УДК 518.5:533.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВДУВА ВЯЗКОГО НЕСЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПЛОСКИЙ КАНАЛ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

С. Б. Березин[1], **В. М. Пасконов**[1]

В представленной статье на основе численного решения уравнений Навье–Стокса в переменных (u, v, T) и графической обработки результатов расчетов проведено исследование развития течения вязкого несжимаемого газа в плоском канале и в аэродинамическом следе за ним. Дано описание постановки задачи и численного метода ее решения. Выявлены различные структуры течений в зависимости от определяющих параметров. Подробно исследован механизм блокировки ("запирания") канала.

Ключевые слова: чмсленные методы, уравнения Навье–Стокса, визуализация, итерационные алгоритмы, математическое моделирование, течения вязкого несжимаемого газа, число Маха.

Настоящая работа посвящена численному исследованию вдува вязкого несжимаемого воздуха в плоский канал при малых числах Маха. Трудности расчета вязких течений при малых числах Маха известны достаточно давно и отмечались в работе [1]. В газовой динамике без учета вязких сил несжимаемые течения ассоциируются с представлением, что число Маха равно нулю. Однако, например, в диапазоне характерной скорости воздуха $0.1 \leqslant U \leqslant 10$ м/с число Маха находится в диапазоне $0.0003 \leqslant M \leqslant 0.03$. Исторически сложилась такая ситуация, что расчет несжимаемых вязких течений проводился для системы уравнений Навье–Стокса, записанной относительно функции тока и функции вихря. Отметим, что одни из первых работ по численному исследованию вязких несжимаемых течений в плоском канале были выполнены в Вычислительном центре МГУ и опубликованы в сборниках работ, носивших название "Вычислительные методы и программирование" [2, 3].

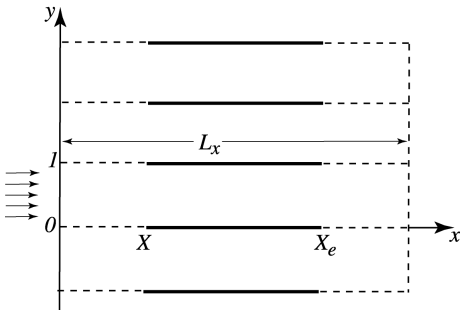


Рис. 1. Батарея пластин

Физическая постановка задачи, рассматриваемой в предлагаемой читателю статье, формулируется чрезвычайно просто. Бесконечная "батарея" плоских пластин, расположенных строго параллельно друг другу и образующих плоские каналы одинаковой высоты, обдувается равномерным дозвуковым потоком вязкого несжимаемого газа. Предполагается, что набегающий поток параллелен плоскостям бесконечно тонких пластин, толщиной которых можно пренебречь. Пластины имеют конечную длину, что позволяет рассматривать не только течение внутри каналов, но и структуру газодинамического следа за такой "батареей" плоских пластин (рис. 1).

Физической постановке задачи соответствует следующая математическая постановка. Рассматривается область, выделенная на рис. 1 жирными линиями ($0 \leqslant x \leqslant L_x$, $0 \leqslant y \leqslant 1$); характерным линейным размером естественно выбрать высоту канала. Таким образом, длина канала $L_c = X_e - X$, область набегающего потока: $0 \leqslant x \leqslant X$, область следа за каналом $L_w = L_x - X_e$. В рассматриваемой области следует

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119992, Москва; e-mail: s_berezin@cs.msu.su, paskonov@cs.msu.su

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

решить систему уравнений Навье–Стокса для плоского течения вязкого совершенного несжимаемого газа, которая может быть представлена для безразмерных величин в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \Phi, \tag{3}$$

$$p = \frac{1}{\gamma\,\mathrm{M}^2}\,T, \tag{4}$$

где Φ — диссипативная функция:

$$\Phi = \gamma(\gamma-1)\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{Re}}\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{5}$$

Здесь использовались общепринятые обозначения: u — продольная составляющая вектора скорости, v — поперечная составляющая вектора скорости, T — температура, p — давление. Безразмерные переменные введены следующим образом (размерные величины отмечены штрихом):

$$x' = L'x, \quad y' = L'y, \quad u = V'u, \quad p'_0 = \rho'_0 {V'}^2 p, \quad T' = T'_0 T, \tag{6}$$

где p'_0, ρ'_0, T'_0, V' — давление, плотность, температура и скорость в набегающем потоке, L' — характерный линейный размер (высота канала).

Параметрами подобия являются число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \dfrac{V'L'}{\nu'}$, число Маха $\mathrm{M} = \dfrac{V'}{a'}$, число Прандтля $\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu' c'_p}{k'}$; квадрат скорости звука $a^2 = \dfrac{\gamma p'_0}{\rho'_0}$, отношение удельных теплоемкостей $\gamma = \dfrac{c'_p}{c'_\nu}$. Здесь Re и M — изменяемые параметры, а Pr, a, γ характеризуют движущуюся среду (в представленных расчетах — воздух). По существу, единственным изменяемым критерием подобия является число Рейнольдса, так как вместо уравнения энергии (3), используя (4), можно получить уравнение для давления, в котором отсутствует число Маха. Однако при расчетах использовалось уравнение энергии, что, на наш взгляд, облегчало интерпретацию результатов.

Система уравнений (1)–(4) получена из полной системы уравнений Навье–Стокса в безразмерной форме для вязкого, сжимаемого, теплопроводного газа при $\rho = \dfrac{\rho'}{\rho_0} = 1$ и с учетом уравнения неразрывности

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = 0, \tag{7}$$

которое при расчетах достаточно применять в качестве контрольного соотношения, так как оно уже было использовано при выводе уравнений (1) и (2).

В соответствии с физической постановкой задачи граничные условия для системы (1)–(4) ставились следующим образом. На левой границе расчетной области (рис. 1) при $x = 0$ задавались условия равномерного постоянного набегающего потока:

$$u(0,y) = 1, \quad v(0,y) = 0, \quad T(0,y) = 1. \tag{8}$$

При $0 < x < X$ и $X_e < x < L_x$ задавались условия периодичности:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=1} = 0, \quad v(x,0) = v(x,1) = 0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=1} = 0. \tag{9}$$

На нижней и верхней стенках канала при $X \leqslant x \leqslant X_e$ задавались условия “прилипания” для скорости и условия теплоизоляции для температуры:

$$u(x,0) = u(x,1) = 0, \quad v(x,0) = v(x,1) = 0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=1} = 0. \tag{10}$$

На выходной границе при $x = L_x$ использовались "мягкие" граничные условия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \tag{11}$$

В качестве начальных условий использовались условия покоя для скорости и постоянства температуры во всей расчетной области:

$$u(x,y) = v(x,y) = 0, \quad T(x,y) = 1 \quad (0 < x \leqslant L_x,\, 0 \leqslant y \leqslant 1). \tag{12}$$

