потока следующим образом:

$$\frac{c_{\{i+1\}} - c_{\{i\}}}{\Delta 3L} + \varepsilon \frac{c_{\{i+1\}} - 2c_{\{i\}} + c_{\{i-1\}}}{\Delta^2 32L} = J_{\{i\}}.$$

Интеграл J должен быть вычислен на самой мелкой сетке со вторым порядком как

$$R_m^* = -\frac{\hat{u}_{m+1} - \hat{u}_{m-1}}{2\Delta} - \varepsilon \frac{\hat{u}_{m+1} - 2\hat{u}_m + \hat{u}_{m-1}}{\Delta^2} + o(\Delta^2).$$

Нетрудно видеть, что сошедшееся решение (т.е. $c = 0$) будет иметь второй порядок аппроксимации. По сравнению с классическими алгоритмами УМГ не требует искусственной модификации сеточных уравнений для получения более точного решения. Вместо этого, различная дискретизация оператора в левой части уравнения и интеграла в правой части позволяет избежать подобного рода конфликтных ситуаций (например, М-матрица против высокого порядка аппроксимации). Следует заметить, что для односеточных алгоритмов ($\{i\} \equiv i$) отдельная дискретизация, по своей эффективности, эквивалентна коррекции дефекта [5]. Пример применения отдельной дискретизации при решении уравнения Пуассона будет рассмотрен в подразделе 7.1 (Тест 2).

3. Оригинальное построение грубых сеток. Алгоритм построения грубых сеток, используемый в УМГ, объединяет достоинства обоих алгоритмов, которые применяются в КММ (т.е. vertex-centred и cell-centred coarsenings). Кроме того, данное построение грубых сеток уменьшает число сеточных уровней без уменьшения скорости сходимости. При этом построение грубых сеток в УМГ не зависит от расположения контрольных объемов на самой мелкой сетке. В противоположность КММ, контрольные объемы могут быть определены после построения многосеточной структуры, но перед дискретизацией решаемых задач.

4. *Объединение дискретизации методом контрольного объема и многосеточных итераций.* Данное объединение позволяет применять УМГ к решению широкого класса прикладных задач. Кроме того, данная дискретизация имеет прямую физическую трактовку.

5. *Проблемно-независимые операторы переходов.* Доказательство быстрой сходимости КММ предполагает, что операторы переходов удовлетворяют определенному условию: $m_P + m_R > 2m$ [2]. Здесь порядок m_P , m_R операторов пролонгации и ограничения определен как самая высокая степень плюс один полиномов, которые интерполируются точно, и $2m$ есть порядок решаемой задачи. Вычислительные эксперименты показали, что данное условие является необходимым [2]. Операторы переходов УМГ не зависят от решаемой задачи, итерационного метода, упорядочивания неизвестных, неравномерности сетки и т.д. Наиболее яркий пример для иллюстрации преимуществ оператора перехода к более мелким сеткам является уравнение с разрывными коэффициентами. Поскольку линейная интерполяция не является достаточно точной, КММ требуют специальной пролонгации, зависящей от оператора, для решения подобных задач [6]. Отсутствие какой-либо интерполяции в УМГ приводит к отсутствию подобных затруднений (см. подраздел 7.3).

6. *Самая мощная стратегия по вычислению поправок на грубых сетках.* Многосеточная структура, используемая в УМГ, является примером самой мощной стратегии¹ по вычислению поправок для того, чтобы сделать алгоритм наименее зависимым от выбора сглаживающей процедуры. Кроме того, операторы переходов не вносят никаких дополнительных погрешностей в численное решение. Поэтому в УМГ возможно применение простейших итерационных методов (типа точечного варианта метода Зейделя) для решения широкого класса прикладных задач.

7. *Простейший многосеточный цикл.* В УМГ используется самый простой многосеточный цикл (пилообразный). Предварительное сглаживание приводит к определенным затруднениям в КММ при решении нелинейных задач [2]. Разнообразные варианты КММ были предложены для решения нелинейных уравнений (например, Full Approximation Storage). Отсутствие предварительного сглаживания в УМГ приводит к отсутствию подобных затруднений.

8. *Применимость к решению широкого класса задач.* Универсальность Технологии является результатом адаптации задач, исключительно точной формулировки дискретных задач на грубых сетках, оригинального построения грубых сеток, использования только дискретизации методом контрольного объема, самой мощной стратегии, особой конструкции операторов переходов и отсутствия предварительного сглаживания и интерполяции. Все вышперечисленное напрочь отсутствует в КММ.

9. *Высокая степень формализации технологии.* Одно из направлений развития программного обеспечения для многосеточных методов состоит в создании общих строительных блоков и диагностических инструментов, которые будут помогать пользователям развивать собственные программы для отдельных приложений [2]. Основные проблемно-независимые элементы УМГ (построение многосеточной структуры, вычисление отображения индексов и интегралов) оформлены в виде подобных строительных блоков. Подробное описание программного обеспечения, составленного на языке FORTRAN, будет приведено в [7]. Кроме того, сеточные уравнения на всех сетках получаются и записываются унифицированным образом (например, уравнение (5)). Единственным существенным отличием УМГ от односеточного метода Зейделя, помимо скорости сходимости, является аппроксимация граничных условий на уровнях с грубыми сетками (6)–(9).

