УДК 517.518.87

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА

К. А. Кириллов[1]

Исследуются квадратурные формулы, обладающие d-свойством Хаара (формулы, точно интегрирующие функции Хаара, номера групп которых не превосходят заданного числа d). Ранее было доказано, что эти квадратурные формулы имеют наилучший порядок сходимости к нулю функционала погрешности на классах S_p функций с быстро сходящимися рядами Фурье–Хаара. В настоящей статье для обладающих d-свойством Хаара квадратурных формул получена вероятностная оценка погрешности на классах S_p. Согласно этой оценке для случайно выбранной из S_p функции порядок сходимости к нулю функционала погрешности формулы со сколь угодно большой вероятностью оказывается лучше, чем ранее доказанный. И. М. Соболем в 1970-х годах исследовались квадратурные формулы с узлами, образующими Π_τ-сетки, которые так же точны на функциях Хаара. Результат настоящей работы представляет собой обобщение упомянутого результата на случай произвольных квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара.

Ключевые слова: d-свойство Хаара, погрешность квадратурной формулы, классы функций S_p.

1. Введение. Задача построения и исследования формул приближенного интегрирования, точных для некоторого заданного набора функций, в основном решалась ранее для вычисления интегралов, точных на алгебраических и тригонометрических многочленах. Так, формулы алгебраической точности можно найти, например, в [3, 4]. Формулы, точные для тригонометрических многочленов, исследовались, в частности, в [5–9].

Квадратурные и кубатурные формулы, точные для системы функций Хаара, можно найти в монографии [10] и статьях [11, 12]. В указанных работах точность формул приближенного интегрирования на конечных суммах Хаара использовалась при выводе оценок погрешности этих формул.

Описание всех минимальных весовых квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара (формул, точных на функциях Хаара, номера групп которых не превосходят заданного числа d), было проведено в [13], исследование погрешности указанных формул — в [14–16], оценки погрешности обладающих d-свойством Хаара квадратурных формул с весовой функцией $g(x) \equiv 1$ получены в [1].

В двумерном случае задача построения кубатурных формул, обладающих d-свойством Хаара (формул, точных для полиномов Хаара степеней, не превосходящих заданного числа d), решалась в [17–22], оценки погрешности указанных кубатурных формул в [23–25] получены на пространствах S_p и H_α, в [26] — на классах функций двух переменных, удовлетворяющих общему условию Липшица.

Из результатов, приведенных в [1], следует, что для функционала погрешности обладающих d-свойством Хаара квадратурных формул с N узлами при условии $f \in S_p$ $(1 < p < \infty)$ выполняется асимптотическое равенство $\bigl|\delta[f]\bigr| = O\Bigl(\bigl(2^d\bigr)^{-1/p}\Bigr)$, $d \to \infty$, которое в случае минимальных формул принимает вид $\bigl|\delta[f]\bigr| = O\bigl(N^{-1/p}\bigr)$, $N \to \infty$. В настоящей статье для обладающих d-свойством Хаара квадратурных формул с N узлами доказывается, что если функция f выбирается случайно в фиксированном в классе S_p $(1 \leqslant p < \infty)$ произвольном параллелепипеде с центром в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям, то для функционала погрешности $\delta[f]$ формулы со сколь угодно большой вероятностью выполняются следующие соотношения при $d \to \infty$:

$$\bigl|\delta[f]\bigr| = \begin{cases} o\Bigl(\bigl(2^d\bigr)^{-1}\Bigr), & \text{если} \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \\ o\Bigl(\bigl(2^d\bigr)^{-1/p\,-1/2}\Bigr), & \text{если} \quad 2 < p < \infty\,. \end{cases}$$

[1] Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий, ул. Киренского, 26, 660074, Красноярск; профессор, e-mail: kkirillov@rambler.ru

Эти соотношения в случае минимальных формул записываются при $N \to \infty$ в виде

$$\big|\delta[f]\big| = \begin{cases} o\big(N^{-1}\big), & \text{если} \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \\ o\big(N^{-1/p\,-1/2}\big), & \text{если} \quad 2 < p < \infty\,. \end{cases}$$

Результат настоящей работы представляет собой обобщение результата, полученного Соболем в [2] для квадратурных формул с узлами, образующими Π_τ-сетки, на случай квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара.