Метод численного решения. Сформулированная выше задача в невязкой постановке, как понятно, имеет тривиальное решение, так как не учитывает вязкостных эффектов, которые связаны с развитием пограничных слоев около стенок канала и их последующим взаимодействием. Поэтому при решении поставленной задачи разностным методом необходимо иметь более густую разностную сетку вблизи стенок канала. Это достигалось путем введения новой "расчетной" переменной y_1 в поперечном направлении:

$$y_1 = \eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(e^{-\alpha(y-0.5)^2} - e^{-0.25\alpha}\right) & \text{для } 0 \leqslant y \leqslant 0.5, \\ 1 - \dfrac{1}{2}\left(e^{-\alpha(y-0.5)^2} + e^{-0.25\alpha}\right) & \text{для } 0.5 < y \leqslant 1 \end{cases}$$

с некоторой линейной коррекцией вблизи $y = 0.5$. Параметр α позволяет симметрично относительно центра канала сгущать узлы сетки около стенок. Сразу следует заметить, что все результаты расчетов приводятся в "физических" (а не в "расчетных") координатах.

В качестве вычислительного метода использовался широко известный метод покоординатного расщепления. Для простоты изложения приведем в "физических" переменных системы дифференциальных уравнений, для которых решались соответствующие краевые задачи неявным разностным методом с использованием прогонок. Процесс расчета при переходе от одного временно́го слоя к последующему осуществлялся в два этапа. Сначала находилось решение на "полуцелом" временном слое поперек расчетной области для системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma\,\mathrm{M}^2}\,\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ &\frac{\partial T}{\partial t} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\,\Phi. \end{aligned}$$

Используя полученное решение, находилось решение соответствующей краевой задачи на "целом" временном слое вдоль расчетной области для системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma\,\mathrm{M}^2}\,\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ &\frac{\partial T}{\partial t} + u\,\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\,\Phi. \end{aligned}$$

При этом для "выборки нелинейности" проводились необходимые итерационные процессы на "полуцелых" и "целых" временны́х шагах. Оценка точности осуществлялась путем вычисления осредненного значения интеграла от дивергенции скорости в каждой сеточной ячейке. В обсуждаемых ниже результатах численных экспериментов осредненное значение этого интеграла составляло $10^{-6} - 10^{-4}$.

Обсуждение результатов расчетов. Мы будем представлять результаты расчетов в виде поверхностей $z = F(x,y)$, где в качестве $F(x,y)$ взята продольная составляющая вектора скорости, и полей направлений вектора скорости в расчетной области (или ее части). Для построения приведенных здесь изображений применялась система визуализации результатов научных расчетов [4]. Надо отметить, что именно наглядное графическое отображение результатов позволило обнаружить интересные характеристики нестационарного развития потока в канале.

Почти во всех вариантах расчетов, результаты которых обсуждаются ниже, мы столкнулись с несколько непредвиденным поведением решения в расчетной области, которое противоречило сложившимся классическим представлениям о развитии течения на начальном участке плоского канала [5, 6] и связанного с плавным переходом от ударного профиля на входе к параболическому профилю Пуазейля. С другой стороны, в аэрогидродинамике известен факт так называемого "запирания" канала, когда происходит блокировка течения в канале. Механизм такого явления в известных нам работах не проанализирован. Представленный ниже анализ расчетов на основе модели Навье–Стокса, на наш взгляд, дает возможность понять процесс запирания канала и возможность перехода при увеличении числа Рейнольдса к классической модели Шлихтинга. Предложенная вычислительная методика позволила также оценить характер течения в следе за батареей плоских каналов.

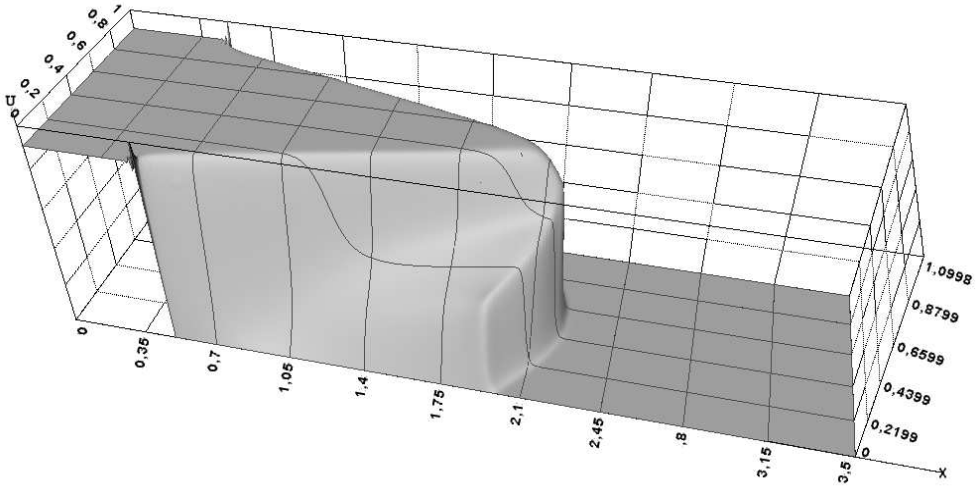


Рис. 2 a. $\mathrm{Re} = 700$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 5$

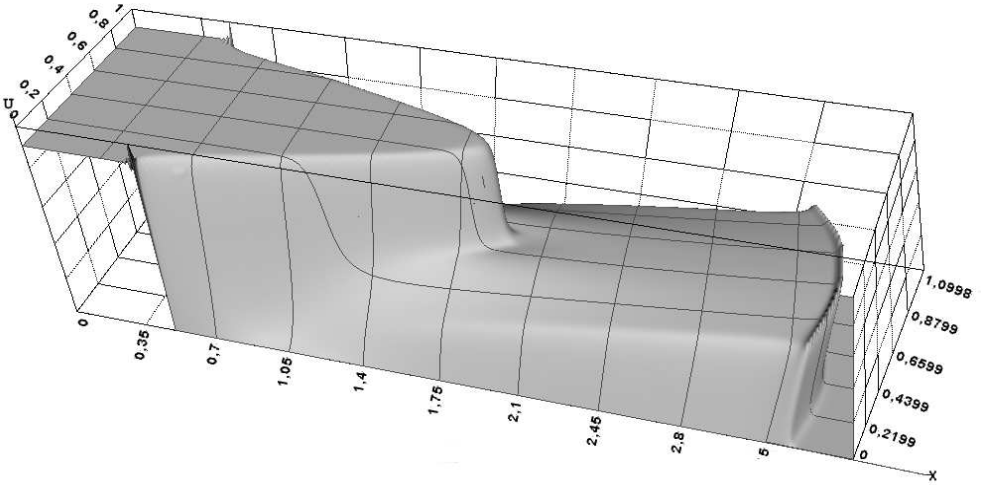


Рис. 2 b. $\mathrm{Re} = 700$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 8$

Рассмотрим сначала расчет развития течения в канале длиной $L_c = 3$ для определяющих параметров $\mathrm{Re} = 700$ и $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, которые приблизительно соответствуют вдуву воздуха со скоростью 10 см/с в канал высотой 10 см. Расчет проведен на сетке 101×351 в области, длина которой составляла 3.5; в интервале $0 < x < X = 0.5$ в общем цикле рассчитывался набегающий поток. Как показало большинство расчетов, влияние вверх по потоку изменения граничного условия при $x = X$ незначительно и не влияет на развитие течения в канале. Осредненное по сетке значение интеграла от дивергенции вектора скорости составило 1.4×10^{-5}.