Все вычислительные эксперименты в данной статье выполнены без какого-либо изменения компонент УМГ. Для простоты программной реализации в качестве сглаживающей процедуры использован блочный вариант метода Зейделя (ALGS)². Теоретический анализ показывает, что ALGS применим к решению широкого класса прикладных задач [2]. Помимо прочего, данная сглаживающая процедура не требует глобальной линеаризации нелинейных дискретных задач. Для наглядности, предполагалось, что сеточные функции определены в точках (x^v, y^v) . Точечный вариант метода Зейделя и разнесенные сетки будут рассмотрены в последующих публикациях.

Единственный недостаток УМГ состоит в увеличении вычислительных усилий в каждой многосеточной итерации по сравнению с КММ. Это обстоятельство будет обсуждено в разделе 8.

5. Вычисление интегралов. Вычисление интегралов в УМГ требует специального рассмотрения. Непосредственное вычисление интегралов на самой мелкой сетке, как это было описано в разделе 3, требует слишком больших вычислительных усилий. Однако особенности построения грубых сеток позволяют предложить более быстрый способ вычисления интегралов. Предположим, что подынтегральная функция $r(x)$

¹Следует с определенным пониманием относиться к терминам “исключительно точная формулировка дискретных задач” и “самая мощная стратегия”. В КММ возможны многочисленные способы формулировки задач на грубых сетках и варианты стратегий отыскания поправок. Многообразие методов дискретизации и многосеточных циклов приводит к необходимости сравнения эффективности их применения к различным прикладным задачам. В УМГ формулировка дискретных задач и стратегия отыскания поправок осуществляются единственно возможным образом, а превосходная степень сравнения в используемых терминах отражает их соотношение с аналогичными элементами КММ.

²Точнее Alternating Line Gauss–Seidel [2]

доопределена нулем вне области Ω . Определим характеристическую функцию $\Upsilon(x)$ в виде

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ 1, & x \notin \Omega, \end{cases} \quad \check{r}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ r(x), & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Согласно данным определениям, интеграл J^L может быть записан в виде

$$J_{\{i\}}^L = \frac{1}{\Delta 3^L} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} r(x) dx = \frac{\hat{J}_{\{i\}}^L}{\Lambda_{\{i\}}^L}, \quad (15)$$

где

$$\hat{J}_{\{i\}}^L = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \check{r}(x) dx \quad \text{и} \quad \Lambda_{\{i\}}^L = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \Upsilon(x) dx,$$

причем $\Lambda_{\{i\}}^L$ есть число реальных контрольных объемов на самой мелкой сетке, которые образуют данный контрольный объем на некоторой сетке. Вычисление интеграла J на L^* -ом уровне начинается с самой мелкой сетки, где интегралы J и Λ вычисляются как

$$J_m^{L=0} = \hat{J}_m^{L=0} = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{m-1}^f}^{x_m^f} r(x) dx, \quad x_m^v \in \Omega, \quad \text{и} \quad \Lambda_m^{L=0} = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{m-1}^f}^{x_m^f} \Upsilon(x) dx = \begin{cases} 1, & x_m^v \in \Omega, \\ 0, & x_m^v \notin \Omega. \end{cases}$$

Поскольку каждый контрольный объем на некоторой грубой сетке L -ого уровня есть объединение трех контрольных объемов на более мелких сетках $(L-1)$ -ого уровня, интегралы \hat{J}^L и Λ^L могут быть вычислены начиная с первого уровня до L^* -ого уровня при помощи следующих рекуррентных формул:

$$\begin{cases} \hat{J}_{\{i\}}^L = \hat{J}_{\{i\}-3^{L-1}}^{L-1} + \hat{J}_{\{i\}}^{L-1} + \hat{J}_{\{i\}+3^{L-1}}^{L-1}, \\ \Lambda_{\{i\}}^L = \Lambda_{\{i\}-3^{L-1}}^{L-1} + \Lambda_{\{i\}}^{L-1} + \Lambda_{\{i\}+3^{L-1}}^{L-1}, \end{cases} \quad L = 1, \dots, L^*.$$

Окончательно интеграл J^{L^*} на L^* -ом уровне вычисляется в соответствии с (15), причем $2 \cdot 3^{L^+ - L}$ фиктивные сеточные точки предназначены исключительно для данной процедуры вычисления интегралов.

Многомерные интегралы могут быть вычислены как повторные одномерные интегралы. Определим единицу вычислительной работы ($WU\{0\}$) как объем вычислений, необходимых для определения интеграла J на самой мелкой сетке. Тогда общий объем вычисления для расчета N -мерного интеграла на всех сетках L -ого уровня составит

$$WU_{\Sigma}\{L\} = WU\{0\} + \varpi \bar{N}L \quad \text{о.п.з.}$$

(операций с плавающей запятой), где $\varpi = 2 \cdot 3^N - 1$ и \bar{N} есть число точек самой мелкой сетки. Предположим, что

- самые грубые сетки имеют 3^N точек, т.е. $\bar{N} = 3^{N(L^++1)} \Rightarrow L^+ = \frac{1}{N} \frac{\lg \bar{N}}{\lg 3} - 1$;
- объем вычислений для расчета интегралов на самой мелкой сетке пропорционален числу сеточных точек: $WU\{0\} = C_I \bar{N}$, где C_I есть некоторая проблемно-зависимая константа.