2. Основные определения. В настоящей статье используется определение функций $\chi_{mj}(x)$, введенное Хааром в [27] и отличное от приведенного в [10] определения этих функций в их точках разрыва.

Двоичными промежутками l_{mj} назовем промежутки с концами в точках $\dfrac{j-1}{2^{m-1}}\,,\ \dfrac{j}{2^{m-1}}$ $(m = 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1})$. Если левый конец двоичного промежутка совпадает с нулем, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, а если правый конец совпадает с 1 — замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины l_{mj} (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать l^-_{mj} и l^+_{mj} соответственно.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{mj}(x)$, где $m = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{mj}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{mj}(x) = \begin{cases} 2^{(m-1)/2} & \text{при} \quad x \in l^-_{mj}, \\ -2^{(m-1)/2} & \text{при} \quad x \in l^+_{mj}, \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus \overline{l_{mj}}, \\ 0.5\big\{\chi_{mj}(x-0) + \chi_{mj}(x+0)\big\}, & \text{если} \quad x \text{ — внутренняя точка разрыва.} \end{cases}$$

Здесь $\overline{l_{mj}} = \left[\dfrac{j-1}{2^{m-1}}\,,\ \dfrac{j}{2^{m-1}}\right]$, $m = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_{0,1}(x) \equiv 1$, которая образует нулевую группу.

Пусть d — целое неотрицательное число. Полиномами Хаара степени d назовем линейные комбинации с вещественными коэффициентами функций $\chi_{01}(x)$ и $\chi_{mj}(x)$, где $m = 1, 2, \dots, d$ и $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$, причем хотя бы один из коэффициентов при функциях Хаара $\chi_{dj}(x)$ группы номер d отличен от нуля.

Будем рассматривать квадратурные формулы

$$I[f] = \int\limits_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^N C_i f\big(x^{(i)}\big) = Q[f], \tag{1}$$

где $x^{(i)} \in [0,1]$ — узлы формулы, C_i — коэффициенты при узлах (вещественные числа), $i = 1, 2, \dots, N$. Функционал погрешности квадратурной формулы (1) обозначим через $\delta[f]$:

$$\delta[f] = I[f] - Q[f] = \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \sum_{i=1}^N C_i f\big(x^{(i)}\big). \tag{2}$$

Будем говорить, что квадратурная формула (1) обладает d-свойством Хаара (или просто d-свойством), если она точна для любого полинома Хаара $P(x)$ степени, не превосходящей d, т.е. $Q[P] = I[P]$. Такую формулу с наименьшим возможным числом узлов назовем минимальной квадратурной формулой, обладающей d-свойством.

Множество функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0,1]$ и представимых в виде ряда Фурье–Хаара

$$f(x) = c_0^{(1)} + \sum_{m=1}^\infty \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_m^{(j)} \chi_{mj}(x) \tag{3}$$

с вещественными коэффициентами $c_0^{(1)}, c_m^{(j)}$ (коэффициентами Фурье–Хаара), удовлетворяющими условию

$$A_p(f) = \sum_{m=1}^\infty 2^{(m-1)/2} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \big|c_m^{(j)}\big|^p\right]^{1/p} \leqslant A, \tag{4}$$

где A — вещественная константа и $1 \leqslant p < \infty$, определяется как класс $S_p(A)$. Множество функций $f(x)$, принадлежащих всем классам $S_p(A)$ (со всевозможными A, значение p фиксировано), называется классом S_p [10]. Все функции $f(x)$, отличающиеся постоянными слагаемыми, рассматриваются как одна функция.