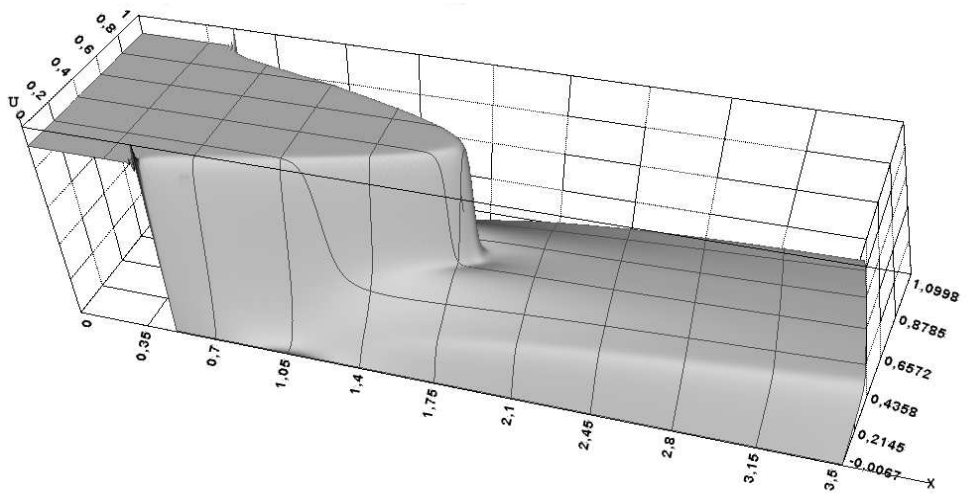


Рис. 2 c. $\mathrm{Re} = 700$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 15$

На рис. 2 a – 2 c представлены поверхности продольной составляющей скорости $u(x, y)$ для трех моментов времени $t = 5$, 8, 15, характеризующих изменение структуры решения. Равномерный набегающий поток внедряется в канал и, тормозясь около стенок, образует область в виде затупленного клина, заостряющегося по мере продвижения вдоль канала ($t = 5$, рис. 2 a). В этой области продольная составляющая скорости равна скорости набегающего потока. Одновременно возникает вторая немного изогнутая плоская волна, интенсивность которой почти в два раза меньше первоначальной волны. Таким образом, в канале формируется двухступенчатая структура течения: первоначальная клиновидная волна, которая практически остается на месте, и плоская волна, которая движется к границе расчетной области ($t = 8$, рис. 2 b). После выхода второй волны из расчетной области происходит установление решения ($t = 15$, рис. 2 c). Как видно на этом рисунке, продольная составляющая скорости на выходе из расчетной области уменьшается более чем в два раза.

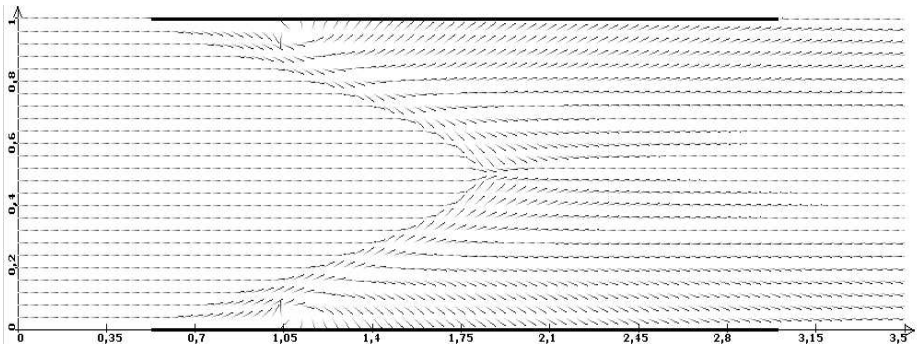


Рис. 3. $\mathrm{Re} = 700$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 15$

На рис. 3 представлено поле направлений векторов скорости при $t = 15$ (начало вектора — тонкий штрих, его окончание — утолщенное). В начале канала вблизи стенок вектора скорости отстраняются от стенок (намечается микро-отрыв пограничного слоя), а потом начинают прижиматься к ним. При этом модуль поперечной составляющей скорости достигает 0.4, дальше вниз по течению модуль поперечной составляющей скорости не превышает 0.08. Следует отметить, что для значений продольной составляющей скорости симметричность относительно центра канала достигает пяти-шести значащих цифр, симметричность модуля поперечной составляющей скорости также высокая. Заметим, что при расчете интегрировалась система уравнений (1) – (3) относительно неизвестных функций u, v и T с соответствующими начальными и граничными условиями; температура оставалась постоянной и равной температуре набегающего потока.

В рассмотренном выше варианте расчета мы столкнулись с существенным понижением величины

скорости на выходе из канала и, тем самым, с уменьшением пропускной способности канала. Ниже мы рассмотрим процесс “запирания канала”, используя вычислительную методику, представленную выше. Расчет был произведен на сетке 101×351 для канала единичной длины $L_c = 1$, который был помещен в расчетную область длиной $L_x = 3.5$ при $0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$; набегающий поток: $0 < x < 0.5$, след за каналом: $1.5 < x < 3.5$, параметры подобия: $\mathrm{Re} = 140$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$. На рис. 4 a – 4c представлены поверхности продольной составляющей скорости $u(x, y)$ для трех моментов времени, характеризующих развитие течения в канале и в следе.