В вычислениях с большим объемом используемой оперативной памяти (БОП) интегралы вычисляются один раз на каждом уровне перед многосеточной итерацией и их значения хранятся в оперативной памяти компьютера. В этом случае общий объем вычислений может быть оценен как

$$WU_{\Sigma} = WU\{0\} + \varpi \bar{N}L^+ = \bar{N} \left(C_I + \frac{\varpi \lg \bar{N}}{N \lg 3} - \varpi \right) \quad \text{о.п.з.}$$

Для БОП требуется дополнительная оперативная память для хранения $\bar{N}L^+$ вещественных чисел ($\text{Real} * 4$).

Таблица. 2

Распределение вычислительных затрат (БОП)

компонента технологии	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$
сглаживающая процедура (ALGS)	47,5%	64,4%	73,1%	78,4%	81,9%
операторы переходов	52,5%	35,6%	26,9%	21,6%	18,1%

В вычислениях с малым объемом используемой оперативной памяти (МОП) интегралы вычисляются на каждом уровне перед сглаживающими итерациями заново и их значения не хранятся в памяти компьютера, поэтому оценка общего объема вычислений принимает вид

$$WU_{\Sigma} = \sum_{l=0}^{L^+} WU\{0\} + \varpi \bar{N} \sum_{l=1}^{L^+} l = \frac{\bar{N} \lg \bar{N}}{N \lg 3} \left(C_p + \frac{\varpi \lg \bar{N}}{2N \lg 3} - \frac{\varpi}{2} \right) \text{ о.п.з.}$$

Таким образом, общий объем усилий для вычисления интегралов имеет следующее асимптотическое поведение при $\bar{N} \rightarrow +\infty$:

$$WU_{\Sigma} = \begin{cases} O(\bar{N} \lg \bar{N}) & \text{— Большой объем Оперативной Памяти (БОП),} \\ O(\bar{N} \lg^2 \bar{N}) & \text{— Малый объем Оперативной Памяти (МОП),} \\ O(\bar{N}^2) & \text{— прямое вычисление (раздел 3).} \end{cases}$$

6. Оценка общих вычислительных затрат. Введем понятие *эквивалентного числа итераций*. Для этого предположим, что $\nu\{L; g\}$ итераций выполнено на каждой сетке g ($1 \leq g \leq 3^{NL}$) L -ого уровня. Под эквивалентным числом итераций будем подразумевать следующее осредненное значение:

$$\hat{\nu}\{L\} = \frac{1}{3^{NL}} \sum_{g=1}^{3^{NL}} \nu\{L; g\}.$$

Согласно основной особенности построения грубых сеток (отсутствие общих сеточных точек на различных сетках одного уровня) вычислительные усилия для $\hat{\nu}\{L\}$ итераций на всех сетках L -ого уровня и на самой мелкой сетке приблизительно равны между собой. Понятие эквивалентного числа итераций позволяет сравнивать объемы вычислений на различных уровнях. Следуя Брандту [8], единица вычислительной работы определяется как объем вычислений, необходимых для одной сглаживающей итерации на самой мелкой сетке. Для упрощения теоретического анализа предположим, что одинаковое число итераций (ν) выполняется на каждой сетке: $\hat{\nu}\{L\} = \nu$, $0 \leq L \leq L^+$. Объем вычислений для одной итерации ALGS оценивается как

$$\left. \begin{aligned} \text{2D задачи: } & 2H_0(8H_0 - 6) \approx 16\bar{N} \\ \text{3D задачи: } & 6H_0^2(8H_0 - 6) \approx 48\bar{N} \end{aligned} \right\} = 8N(N - 1)\bar{N} \text{ о.п.з. ,}$$

где $\bar{N} = (H_0 + 1)^N \approx \Delta^{-N}$. Объем вычислений, необходимый для данной сглаживающей процедуры, оценивается как

$$8N(N - 1)\nu\bar{N}(L^+ + 1) = \frac{8(N - 1)\nu}{\lg 3} \bar{N} \lg \bar{N} \approx 16(N - 1)\nu \bar{N} \lg \bar{N} \text{ о.п.з.}$$

Рассмотрим БОП и предположим, что $C_I = \varpi = 2 \cdot 3^N - 1$. Тогда распределение вычислительных усилий принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2 \cdot 3^N - 1}{2 \cdot 3^N - 1 + 8(N - 1)N\nu} &\approx \frac{9}{9 + 8\nu} \text{ — вычисление интегралов,} \\ \frac{8(N - 1)N\nu}{2 \cdot 3^N - 1 + 8(N - 1)N\nu} &\approx \frac{8\nu}{9 + 8\nu} \text{ — сглаживающая процедура.} \end{aligned} \right.$$

Табл. 2 представляет данное распределение в зависимости от числа сглаживающих итераций ν .

Таблица 3
Сравнение БОП и МОП ($\nu = 3$)

\bar{N}	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
2D задачи	0,88	0,78	0,71	0,65	0,59	0,55
3D задачи	1,00	0,92	0,84	0,78	0,73	0,69

Теперь рассмотрим МОП и предположим, что $C_I = 0,5 \varpi = 3^N - 0,5$. В этом случае распределение вычислительных усилий может быть оценено как

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(2 \cdot 3^N - 1) \lg \bar{N}}{(2 \cdot 3^N - 1) \lg \bar{N} + 8(N-1)N^2\nu} - \text{вычисление интегралов,} \\ \frac{8(N-1)N^2\nu}{(2 \cdot 3^N - 1) \lg \bar{N} + 8(N-1)N^2\nu} - \text{сглаживающая процедура.} \end{array} \right.$$