3. Вывод вероятностной оценки погрешности квадратурных формул. Введем обозначение

$$\Sigma_q(m) = 2^{-(m-1)/2} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left| Q[\chi_{mj}] \right|^q \right\}^{1/q}, \tag{5}$$

где $q > 1$, $m = 1, 2, \ldots$

В [1] доказана

Лемма. *Если квадратурная формула* (1) *обладает d-свойством, то справедливо неравенство* $\sup\limits_{d<m<\infty} \Sigma_q(m) \leqslant \left(2^d\right)^{-1/p}$, *где p и q связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$.*

Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $h \in S_p$ — фиксированная функция, $h(x) = h_0^{(1)} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{2^{m-1}} h_m^{(j)} \chi_{mj}(x)$. Если квадратурная формула* (1) *обладает d-свойством, а функция $f \in S_p$ такова, что ее коэффициенты Фурье–Хаара $c_m^{(j)}$ удовлетворяют неравенствам $\left|c_m^{(j)}\right| \leqslant \left|h_m^{(j)}\right|$ и являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными в $\left[-h_m^{(j)}, h_m^{(j)}\right]$, то со сколь угодно большой вероятностью выполняются следующие соотношения при $d \to \infty$:*

$$\left|\delta[f]\right| = \begin{cases} o\Big(\left(2^d\right)^{-1}\Big), & 1 \leqslant p \leqslant 2, \\ o\Big(\left(2^d\right)^{-1/p-1/2}\Big), & 2 < p < \infty. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. В [10] доказано, что если $f \in S_p$, то ряд (3) сходится абсолютно и равномерно. Подставим в (2) выражение для $f(x)$ из (3). В силу точности квадратурной формулы (1) на функциях Хаара групп, номера которых не превосходят d, выражение для функционала погрешности этой формулы представимо в виде

$$\delta[f] = -\sum_{m=d+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_m^{(j)} Q[\chi_{mj}]. \tag{7}$$

По свойствам случайной величины, равномерно распределенной на отрезке, для математического ожидания и дисперсии величин $c_m^{(j)}$ имеют место равенства $M\left(c_m^{(j)}\right) = 0$, $D\left(c_m^{(j)}\right) = \dfrac{1}{3}\left(h_m^{(j)}\right)^2$. Из (7) следует, что $M\left(\delta[f]\right) = 0$, а для дисперсии величины $\delta[f]$ выполняется равенство

$$D\left(\delta[f]\right) = \frac{1}{3} \sum_{m=d+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left(h_m^{(j)}\right)^2 \left(Q[\chi_{mj}]\right)^2. \tag{8}$$

Пусть p' и q' удовлетворяют соотношению $1/p' + 1/q' = 1$. Применяя неравенство Гельдера к сумме по j в (8), получим

$$D\left(\delta[f]\right) \leqslant \frac{1}{3} \sum_{m=d+1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left|h_m^{(j)}\right|^{2p'} \right\}^{1/p'} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left|Q[\chi_{mj}]\right|^{2q'} \right\}^{1/q'}. \tag{9}$$

Используя равенство (5), неравенство (9) запишем в виде

$$D\left(\delta[f]\right) \leqslant \frac{1}{3} \sum_{m=d+1}^{\infty} 2^{m-1} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left|h_m^{(j)}\right|^{2p'} \right\}^{1/p'} \left\{\Sigma_{2q'}(m)\right\}^2. \tag{10}$$

В силу сформулированной выше леммы имеем $\sup\limits_{d<m<\infty} \Sigma_{2q'}(m) \leqslant \left(2^d\right)^{1/2q'-1}$; тогда из (10) следует неравенство

$$D\left(\delta[f]\right) \leqslant \frac{1}{3} \left(2^d\right)^{1/q'-2} \sum_{m=d+1}^{\infty} 2^{m-1} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left|h_m^{(j)}\right|^{2p'} \right\}^{1/p'}. \tag{11}$$

Рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть $2 < p < \infty$. Положим $p' = p/2$, $q' = (1-2/p)^{-1}$. Тогда ряд, фигурирующий в (11), принимает вид $\sum\limits_{m=d+1}^{\infty} 2^{m-1} \left\{ \sum\limits_{j=1}^{2^{m-1}} \left| h_m^{(j)} \right|^p \right\}^{2/p}$ и, следовательно, является остаточным членом ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 2^{m-1/2} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left| h_m^{(j)} \right|^p \right]^{1/p} \right\}^2 . \tag{12}$$

Так как $h \in S_p$, то в силу (4) ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left| h_m^{(j)} \right|^p \right]^{1/p} = A_p(h) \tag{13}$$