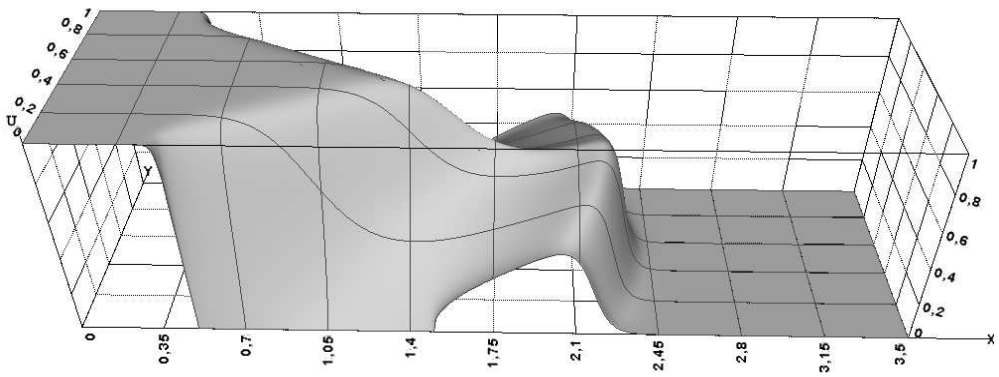


Рис. 4 a. $\mathrm{Re} = 140$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 5$

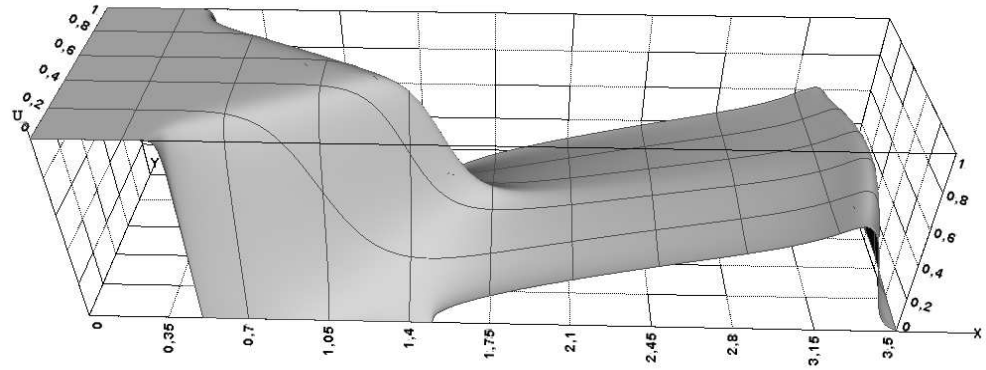


Рис. 4 b. $\mathrm{Re} = 140$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 7.5$

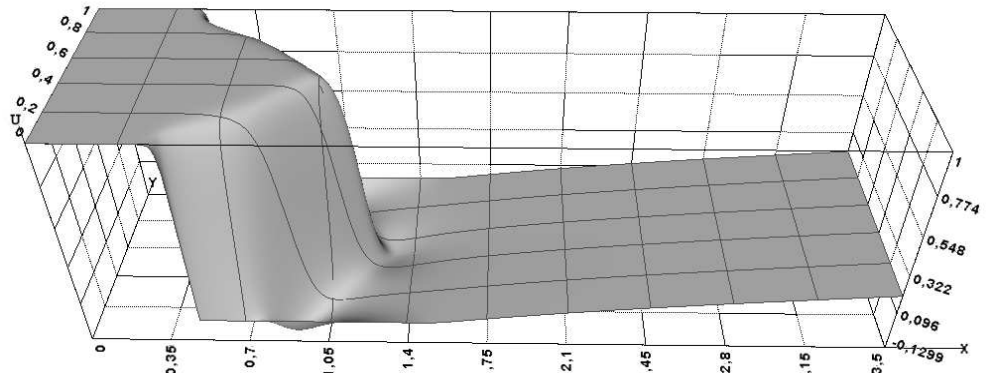


Рис. 4 c. $\mathrm{Re} = 140$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 15$

При $t = 5$ затупленная клиновидная область, в которой скорость близка по своему значению к скоро-

сти набегающего потока, выходит на небольшое расстояние из канала. Окончание канала соответствует на рис. 4 a тому месту, где продольная составляющая скорости u становится больше нуля и где возникает вторая волна, которая выходит на плато пока невозмущенной среды ($u = 0$).

Момент времени $t = 7.5$ (рис. 4 b) предшествует выходу второй волны из расчетной области и переходу к существенному изменению структуры решения. При $t = 40$ представлена поверхность продольной составляющей скорости $u(x, y)$ для установившегося режима течения.

Развитие течения после момента времени $t = 7.5$ (рис. 4 c) происходит следующим образом. Клиновидная область течения сокращается в размерах и ее передняя часть устанавливается приблизительно в районе окончания канала. Около стенок в середине канала ($x = 1.0$) происходит отрыв пограничного слоя и возникает возвратно-циркуляционное течение. Со временем образовавшийся вихрь разрастается, движется вниз по течению, постепенно устремляясь к центру канала вдоль границы клиновидной области. На рис. 5 в момент времени $t = 15$ представлено поле направлений векторов скорости во всей расчетной области и ее фрагмент вблизи нижней границы $y = 0$. При этом сохраняется полная симметрия решения относительно центра канала. Обратим внимание на то, что вихри имеют почти круговые формы и их центры располагаются достаточно близко к стенкам при $y = 0.12$ и $y = 0.88$.

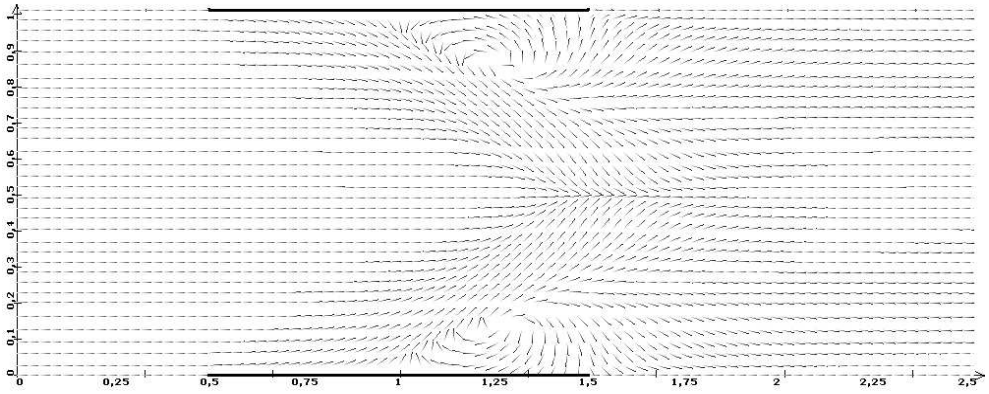


Рис. 5. $\mathrm{Re} = 140$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 15$

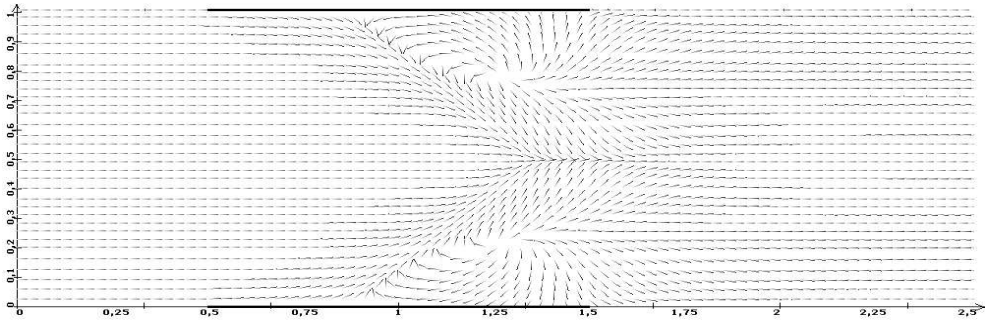


Рис. 6. $\mathrm{Re} = 140$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 20$