Для оценки влияния МОП на общий объем вычислений предположим, что вычислительные усилия для расчета интегралов меньше либо равны усилиям для сглаживающей процедуры

$$\frac{(2 \cdot 3^N - 1) \lg \bar{N}}{(2 \cdot 3^N - 1) \lg \bar{N} + 8(N-1)N^2\nu} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \lg \bar{N} \geq 4(N-1)N^2\nu 3^{-N}.$$

МОП для оператора ограничения будет более эффективна для задач средней размерности при $\nu = 3$:

$$\bar{N} \geq \begin{cases} 450 \times 450, & \text{2D задачи,} \\ 450 \times 450 \times 450, & \text{3D задачи.} \end{cases}$$

Для сравнения усилий в обеих схемах вычисления оператора ограничения, рассмотрим отношение общих затрат в схемах с БОП и МОП:

$$\frac{\text{общие затраты в схеме БОП}}{\text{общие затраты в схеме МОП}} \approx \frac{3^N N + 4(N-1)N^2\nu}{3^N \lg \bar{N} + 4(N-1)N^2\nu}.$$

Данное отношение представлено в Табл. 3. Безусловно, использование дополнительной памяти для хранения $\bar{N}L^+$ вещественных чисел в схеме БОП приводит к уменьшению времени решения задач.

В общем случае многосеточные методы позволяют решить многие задачи, выполняя $O(\bar{N} \lg^k \bar{N})$ о.п.з., где

$$k = \begin{cases} 0, & \text{КММ,} \\ 1, & \text{УМГ (БОП),} \\ 2, & \text{УМГ (МОП).} \end{cases}$$

7. Вычислительные эксперименты. Представленная УМГ состоит из двух частей: аналитического преобразования краевой задачи и многосеточного алгоритма для решения модифицированных уравнений. В этом разделе будут использованы стандартные модельные задачи для демонстрации высокой формализации многосеточного алгоритма УМГ. Сначала рассмотрим краевую задачу вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^x(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda^y(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \gamma(x, y) U + F(x, y) = 0, \quad U|_{\Omega} = g, \quad (16)$$

в $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Σ -модификация решения $U(x, y) = C(x, y) + \hat{U}(x, y)$ приводит к следующей Σ -модифицированной форме задачи (16)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^x(x, y) \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda^y(x, y) \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \gamma(x, y) C = r(x, y), \quad C|_{\Omega} = g - \hat{U}|_{\Omega},$$

где

$$r(x, y) = -F(x, y) - \gamma(x, y) \hat{U} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^x(x, y) \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda^y(x, y) \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} \right).$$

Предположим, что равномерная сетка ($\Delta = H_0^{-1}$) построена, а функции C и \hat{U} определены в сеточных точках (x^v, y^v) . Интегрирование Σ -модифицированного уравнения по контрольному объему (10) позволяет получить следующую конечно-разностную схему:

$$\Gamma_{\{ij\}}^x \frac{C_{\{i+1j\}} - C_{\{ij\}}}{\Delta^2 3^2 L} - \Gamma_{\{i-1j\}}^x \frac{C_{\{ij\}} - C_{\{i-1j\}}}{\Delta^2 3^2 L} + \Gamma_{\{ij\}}^y \frac{C_{\{ij+1\}} - C_{\{ij\}}}{\Delta^2 3^2 L} - \Gamma_{\{ij-1\}}^y \frac{C_{\{ij\}} - C_{\{ij-1\}}}{\Delta^2 3^2 L} + \langle \gamma \rangle_{\{ij\}} C_{\{ij\}} = J_{\{ij\}}, \quad (17)$$

где

$$\Gamma_{\{ij\}}^x = \frac{1}{\Delta 3L} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \lambda^x(x_{\{i\}}^f, y) dy \quad \text{и} \quad \Gamma_{\{ij\}}^y = \frac{1}{\Delta 3L} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \lambda^y(x, y_{\{j\}}^f) dx \quad (18)$$

есть осредненные значения коэффициентов $\lambda^x(x, y)$ и $\lambda^y(x, y)$ вдоль границ контрольного объема. Коэффициенты $\langle \gamma \rangle$, определяемые уравнением (11), есть среднеинтегральные значения функции $\gamma(x, y)$ по данному объему. Интеграл J на самой мелкой сетке вычисляется как

$$R_{mk}^* = -F_{mk} - \langle \gamma \rangle_{mk} \hat{U}_{mk} - \Gamma_{mk}^x \frac{\hat{U}_{m+1k} - \hat{U}_{mk}}{\Delta^2} - \Gamma_{m-1k}^x \frac{\hat{U}_{mk} - \hat{U}_{m-1k}}{\Delta^2} - \Gamma_{mk}^y \frac{\hat{U}_{mk+1} - \hat{U}_{mk}}{\Delta^2} - \Gamma_{mk-1}^y \frac{\hat{U}_{mk} - \hat{U}_{mk-1}}{\Delta^2} + o(\Delta^2). \quad (19)$$

В общем случае интегралы Γ^x, Γ^y, J и $\langle \gamma \rangle$ должны быть вычислены на самой мелкой сетке для получения исключительно точной формулировки дискретных задач на грубых сетках (см. раздел 5). В проводимых вычислительных экспериментах принято следующее:

- 1) точное решение модельной задачи есть $U_e(x, y) = f(x)f(y)$, где функция f определяется согласно (2). Функция F может быть получена посредством подстановки точного решения в уравнение (16);
- 2) выбрано нулевое начальное приближение: $U^0(x, y) = 0$;
- 3) погрешность численного решения определяется в виде $E = \max_{ij} |U_e(x_i^y, y_j^y) - U_{ij}|$;
- 4) на уровнях с мелкими сетками выполняется три итерации ALGS: $\nu = 3, 0 \leq L < L^+$.