сходится. Тогда сходится и ряд (12) и справедливо равенство $\lim\limits_{d\to\infty} \sum\limits_{m=d+1}^{\infty} 2^{m-1} \left\{ \sum\limits_{j=1}^{2^{m-1}} \left| h_m^{(j)} \right|^p \right\}^{2/p} = 0$. В соответствии с (11) имеем

$$D\big(\delta[f]\big) = o\Big(\big(2^d\big)^{-2/p-1}\Big) \quad \text{при} \quad d \to \infty. \tag{14}$$

2. Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$. В [10] доказано, что при $0 < p < p_1$ имеет место неравенство

$$\left[\sum_{j=1}^{M} |u_j|^{p_1} \right]^{1/p_1} \leqslant \left[\sum_{j=1}^{M} |u_j|^{p} \right]^{1/p}, \tag{15}$$

из которого следует соотношение

$$\left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left| h_m^{(j)} \right|^{2p'} \right\}^{1/p'} \leqslant \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \big(h_m^{(j)} \big)^2. \tag{16}$$

Из (11) и (16) получим

$$D\big(\delta[f]\big) \leqslant \frac{1}{3} \big(2^d\big)^{1/q'-2} \sum_{m=d+1}^{\infty} 2^{m-1} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \big(h_m^{(j)} \big)^2. \tag{17}$$

Поскольку неравенство (17) выполняется при всех $q' > 1$, имеем

$$D\big(\delta[f]\big) \leqslant \inf_{q'>1} \left\{ \frac{1}{3} \big(2^d\big)^{1/q'-2} \sum_{m=d+1}^{\infty} 2^{m-1} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \big(h_m^{(j)} \big)^2 \right\} = \frac{1}{3} \big(2^d\big)^{-2} \sum_{m=d+1}^{\infty} 2^{m-1} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \big(h_m^{(j)} \big)^2. \tag{18}$$

Так как ряд (13) сходится, то вследствие неравенства $\left[\sum\limits_{j=1}^{2^{m-1}} \big(h_m^{(j)} \big)^2 \right]^{1/2} \leqslant \left[\sum\limits_{j=1}^{2^{m-1}} \left| h_m^{(j)} \right|^p \right]^{1/p}$, которое имеет место в силу (15), сходится и ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \left[\sum\limits_{j=1}^{2^{m-1}} \big(h_m^{(j)} \big)^2 \right]^{1/2}$. Тогда ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 2^{(m-1)/2} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \big(h_m^{(j)} \big)^2 \right]^{1/2} \right\}^2 \tag{19}$$

также является сходящимся. Ряд $\sum\limits_{m=d+1}^{\infty} 2^{m-1} \sum\limits_{j=1}^{2^{m-1}} \big(h_m^{(j)} \big)^2$, фигурирующий в (18), представляет собой остаточный член ряда (19); следовательно, $\lim\limits_{d\to\infty} \sum\limits_{m=d+1}^{\infty} 2^{m-1} \sum\limits_{j=1}^{2^{m-1}} \big(h_m^{(j)} \big)^2 = 0$. Тогда в силу (18) имеем

$$D\big(\delta[f]\big) = o\Big(\big(2^d\big)^{-2}\Big) \quad \text{при} \quad d \to \infty. \tag{20}$$

Соотношения (6) вытекают из (14), (20) и неравенства Чебышева

$$P\left\{\left|\delta[f]-M\big(\delta[f]\big)\right|<\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{D\big(\delta[f]\big)}\right\}\geqslant 1-\varepsilon^2\quad\forall\,\varepsilon>0.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Множество функций $f\in S_p$ с коэффициентами Фурье–Хаара $c_m^{(j)}$, удовлетворяющими неравенствам $\left|c_m^{(j)}\right|\leqslant\left|h_m^{(j)}\right|$, можно считать параллелепипедом в S_p с центром в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям.

Замечание 2. Число узлов N квадратурной формулы (1) и параметр d, фигурирующие в соотношениях (6), связаны неравенством $N\geqslant 2^{d-1}$, которое следует из нижней оценки числа узлов, полученной в [13] для обладающей d-свойством квадратурной формулы с произвольной весовой функцией.