При $t = 20$ (рис. 6) центры вихрей сдвинулись к центру канала ($y = 0.22$ и $y = 0.78$) вдоль границы клиновидной области. Фактически центры вихрей стали областями распределения потоков газа. Часть газа направляется к стенке и в районе $x = 1.4$ в свою очередь распадается на два потока. Один поток направляется вдоль стенки канала и образует возвратное течение ($u < 0$), которое в районе $x = 1.0$ встречается с более интенсивным потоком, разворачивается и устремляется к центру канала вдоль границы клиновидной области. Другой поток, направлявшийся к стенке, разворачивается и устремляется вниз по потоку в след за каналом. Таким образом, между двумя потоками, направлявшимися к стенке, образуется линия растекания. Другая часть газа рассматриваемых вихрей направляется вниз по потоку и к центру расчетной области, где образуется линия слияния потоков.

На рис. 7 в момент времени $t = 40$ представлено поле направлений векторов скорости во всей рас-

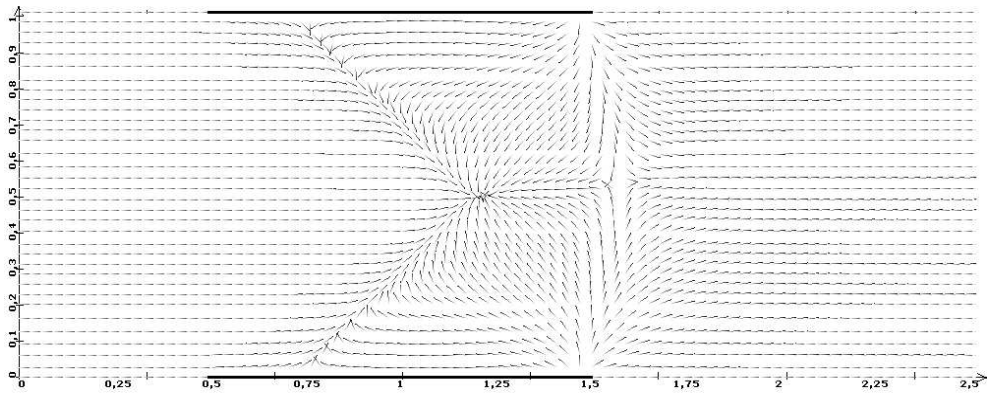


Рис. 7. $\mathrm{Re} = 140$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 40$

четной области. Вблизи оси симметрии начинается разрешение “конфликта” между верхним и нижним вихрями на фоне малых значений модуля скорости. На оси канала заостряется клиновидная область и образуется узел, в который сходятся вектора скорости. Вдоль всей границы клиновидной области резко уменьшается скорость вниз по потоку (см. рис. 4 с). Положение узловой точки на оси симметрии стабилизируется при $x = 1.24$. Таким образом, к этому моменту времени формируется клиновидная стоячая волна и происходит блокировка (“запирание”) канала. В районе окончания канала ($x = 1.5$) образуется полоса разделения векторов скорости, имеющих направление против набегающего потока, и векторов скорости, направленных вниз по потоку. Таким образом, образуется область подсоса газа к “клину”, где скорость близка по своим значениям к скорости набегающего потока.

С течением времени (см. рис. 8 и 9, где $t = 50$ и $t = 80$) эта полоса разделения векторов скорости сносится вниз по потоку. Отметим, что скорости в следе вниз по потоку от полосы разделения малы: так, например, при выходе из расчетной области значение скорости колеблется около значения 0.03.

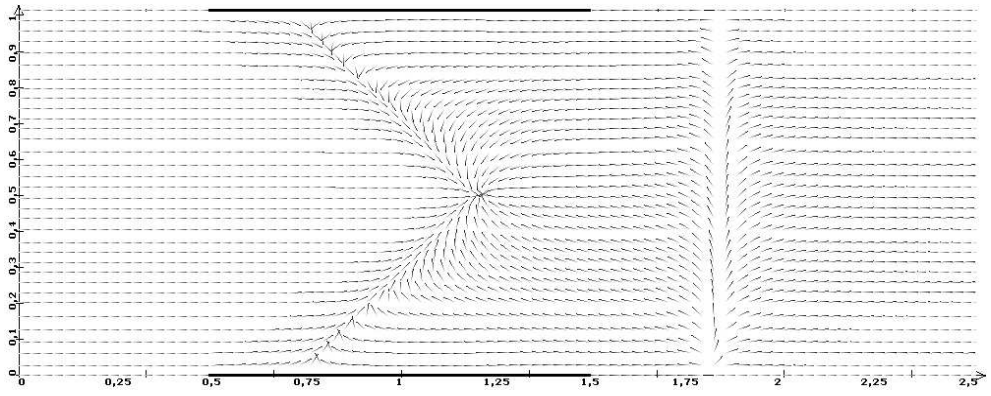


Рис. 8. $\mathrm{Re} = 140$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 50$

В конечном итоге, полоса разделения векторов скорости, внутри которой продольная составляющая скорости меняет знак с отрицательного на положительный, выходит из расчетной области; при $t = 80$ устанавливается поле направлений векторов скорости, представленное на рис. 9. Это поле характеризуется установившейся стоячей волной с четко выраженной клиновидной формой и положением узловой точки при $x = 1.24$ на оси симметрии. Положение стоячей волны поддерживается подсосом газа в канал из бесконечного затопленного пространства, расположенного за правой границей расчетной области в соответствии с постановкой задачи.

Рассмотрим теперь изменение структуры течения в каналах единичной длины при увеличении числа Рейнольдса до 4000 (число Маха фиксировано: $\mathrm{M}_0 = 0.0003$). Характер развития течения в канале и в следе за ним при $\mathrm{Re} = 350$ такой же, как и при $\mathrm{Re} = 140$. Отличие состоит только в том, что узловая точка стабилизируется при $x = 1.0$. Возникновение полосы разделения векторов скорости и снос ее вниз

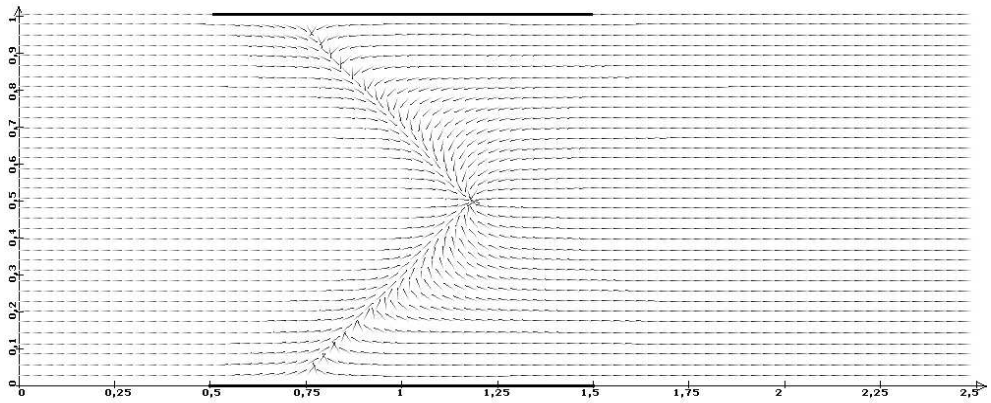


Рис. 9. $\mathrm{Re} = 140$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 80$