7.1. Изотропное уравнение ($\lambda^x = \lambda^y = 1; \gamma = 0$). В этом случае соотношения (18) принимают вид $\Gamma_{\{ij\}}^x = \Gamma_{\{ij\}}^y = 1$ и $\langle \gamma \rangle_{\{ij\}} = 0$. Два тестовых расчета было выполнено в качестве вычислительного эксперимента:

Тест 1. Пятиточечная дискретизация уравнения Пуассона (17)–(19):

$$\frac{C_{\{i-1j\}} - 2C_{\{ij\}} + C_{\{i+1j\}}}{\Delta^2 3^2 L} + \frac{C_{\{ij-1\}} - 2C_{\{ij\}} + C_{\{ij+1\}}}{\Delta^2 3^2 L} = J_{\{ij\}},$$

$$R_{mk}^* = -F_{mk} - \frac{\hat{U}_{m-1k} - 2\hat{U}_{mk} + \hat{U}_{m+1k}}{\Delta^2} - \frac{\hat{U}_{mk-1} - 2\hat{U}_{mk} + \hat{U}_{mk+1}}{\Delta^2} + o(\Delta^2).$$

Тест 2. (Пяти+Девяти)-точечная дискретизация уравнения Пуассона. К сожалению, высокоточные решения не могут быть получены на многосеточной структуре непосредственно. Точность численного решения зависит от аппроксимации граничных условий на грубых сетках (6)–(9). Однако пятиточечное представление оператора в левой части и девятиточечное представление интегралов R^* в правой части позволяют получать более точные решения. Предположим, что решение со вторым порядком точности уже получено (Тест 1). Для того чтобы получить численное решение с четвертым порядком точности, необходимо вычислять интегралы R^* как

$$R_{mk}^* = -F_{mk} + \frac{\Delta^2}{12} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{mk} - \frac{1}{6\Delta^2} \left(\begin{array}{ccc} \hat{U}_{m-1k+1} + 4\hat{U}_{mk+1} + \hat{U}_{m+1k+1} \\ + 4\hat{U}_{m-1k} - 20\hat{U}_{mk} + 4\hat{U}_{m+1k} \\ + \hat{U}_{m-1k-1} + 4\hat{U}_{mk-1} + \hat{U}_{m+1k-1} \end{array} \right) + o(\Delta^4).$$

Уменьшение погрешности численного решения в первом и втором тестах показано на рис. 7. Определим осредненные факторы уменьшения невязки ρ_q и $\rho_{\hat{\nu}}$ в виде

$$\rho_q = \left(\frac{\|R^{(q)}\|}{\|R^{(0)}\|} \right)^{1/q} \quad \text{и} \quad \rho_{\hat{\nu}} = \left(\frac{\|R^{(\hat{\nu})}\|}{\|R^{(0)}\|} \right)^{1/\hat{\nu}},$$

где $\|\cdot\|$ есть l_2 -норма, R — невязка, вычисленная на самой мелкой сетке, $R^{(0)}$ — невязка начального приближения и q — число многосеточных итераций. Табл. 4 представляет осредненные факторы уменьшения невязки как функцию от величины шага самой мелкой сетки в первом тесте.

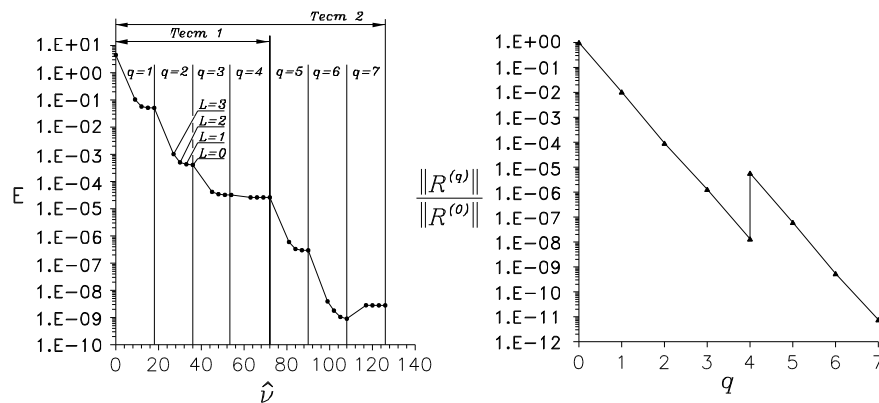


Рис. 7. Изменение погрешности численного решения во втором тесте (сетка 111 × 111)

Таблица. 4

Скорость сходимости многосеточной технологии в первом тесте

Мелкая сетка	L^+	$\hat{\nu}_\Sigma$	q	ρ_q	$\rho_{\hat{\nu}}$	E
16 × 16	1	56	4	0,012	0,726	$1,66 \cdot 10^{-3}$
41 × 41	2	60	4	0,013	0,747	$2,34 \cdot 10^{-4}$
111 × 111	3	64	4	0,011	0,754	$3,09 \cdot 10^{-5}$
351 × 351	4	80	4	0,014	0,806	$3,08 \cdot 10^{-6}$
1001 × 1001	5	89	4	0,029	0,852	$3,90 \cdot 10^{-7}$

Подчеркнем, что общепринятый осредненный фактор уменьшения ρ_q не позволяет провести достаточно точного сравнения КММ и УМГ. Данный фактор может быть использован только для сравнения различных вариантов КММ. Более аккуратное сравнение должно представлять фактор $\rho_{\hat{\nu}}$ в зависимости от вычислительных усилий. На примере первой краевой задачи для уравнения Пуассона в УМГ достигается уменьшение нормы невязки в 0,01 – 0,03 раз в течение многосеточной итерации, что контрастирует со значениями 0,125 – 0,250 для КММ [9]. Однако для реализации многосеточных итераций УМГ требуются большие вычислительные затраты (см. раздел 8).