Замечание 3. В [13] описаны все обладающие d-свойством минимальные весовые квадратурные формулы $\int\limits_0^1 g(x)f(x)\,dx\approx\sum\limits_{i=1}^{N}C_i f(x^{(i)})$. Доказано, что в случае весовой функции $g(x)\equiv 1$ минимальная формула единственна: число ее узлов $N=2^{d-1}$, узлы этой формулы $x^{(i)}=2^{-d}(2i-1)$, коэффициенты при узлах $C_i=2^{-d+1}$, $i=1,2,\dots,2^{d-1}$. Указанная квадратурная формула имеет вид (1). При выполнении условий доказанной выше теоремы для ее функционала погрешности в соответствии с (6) со сколь угодно большой вероятностью справедливы следующие асимптотические равенства при $N\to\infty$:

$$\left|\delta[f]\right|=\begin{cases}o\big(N^{-1}\big), & \text{если}\quad 1\leqslant p\leqslant 2,\\ o\big(N^{-1/p-1/2}\big), & \text{если}\quad 2<p<\infty\,.\end{cases}\tag{21}$$

4. Заключение. В [2] установлено, что если функция f выбирается случайно в фиксированном в S_p произвольном параллелепипеде с центром в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям, то для функционала погрешности $\delta[f]$ квадратурных формул (1) с $N=2^\nu$ узлами, образующими Π_τ-сетки ($0\leqslant\tau<\nu$), со сколь угодно большой вероятностью имеют место асимптотические равенства (21). В [10] доказано, что указанные квадратурные формулы точны для функций Хаара групп, номера которых не превосходят $\nu-\tau$, т.е. представляют собой частный случай формул, обладающих d-свойством при $d=\nu-\tau$. Следовательно, доказанная в настоящей статье теорема является обобщением результатов, полученных Соболем в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кириллов К.А.* Об оценках погрешности квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 330–337.
2. *Соболь И.М.* Вероятностная оценка погрешности интегрирования для Π_τ-сеток // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1973. **13**, № 4. 1035–1037.
3. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.
4. *Radon J.* Zur mechanischen Kubatur // Monatshefte für Mathematik. 1948. **52**, N 4. 286–300.
5. *Мысовских И.П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
6. *Носков М.В., Schmid H.J.* Кубатурные формулы высокой тригонометрической точности // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2004. **44**, № 5. 793–802.
7. *Cools R., Sloan I.H.* Minimal cubature formulae of trigonometric degree // Mathematics of Computation. 1996. **65**, N 216. 1583–1600.
8. *Cools R., Lyness J.N.* Three- and four-dimensional K-optimal lattice rules of moderate trigonometric degree // Mathematics of Computation. 2001. **70**, N 236. 1549–1567.
9. *Osipov N.N., Cools R., Noskov M.V.* Extremal lattices and the construction of lattice rules // Applied Mathematics and Computation. 2011. **217**, N 9. 4397–4407.
10. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.
11. *Entacher K.* Quasi-Monte Carlo methods for numerical integration of multivariate Haar series // BIT Numerical Mathematics. 1997. **37**, N 4. 846–861.
12. *Entacher K.* Quasi-Monte Carlo methods for numerical integration of multivariate Haar series II // BIT Numerical Mathematics. 1998. **38**, N 2. 283–292.
13. *Кириллов К.А., Носков М.В.* Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2002. **42**, № 6. 791–799.