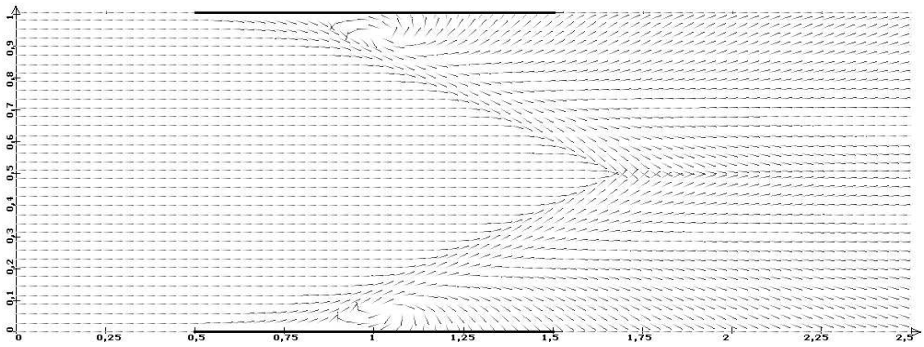


Рис. 10 a. $\mathrm{Re} = 700$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 20$

по потоку происходит таким же образом. Увеличение числа Рейнольдса в два раза ($\mathrm{Re} = 700$) приводит к несколько другому характеру развития течения.

На рис. 10 a – 10 c представлены поля направлений векторов скорости для трех моментов времени: $t = 20$, 40, 60. При входе равномерного набегающего потока в канал острие его клина выходит в след до $x = 1.65$, около стенок приблизительно в середине длины канала уже произошел отрыв пограничного слоя и образовались вихри (рис. 10 a).

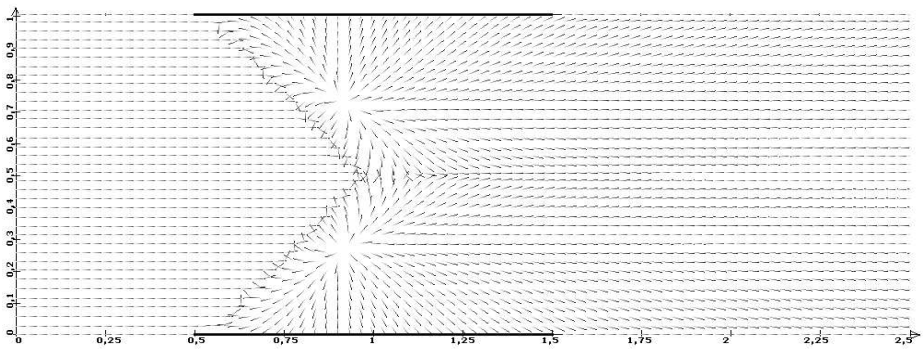


Рис. 10 b. $\mathrm{Re} = 700$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 40$

К моменту времени $t = 40$ (рис. 10 b) произошла существенная модификация течения: острие клина равномерного потока затупилось и заняло устойчивое положение при $x = 0.9$, центры вихрей расположились вблизи клина при $y = 0.25$ и $y = 0.75$ и к моменту времени $t = 60$ (рис. 10 c) практически не изменили своего положения.

Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} = 2000$) приводит первоначально при $t = 30$ (рис. 11 a)

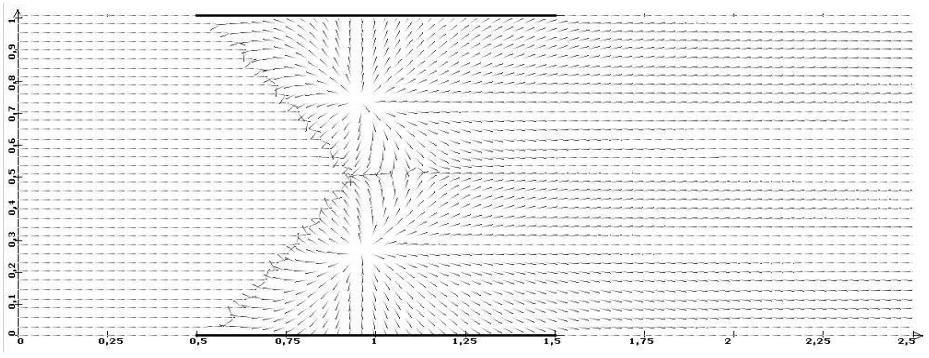


Рис. 10 c. $\mathrm{Re} = 700$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 60$

к отрыву пограничного слоя на стенках канала в районе $x = 1$ и образованию небольших вихрей, а также проникновению клина набегающего потока в след за каналом до $x = 1.9$.

В дальнейшем при $t = 80$ (рис. 11 b) устанавливается режим с двумя симметричными вихрями, центры которых находятся при $y = 0.1$ и $y = 0.9$ вблизи границы клина равномерного потока. Острие этого клина возвращается в канал и находится при $x = 1.35$.

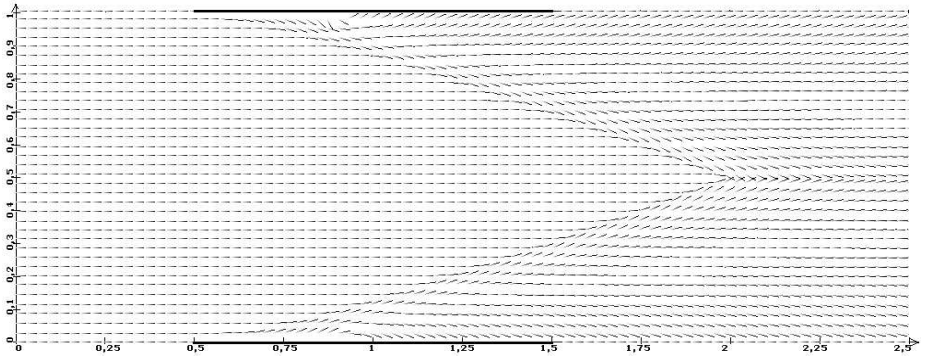


Рис. 11 a. $\mathrm{Re} = 2000$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 30$