7.2. Анизотропное уравнение ($\lambda^x \gg \lambda^y$ or $\lambda^x \ll \lambda^y$; $\gamma = -0.25$). Следуя [1], рассмотрим задачу вида

$$\lambda^x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda^y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{4} U + F(x, y) = 0 \quad \lambda^x, \lambda^y > 0.$$

Тест 3. Пятиточечная дискретизация, самая мелкая сетка 151 × 151 ($L^+ = 3$). В этом случае $\Gamma_{\{ij\}}^x = \lambda^x$, $\Gamma_{\{ij\}}^y = \lambda^y$ и $\langle \gamma \rangle_{\{ij\}} = -0.25$. Табл. 5 представляет осредненный фактор уменьшения невязки ρ_q как функцию параметров λ^x и λ^y .

Теоретический анализ показывает, что ALGS является эффективным сглаживателем для анизотропного уравнения [2], однако самая мощная стратегия, которая используется в УМГ, позволяет избежать применения блочных сглаживателей для подобных задач.

7.3. Уравнения с разрывными коэффициентами. В КММ дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами требуют специального рассмотрения. Исследованию различных способов интерполяции через поверхность разрыва коэффициентов посвящено значительное число работ (см. в [2]).

В отличие от КММ, УМГ не требует каких-либо изменений в конструкции операторов переходов для различных задач. Для простоты предположим, что поверхность разрыва коэффициентов $\lambda^x(x, y)$ расположена на гранях контрольных объемов (рис. 8). В этом случае коэффициент $\Gamma_{\{ij\}}^x$ в задаче (17) определяется как

$$\Gamma_{\{ij\}}^x = \frac{\hat{\Gamma}_{\{ij\}}^x \hat{\Gamma}_{\{i+1j\}}^x}{(1 - \zeta) \hat{\Gamma}_{\{ij\}}^x + \zeta \hat{\Gamma}_{\{i+1j\}}^x}, \quad \zeta = \frac{x^* - x_{\{i\}}^y}{\Delta 3^L} \in (0, 1),$$

Таблица 5

Сходимость технологии (ρ_q) в третьем тесте

$\lambda^x \setminus \lambda^y$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{+0}	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}
10^{-3}	0,003	0,038	0,035	0,002	0,000	0,000	0,000
10^{-2}	0,038	0,008	0,101	0,039	0,002	0,000	0,000
10^{-1}	0,035	0,101	0,010	0,125	0,040	0,002	0,000
10^{+0}	0,002	0,039	0,125	0,010	0,125	0,040	0,002
10^{+1}	0,000	0,002	0,040	0,125	0,010	0,125	0,040
10^{+2}	0,000	0,000	0,002	0,040	0,125	0,010	0,127
10^{+3}	0,000	0,000	0,000	0,002	0,040	0,127	0,010

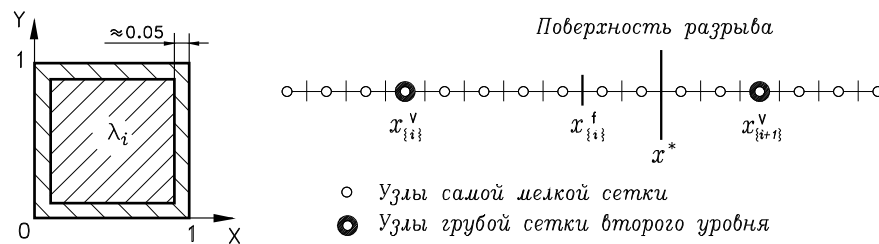


Рис. 8. Геометрия модельной задачи и расположение поверхности разрыва

Таблица 6

Скорость сходимости технологии (ρ_q) в четвертом тесте

λ_i	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
ρ_q	0.016	0.064	0.106	0.123	0.144	0.170	0.188

где

$$\hat{\Gamma}_{\{ij\}}^x = \frac{1}{\Delta 3L} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \lambda^x(x_{\{i\}}^v, y) dy.$$

Когда поверхность разрыва $\lambda^x(x, y)$ расположена между узлами $x_{\{i\}}^v$ и $x_{\{i+1\}}^v$, нетрудно получить

$$x^* - x_{\{i\}}^v = x_{\{i+1\}}^v - x^* \Rightarrow \zeta = 0,5 \Rightarrow \Gamma_{\{ij\}}^x = \frac{2\hat{\Gamma}_{\{ij\}}^x \hat{\Gamma}_{\{i+1j\}}^x}{\hat{\Gamma}_{\{ij\}}^x + \hat{\Gamma}_{\{i+1j\}}^x}.$$

Здесь $\Gamma_{\{ij\}}^x$ есть среднегеометрическое значение $\hat{\Gamma}_{\{ij\}}^x$ и $\hat{\Gamma}_{\{i+1j\}}^x$ [2, 4, 10].