14. *Кириллов К.А.* Об оценке погрешности минимальных весовых квадратурных формул, точных для функций Хаара // Вычислительные технологии. 2006. **11**, спец. выпуск. 44–50.
15. *Кириллов К.А.* Оценки нормы функционала погрешности на пространствах S_p весовых квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 324–331.
16. *Кириллов К.А.* Об оценке нормы функционала погрешности на пространствах S_p весовых квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вестн. Красноярского гос. аграрного ун-та. 2013. № 7. 30–36.
17. *Кириллов К.А.* Минимальные кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара в $\mathbb{R}^2$ // Вопросы математического анализа. Т. 6. Красноярск: Изд-во Красноярского гос. техн. ун-та, 2003. 108–117.
18. *Кириллов К.А.* Нижние оценки числа узлов кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Вычислительные технологии. 2004. **9**, спец. выпуск. 62–71.
19. *Кириллов К.А.* Построение минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара высших степеней в двумерном случае // Вычислительные технологии. 2005. **10**, спец. выпуск. 29–47.
20. *Noskov M.V., Kirillov K.A.* Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials // J. of Approximation Theory. 2010. **162**, N 3. 615–627.
21. *Кириллов К.А.* Алгоритм построения минимальных кубатурных формул, обладающих d-свойством Хаара в двумерном случае // Журн. Сибирского федерального ун-та. Серия “Математика и физика”. 2010. **3**, № 2. 205–215.
22. *Кириллов К.А.* Минимальные кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара малых степеней в двумерном случае // Вестн. Красноярского гос. аграрного ун-та. 2012. № 10. 7–12.
23. *Кириллов К.А., Носков М.В.* Оценки погрешности на пространствах S_p кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2009. **49**, № 1. 3–13.
24. *Кириллов К.А.* Оценки нормы функционала погрешности на пространствах H_α кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Журн. Сибирского федерального ун-та. Серия “Математика и физика”. 2012. **5**, № 3. 382–387.
25. *Кириллов К.А.* Об оценках погрешности кубатурных формул, точных для полиномов Хаара // Вестник Сибирского гос. аэрокосмического ун-та. 2012. № 2. 33–36.
26. *Кириллов К.А.* О точных для полиномов Хаара кубатурных формулах от функций двух переменных, удовлетворяющих общему условию Липшица // Вычислительные методы и программирование. 2013. **14**. 132–140.
27. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. **69**, № 3. 331–371.

Поступила в редакцию
09.01.2014

A Probabilistic Error Estimate of Quadrature Formulas Accurate for Haar Polynomials

K. A. Kirillov[1]

[1] *Siberian Federal University, Institute of Space and Information Technologies; ulitsa Kirenskogo 26, Krasnoyarsk, 660074, Russia; Professor, e-mail: kkirillov@rambler.ru*

Received January 9, 2014

Abstract: Quadrature formulas possessing the Haar d-property (i.e., the formulas that are accurate for Haar functions of groups with the numbers not exceeding a given number d) are studied. Previously it was proved that these quadrature formulas have the best order of convergence to zero for the error functional on the classes S_p consisting of the functions with the fast convergent Fourier–Haar series. In this paper we obtain a probabilistic error estimate on the classes S_p for the quadrature formulas possessing the Haar d-property. According to this estimate, for a function randomly chosen from S_p the order of convergence to zero for the error functional is better with an arbitrarily high probability than that obtained previously. In 1970s, I.M. Sobol' studied the quadrature formulas with nodes that form Π_τ grids; these formulas are also accurate for the Haar functions. This paper generalizes the result obtained by Sobol' to the case of arbitrary quadrature formulas possessing the Haar d-property.

Keywords: Haar d-property, error of quadrature formula, S_p classes of functions.

References

1. K. A. Kirillov, “On Error Estimates for Quadrature Formulas Exact for Haar Polynomials,” Vychisl. Metody Programm. **12**, 330–337 (2011).

2. I. M. Sobol', "Probability Estimate of the Integration Error for Π_τ-Nets," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **13** (4), 1035–1037 (1973) [Comput. Math. Math. Phys. **13** (4), 259–262 (1973)].

3. V. I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals* (Nauka, Moscow, 1967; Dover, New York, 2005).

4. J. Radon, "Zur Mechanischen Kubatur," Monatsh. Math. **52** (4), 286–300 (1948).

5. I. P. Mysovskikh, *Interpolatory Cubature Formulas* (Nauka, Moscow, 1981) [in Russian].

6. M. V. Noskov and H. J. Schmid, "Cubature Formulas of High Trigonometric Accuracy," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **44** (5), 793–802 (2004) [Comput. Math. Math. Phys. **44** (5), 786–795 (2004)].

7. R. Cools and I. H. Sloan, "Minimal Cubature Formulae of Trigonometric Degree," Math. Comput. **65** (216), 1583–1600 (1996).

8. R. Cools and J. N. Lyness, "Three- and Four-Dimensional K-Optimal Lattice Rules of Moderate Trigonometric Degree," Math. Comput. **70** (236), 1549–1567 (2001).