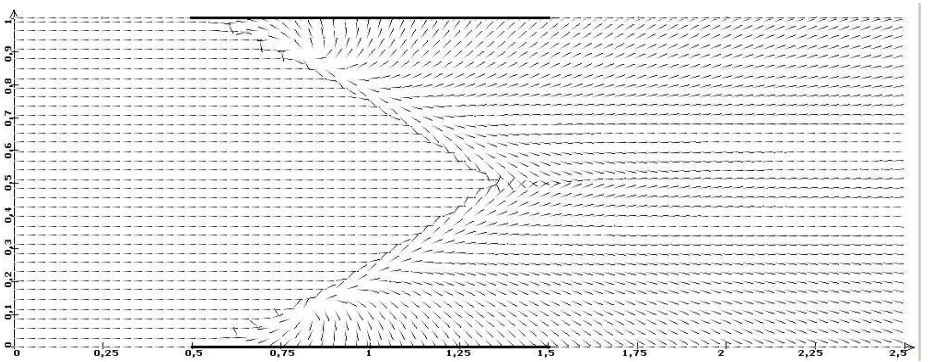


Рис. 11 b. $\mathrm{Re} = 2000$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 80$

Максимальная величина продольной составляющей скорости достигает 0.33 в конце расчетной области (рис. 11 c). Таким образом, канал единичной длины при указанных выше определяющих параметрах замедляет скорость течения в три раза.

При $\mathrm{Re} = 4000$ (рис. 12) острие клина равномерного потока пронзает весь канал и в момент времени $t = 30$ устанавливается в следе за каналом при $x = 2.20$; внутри канала не возникает отрыва пограничного слоя, приводящего к образованию возвратно-циркуляционного течения. С последующим увеличением

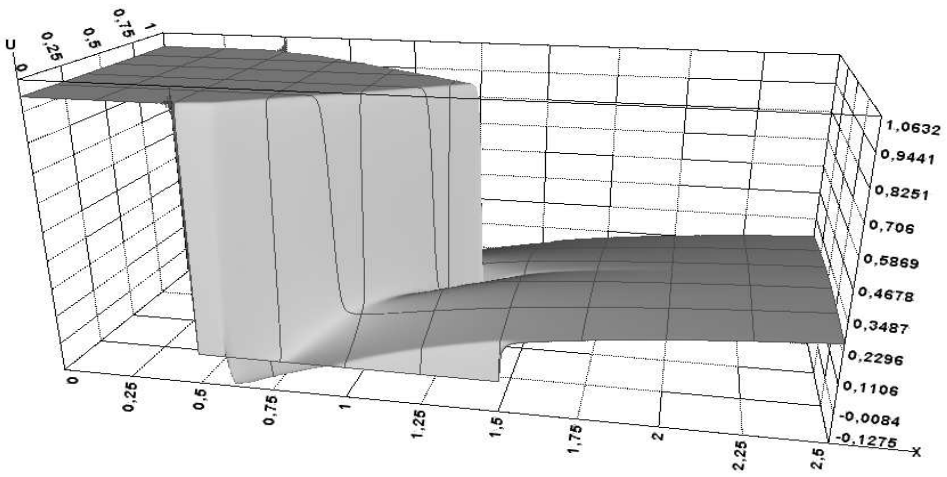


Рис. 11 с. $\mathrm{Re} = 2000$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 80$

числа Рейнольдса наблюдается еще более глубокое проникновение острия клина в след за каналом и резкое понижение продольной составляющей скорости приблизительно в два раза. Таким образом, структура течения в следе существенно неравномерна на расстоянии двух-трех характерных длин за каналом.

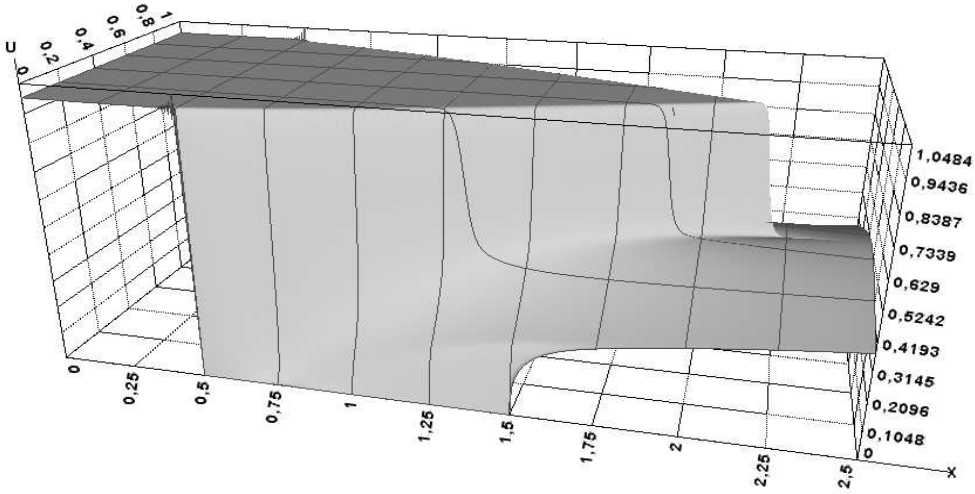


Рис. 12. $\mathrm{Re} = 4000$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 80$

Вернемся теперь к расчетам течения в канале длиной $L = 3$, которые выполнены на сетках 2001×401 при $L_x = 5$, $X_c = 0.5$, $X_e = 3.5$. На рис. 13 и 14 представлены поверхности продольной составляющей вектора скорости при $\mathrm{Re} = 7000$, $\mathrm{M}_0 = 0.03$ и при $\mathrm{Re} = 14000$, $\mathrm{M}_0 = 0.06$ соответственно. Отметим, что структуры течений очень схожи: отрыва пограничного слоя на стенках канала не происходит, острие клина набегающего потока находится внутри канала, но при $\mathrm{Re} = 14000$ расположено ближе к выходу из канала.

Как видно из этих рисунков, поперечные сечения при $x = 1.5, 2.5, 3.5, 5.0$ (см. рис 15) поверхностей продольной составляющей вектора скорости (профили продольной составляющей вектора скорости) в канале совершенно не похожи на параболические [5, 6].

В заключение отметим, что численное моделирование эволюционных процессов со сложной пространственной структурой решений возможно только на разностных сетках с большим количеством узлов. В этом случае практически невозможно обойтись без современного инструментария для интерактивного графического отображения результатов расчетов.