Следуя Весселингу [10], рассмотрим следующую модельную задачу, геометрия которой показана на рис. 8:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^x(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda^y(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} \right) + xy = 0, \quad U|_{\partial\Omega} = x^2 + y^2.$$

Тест 4. Пятиточечная дискретизация, самая мелкая сетка 151×151 ($L^+ = 3$), $\lambda_e = 1$. Табл. 6 представляет усредненный фактор уменьшения невязки ρ_q в зависимости от величины λ_i .

Сравнение скорости сходимости, полученной в четвертом тесте, с результатами, представленными в [10], показывает, что УМГ, как минимум, так же эффективна, как и КММ, при решении подобных задач.

Случай, когда узлы сетки расположены на поверхности разрыва коэффициентов, рассматривается по аналогии с [2].

7.4. Нелинейные уравнения. К настоящему времени было предложено несколько вариантов КММ для решения нелинейных задач [2]. Отсутствие предварительного сглаживания в УМГ приводит к существенному

Таблица 7

Скорость сходимости технологии в пятом тесте

α	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{+0}	10^{+1}
ρ_q	0,015	0,015	0,014	0,012	0,008
E	$2,91 \cdot 10^{-6}$	$2,90 \cdot 10^{-6}$	$2,81 \cdot 10^{-6}$	$2,09 \cdot 10^{-6}$	$5,81 \cdot 10^{-7}$

упрощению решения нелинейных задач по сравнению с КММ. Для иллюстрации формального применения УМГ к решению нелинейных уравнений рассмотрим следующую модельную задачу:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \alpha U^2 + F(x, y) = 0, \quad U|_{\Omega} = 0, \quad \alpha > 0. \quad (20)$$

Функция F выбрана таким образом, что точное решение есть $U_e(x, y) = f(x)f(y)$, где f заданы согласно (2). Данное уравнение может быть записано в Σ -модифицированной форме:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \alpha(C^2 + 2C\hat{U}) = r(x, y), \quad C|_{\Omega} = -\hat{U}|_{\Omega},$$

где

$$r(x, y) = -F(x, y) - \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial y^2} + \alpha \hat{U}^2.$$

Предположим, что самая мелкая сетка ($\Delta = H_0^{-1}$) построена, функции \hat{U} и C определены в сеточных точках (x^v, y^v) . Интегрирование Σ -модифицированного уравнения по контрольному объему позволяет получить следующую конечно-разностную схему:

$$\mathcal{L}_{\{ij\}}(C) - \alpha(C_{\{ij\}}^2 + 2C_{\{ij\}}\langle \hat{U} \rangle_{\{ij\}}) = J_{\{ij\}},$$

где

$$\Theta_{\{ij\}} = \frac{1}{\Delta^2 32L} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} \int_{y_{\{j-1\}}^f}^{y_{\{j\}}^f} \theta(x, y) dy dx, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \langle \hat{U} \rangle \\ J \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \hat{U} \\ r \end{pmatrix},$$

и интеграл J вычисляется на самой мелкой сетке ($L = 0$) следующим образом:

$$R_{mk}^* = -F_{mk} - \mathcal{L}_{mk}(\hat{U}) + \alpha \hat{U}_{mk}^2 + o(\Delta^2) \quad \text{и} \quad \langle \hat{U} \rangle_{mk} = \hat{U}_{mk} + o(\Delta^2).$$

Напомним, что интегралы J и $\langle \hat{U} \rangle$ вычисляются на самой мелкой сетке с точностью $o(\Delta^2)$ для того, чтобы получить исключительно точную формулировку дискретных проблем на грубых сетках. Нелинейные сеточные уравнения могут быть локально линеаризованы и решены итерационно на каждой сетке многосеточной структуры методом Ньютона.

Тест 5. Пятиточечная дискретизация, самая мелкая сетка 361×361 ($L^+ = 4$). Табл. 7 представляет осредненный фактор уменьшения невязки ρ_q и погрешность E в зависимости от величины параметра α . Конечно, вычисление $\langle \hat{U} \rangle$ приводит к увеличению вычислительных усилий в итерациях УМГ приблизительно в

$$\frac{2 \cdot 3^N + 4(N-1)N\nu}{3^N + 4(N-1)N\nu} = 1,27$$

раз (БОП при $\nu = 3$) по сравнению с $\alpha \equiv 0$.

Следует заметить, что П-модификация $U = C\hat{U}$ для некоторых нелинейных уравнений

$$\hat{U}^{(q)} = \begin{cases} 1, & q = 1, \\ \hat{U}^{(q-1)} C^{(q-1)}, & q > 1 \end{cases}$$

Таблица 8
Максимальный проигрыш технологии в зависимости от числа узлов самой мелкой сетки

число узлов (\bar{N})	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
2D задачи	0,83	0,67	0,56	0,48	0,42	0,37
3D задачи	0,96	0,77	0,64	0,55	0,48	0,43

может выглядеть более привлекательной, чем Σ -модификация. Например, ε -уравнение в модели Лондера-Шарма [11] может быть записано в виде

$$\frac{\partial(\rho u \varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \varepsilon)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + A \frac{\varepsilon}{k} - B \frac{\varepsilon^2}{k} + E,$$