9. N. N. Osipov, R. Cools, and M. V. Noskov, "Extremal Lattices and the Construction of Lattice Rules," Appl. Math. Comput. **217** (9), 4397–4407 (2011).

10. I. M. Sobol', *Multidimensional Quadrature Formulas and Haar Functions* (Nauka, Moscow, 1969) [in Russian].

11. K. Entacher, "Quasi-Monte Carlo Methods for Numerical Integration of Multivariate Haar Series," BIT **37** (4), 846–861 (1997).

12. K. Entacher, "Quasi-Monte Carlo Methods for Numerical Integration of Multivariate Haar Series II," BIT **38** (2), 283–292 (1998).

13. K. A. Kirillov and M. V. Noskov, "Minimal Quadrature Formulas Accurate for Haar Polynomials," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **42** (6), 791–799 (2002) [Comput. Math. Math. Phys. **42** (6), 758–766 (2002)].

14. K. A. Kirillov, "On an Estimate of Error of Weight Minimal Quadrature Formulae Exact for Haar Functions," Vychisl. Tekhnol. **11** (Suppl. 4), 44–50 (2006).

15. K. A. Kirillov, "Estimates for the Norm of the Error Functional in the Spaces S_p for the Weight Quadrature Formulas Exact for Haar Polynomials," Vychisl. Metody Programm. **13**, 324–331 (2012).

16. K. A. Kirillov, "On an Estimate of the Error Functional for the Weight Quadrature Formulas Accurate for Haar Polynomials," Vestn. Krasnoyarsk. Agrar. Univ., No. 7, 30–36 (2013).

17. K. A. Kirillov, "Minimal Cubature Formulas Accurate for Haar Polynomials in $\mathbb{R}^2$," in *Mathematical Analysis* (Krasnoyarsk. Gos. Univ., Krasnoyarsk, 2003), Vol. 6, pp. 108–117.

18. K. A. Kirillov, "Lower Estimates for the Node Number of Cubature Formulas Accurate for Haar Polynomials in the Two-Dimensional Case," Vychisl. Tekhnol. **9** (Suppl. 1), 62–71 (2004).

19. K. A. Kirillov, "Construction of Minimal Cubature Formulae Exact for Haar Polynomials of High Degrees in the Two-Dimensional Case," Vychisl. Tekhnol. **10** (Suppl. 4), 29–47 (2005).

20. M. V. Noskov and K. A. Kirillov, "Minimal Cubature Formulas Exact for Haar Polynomials," J. Approx. Theory **162** (3), 615–627 (2010).

21. K. A. Kirillov, "An Algorithm for Constructing Minimal Cubature Formulas with Haar d-Property in the Two-Dimensional Case," Zh. Sib. Feder. Univ., Ser. Mat. Fiz. **3** (2), 205–215 (2010).

22. K. A. Kirillov, "Minimal Cubature Formulas Exact for Small-Degree Haar Polynomials in the Two-Dimensional Case," Vestn. Krasnoyarsk. Agrar. Univ., No. 10, 7–12 (2012).

23. K. A. Kirillov and M. V. Noskov, "Error Estimates in S_p for Cubature Formulas Exact for Haar Polynomials in the Two-Dimensional Case," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **49** (1), 3–13 (2009) [Comput. Math. Math. Phys. **49** (1), 1–11 (2009)].

24. K. A. Kirillov, "Estimates of the Error Functional Norm in the Spaces H_α for Cubature Formulas Exact for Haar Polynomials in the Two-Dimensional Case," Zh. Sib. Feder. Univ., Ser. Mat. Fiz. **5** (3), 382–387 (2012).

25. K. A. Kirillov, "On Error Estimates for Cubature Formulas Exact for Haar Polynomials," Vestn. Sib. Gos. Aerokosm. Univ., No. 2, 33–46 (2012).

26. K. A. Kirillov, "On Cubature Formulas Exact for Haar Polynomials in the Case of Two-Variable Functions Satisfying the General Lipschitz Condition," Vychisl. Metody Programm. **14**, 132–140 (2013).

27. A. Haar, "Zur Theorie der Orthogonalen Funktionensysteme," Math. Ann. **69** (3), 331–371 (1910).