На рис. 16 показан снимок экрана программы, позволяющей исследовать профили двумерной функции (здесь — горизонтальной компоненты скорости) в различных сечениях канала путем непрерывного

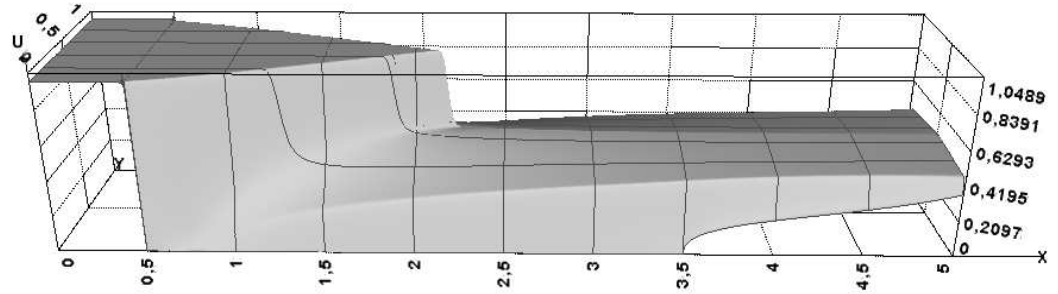


Рис. 13. $\mathrm{Re} = 4000$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 20$

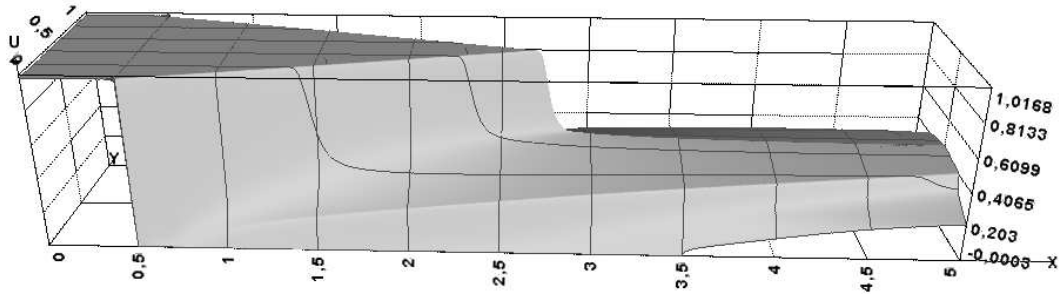


Рис. 14. $\mathrm{Re} = 14000$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 80$

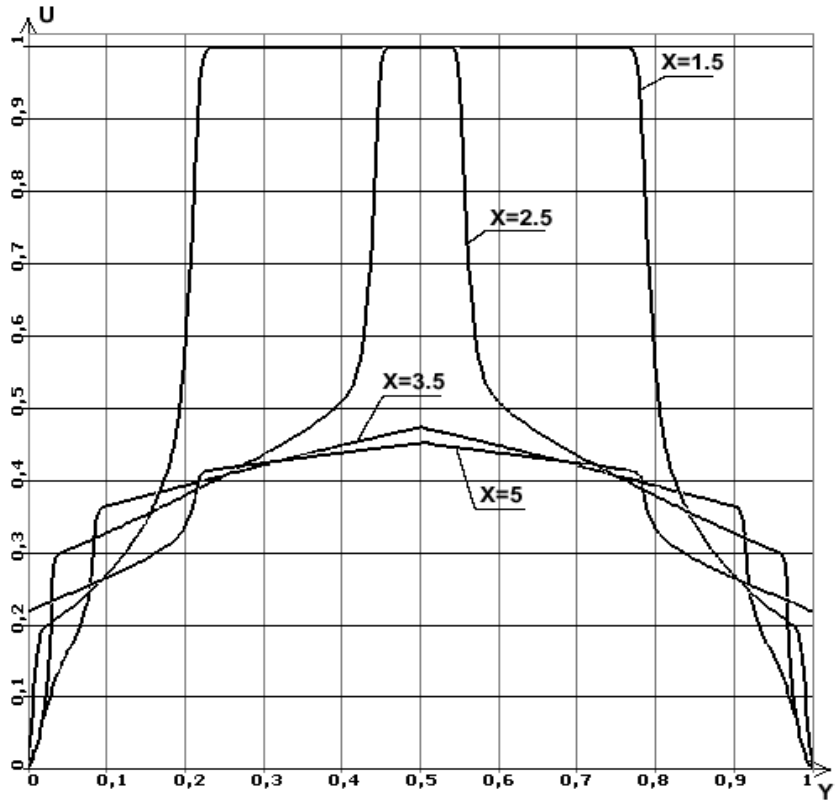


Рис. 15. $\mathrm{Re} = 14000$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 80$

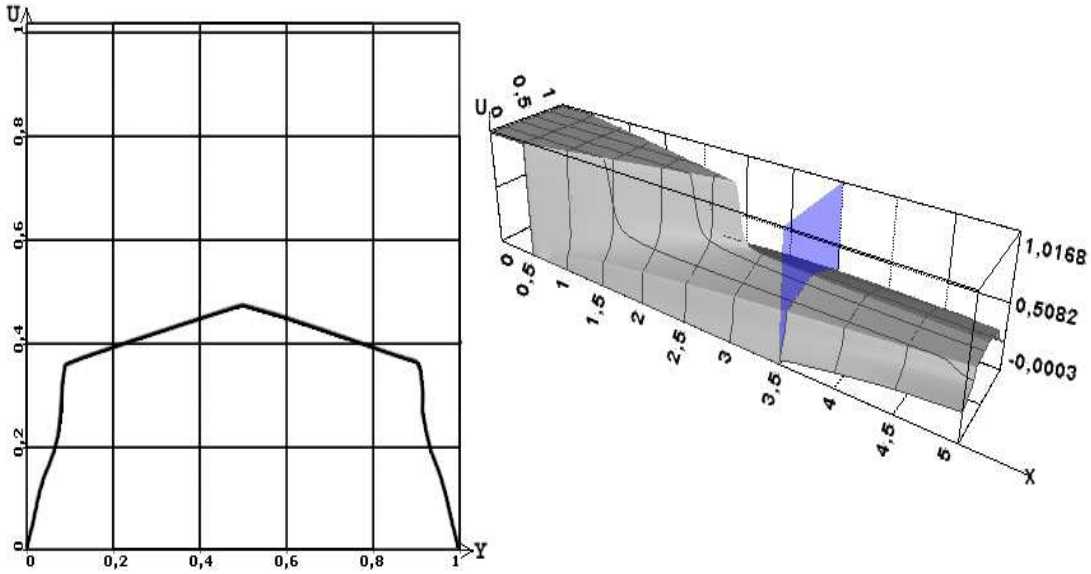


Рис. 16. $\mathrm{Re} = 14000$, $\mathrm{M}_0 = 0.0003$, $t = 80$

перемещения секущей плоскости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 01–01–00151 и 02–07–90407.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.* Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука,1989.
2. *Кускова Т.В.* Развитие течения в плоском канале // Вычислительные методы и программирование. Вып. XV. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.
3. *Кускова Т.В.* Развитие нестационарных возмущений в плоском канале // Вычислительные методы и программирование. Вып. XIX. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.
4. *Березин С.Б., Пасконов В.М.* Компонентная система визуализации расчетов на многопроцессорных вычислительных системах // Труды конференции “Высокопроизводительные вычисления и их приложения”. Черноголовка, 2000.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
6. *Schlichting H.* Laminare Kanaleinlaufstromung // ZAMM. 1934. **14**. 368–373.

Поступила в редакцию
03.12.2002