где

$$\begin{aligned} \mu_e &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}, & A &= C_{\varepsilon 1} f_1 \mu_t \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right), \\ B &= C_{\varepsilon 2} f_2 \rho, & E &= 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Π -модифицированная форма ε -уравнения ($\varepsilon = c_\varepsilon \hat{\varepsilon}$ и $K = c_k \hat{k}$) выражается как

$$\frac{\partial(\rho u^* c_\varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^* c_\varepsilon)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e^* \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_e^* \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial y} \right) + A^* \frac{c_\varepsilon}{c_k} - B^* \frac{(c_\varepsilon)^2}{c_k} + E,$$

где

$$A^* = A \frac{\hat{\varepsilon}}{k}, \quad B^* = B \frac{\hat{\varepsilon}^2}{k}, \quad \mu_e^* = \mu_e \hat{\varepsilon}, \quad u^* = u \hat{\varepsilon} - \frac{\mu_e}{\rho} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial x}, \quad v^* = v \hat{\varepsilon} - \frac{\mu_e}{\rho} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial y}.$$

Очевидно, что Π -модификация не изменила вида ε -уравнения.

8. Универсальность против эффективности. Дилемма об универсальности против эффективности присутствует во многих разделах вычислительной математики. Как было показано ранее, УМГ требует наименьшего числа итераций для получения численного решения, однако вычислительная стоимость данных итераций достаточно велика. Поэтому КММ могут быть более эффективными для решения простейших задач, чем УМГ. С другой стороны КММ часто оказываются малоэффективными для сложных задач, которые могут быть решены при помощи УМГ. Поэтому в общем случае сравнение между КММ и УМГ зависит от решаемой задачи.

Оценим максимальный проигрыш в вычислительных усилиях для УМГ. Предположим, что некоторая задача (например, уравнение Пуассона) может быть решена эффективно при помощи КММ (V-цикл, сглаживатель ALGS, стоимость операторов переходов есть $C_T \bar{N}$ о.п.з.). Тогда вычислительная стоимость каждой итерации КММ может быть оценена как

$$(8(N-1)N\nu + C_T) \bar{N} \left(2 \sum_{l=0}^{L^+} 2^{-Nl} - 1 \right) \approx (8(N-1)N\nu + C_T) \bar{N} \frac{2^N + 1}{2^N - 1}.$$

Стоимость каждой итерации УМГ (БОП) оценивается как

$$(8(N-1)N\nu + C_I) \frac{\bar{N} \lg \bar{N}}{N \lg 3} \approx (8(N-1)N\nu + C_I) \frac{2}{N} \bar{N} \lg \bar{N}.$$

Отношение вычислительных усилий принимает вид

$$\frac{q_\Sigma^c}{q_\Sigma^r} \frac{2^N + 1}{2^N - 1} \frac{N}{2} \frac{8(N-1)N\nu + C_T}{8(N-1)N\nu + C_I} \frac{1}{\lg \bar{N}},$$

где q_{Σ}^c и q_{Σ}^r есть число итераций КММ и УМГ соответственно. Предполагая, что $q_{\Sigma}^c = 2q_{\Sigma}^r$ и $8(N-1)N\nu \gg \max(C_T, C_I)$ (т.е. пренебрегая стоимостью операторов переходов), окончательно получаем

$$\frac{\text{общие усилия в КММ}}{\text{общие усилия в УМГ}} \approx \frac{2^N + 1}{2^N - 1} \frac{N}{\lg N}.$$

Полученная оценка показывает, что не существует значительного проигрыша для УМГ в общем объеме вычислений (Табл. 8). С практической точки зрения, для реализации КММ потребуется в несколько раз меньше компьютерного времени, чем для УМГ, при решении простейших задач. Незначительный проигрыш в общем объеме вычислений является неизбежным следствием применимости УМГ к решению широкого класса задач.

Благодарности. Автор выражает признательность Р. П. Федоренко за ценные замечания и благодарит всех рецензентов за тщательное чтение рукописи, которое привело к ряду исправлений и значительному улучшению представления материала.

9. Заключение. В данной статье были рассмотрены очень простые модельные задачи для демонстрации универсальности и эффективности УМГ. Все задачи требовали только единственной Σ -модификации для их адаптации к УМГ. Следующим шагом в развитии УМГ будет систематическое исследование методов адаптации решаемых задач к УМГ, поскольку остальные компоненты технологии являются проблемно-независимыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hackbusch W.* Robust multi-grid methods, the frequency decomposition multi-grid algorithm. Proc. 4th GAMM-seminar. Kiel, 1988.
2. *Wesseling P.* An Introduction to Multigrid Methods. Chichester, 1991.
3. *Федоренко Р.П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. **1**. 992–927.
4. *Patankar S.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York, 1980.
5. *Koren B.* Defect correction and multigrid for an efficient and accurate computation of airfoil flows // J. Comput. Phys. 1988. **77**. 183–206.
6. *Hackbusch W.* Multi-grid methods and applications. Berlin, 1985.
7. *Martynenko S.I.* Template for the solution of partial differential equations: building blocks and diagnostic tools for the robust multigrid technique // Numerical Methods and Programming (to appear).
8. *Brandt A.* Multi-level adaptive solutions to boundary value problems // Math. Comput. 1977. **31**. 333–390.
9. *Dendy Jr. J. E.* Black box multigrid // J. Comput. Phys. 1982. **48**. 366–386.
10. *Wessiling P.* Cell-centred multigrid for interface problem // J. Comput. Phys. 1988. **79**. 85–91.
11. *Lauder B., Sharma B* Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // Letters in Heat and Mass Transfer. 1974. **1**. 131–138.

Поступила в редакцию
16.10.2000